الرياضيات

البحتة

الجزء الخاص
بالشرح و التمارين





تطبيق
التعلم التفاعلى



إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الأول

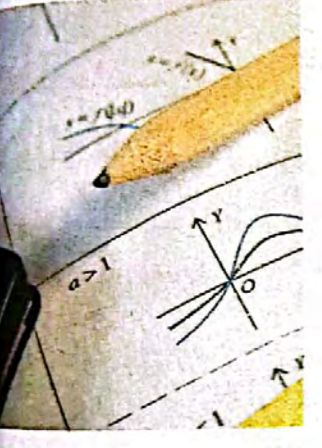




محتويات الكتاب

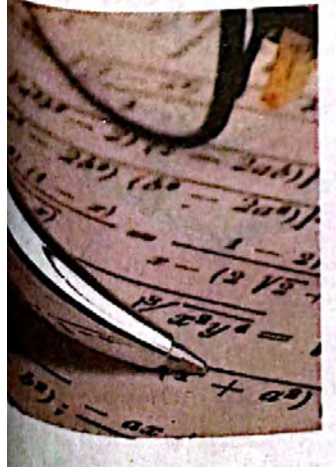
أولًا : الجبـــر

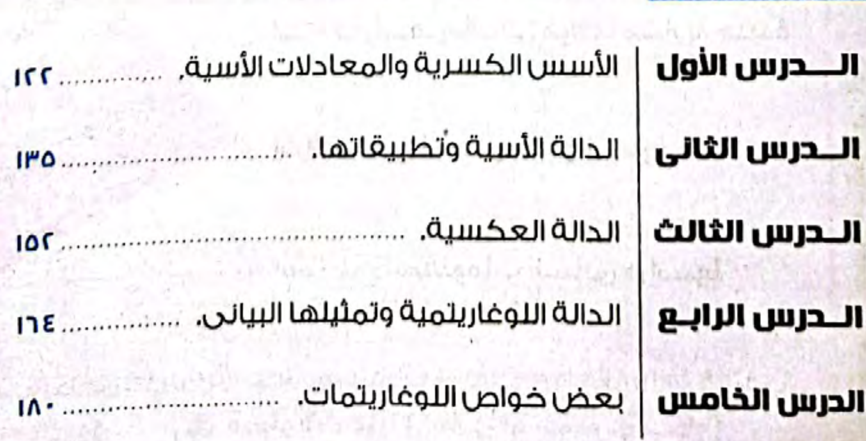
الوحدة 1 الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات





الوحدة 2 الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها







ثانيًا : التفاضل وحساب المثلثات

الوحدة 3 النهايات والاتصال

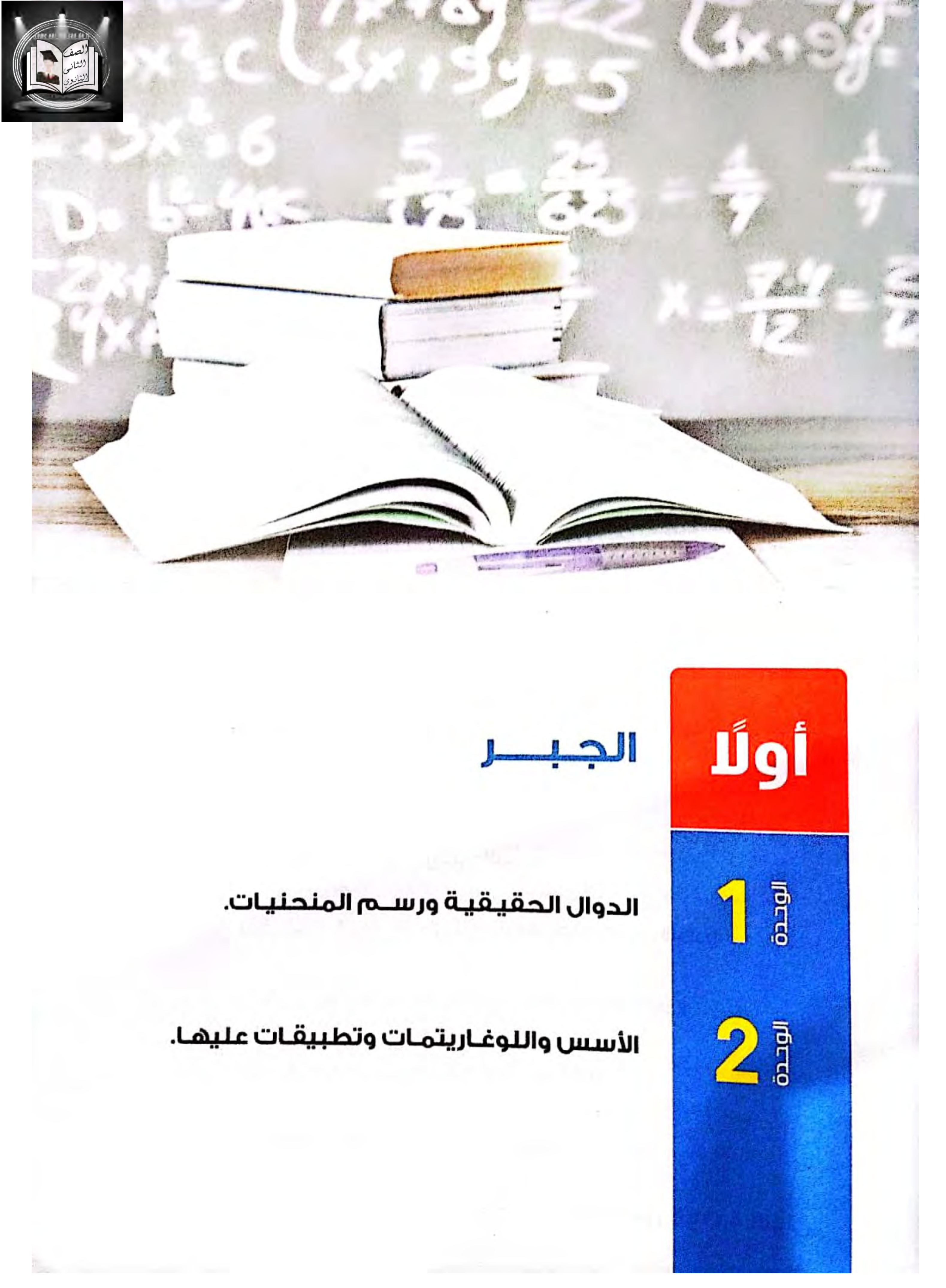




الوحدة 4 حساب المثلثات




ثانيًا
التفاضل وحساب المثلثات
الوحدة 3
النهايات والاتصال
الوحدة 4
حساب المثلثات

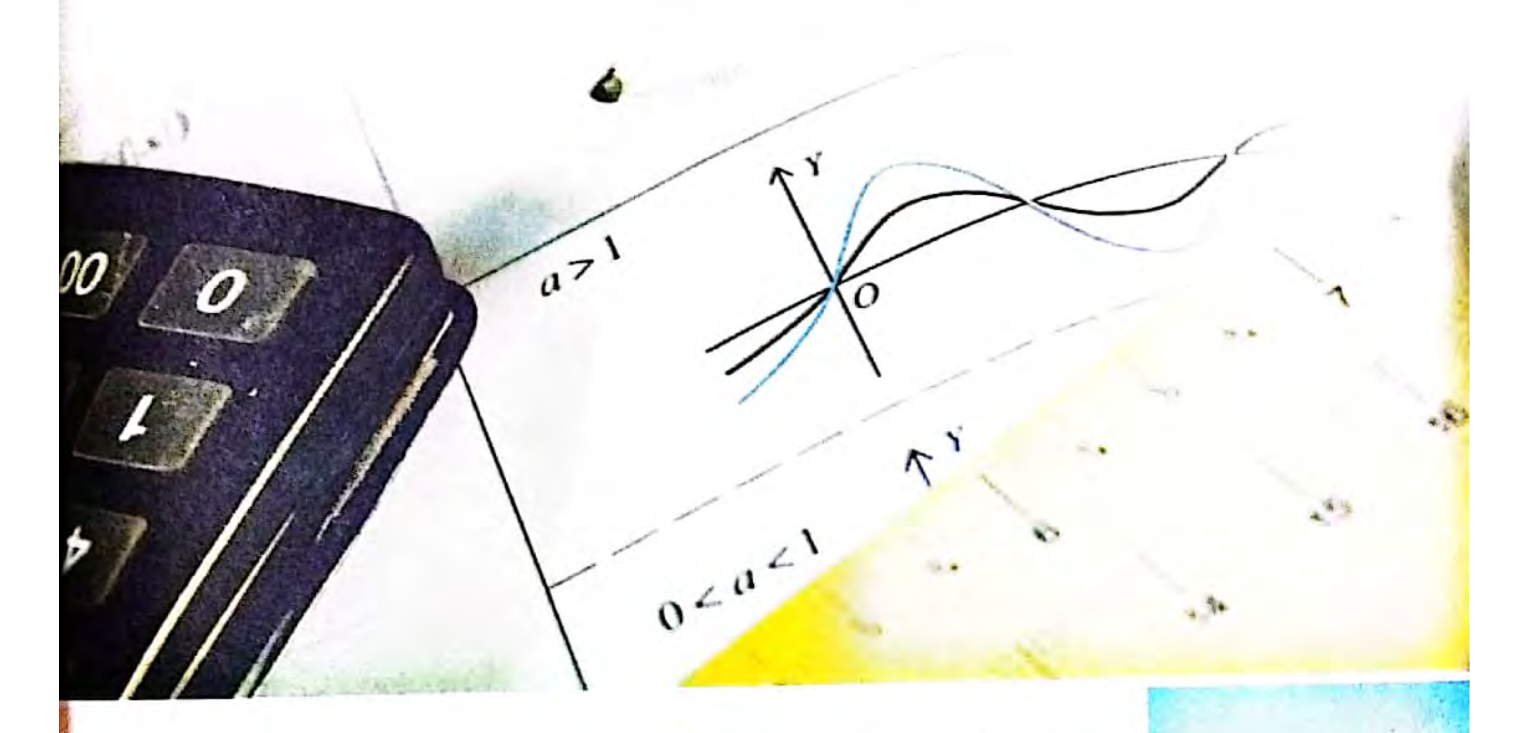


أولًا
الجبـــر
الوحدة 1
الدوال الحقيقية ورســم المنحنيات.
الوحدة 2
الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها.



الوحدة الأولى

الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات



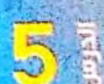
متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

1 الدوال الحقيقية (تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد).


2 العمليات على الدوال - تركيب دالتين.


3 بعض خواص الدوال (الدوال الزوجية والفردية - الدوال الأحادية).


4 التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال.


5 التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية.


6 حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

فى نهاية الوحـــدة : تطبيقات حياتيـة على الوحدة الأولى.



متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

* إذا كانت س ، ص مجموعتين غير خاليتين فإن :

الدالة من المجموعة س إلى المجموعة ص هى علاقة تربط كل عنصر من عناصر س بعنصر واحد فقط من عناصر ص وتسمى س بمجال الدالة ، ص بالمجال المقابل.

، مجموعة صور عناصر مجموعة المجال س بـ «مدى الدالة» وهى مجموعة جزئية من المجال المقابل ص

* الدالة د تكتب رياضيًا د : س ⟵ ص ، قاعدة الدالة تكتب ص = د (س)

* بيان الدالة = {(س ، ص) ، س ∈ س ، ص ∈ ص ، ص = د (س)}

* يمكن تمثيل الدالة بالمخطط السهمى أو البيانى (الديكارتى)

فمثلًا : إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

وكانت الدالة د : س ⟵ ص

حيث د (س) = س + ١

فإن بيان الدالة = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٥)}

• **لاحظ أن :**

ليس كل علاقة من س إلى ص دالة ولكن كل الدوال من س إلى ص هى علاقات تحقق أن :

– كل عنصر من س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى الأزواج المرتبة فى بيان العلاقة.

– كل عنصر من س يخرج منه سهم واحد وواحد فقط إلى أحد عناصر ص فى المخطط السهمى.

– كل خط رأسى يمر بنقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة فى المخطط البيانى.

* الدالة د : د (س) = $أ_٠ + أ_١$ س + $أ_٢$ $س^٢$ + $أ_٣$ $س^٣$ + ... + $أ_ن$ $س^ن$

حيث $أ_٠$ ، $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ ، ... ، $أ_ن$ ثوابت ، $أ_ن$ ∈ ح − {٠} ، ن ∈ ط تسمى كثيرة حدود من الدرجة ن وكل من مجالها والمجال المقابل هو ح ما لم يذكر خلاف ذلك.

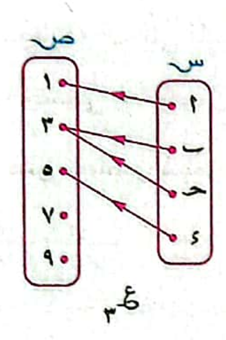
* الدالة د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ $س^ن$ حيث أ ∈ $ح^*$ ، ن ∈ $ص_+$ تسمى دالة قوى لذلك عند جمع أو طرح دوال قوى مع ثوابت نحصل على دالة كثيرة حدود.

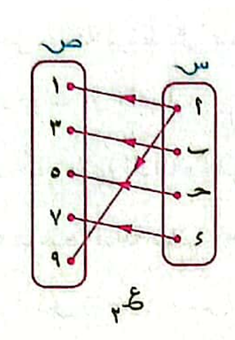
* مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود د هى مجموعة قيم س التى تجعل د (س) = صفر وهى تساوى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع الشكل البيانى للدالة مع محور السينات.

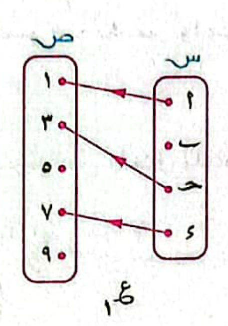


مثال (١)

بين مع ذكر السبب أى العلاقات المبينة بالمخططات السهمية الآتية يمثل دالة وأيها لا يمثل دالة وإذا كانت دالة اذكر المجال والمدى :







الحـــل

- $ع_1$ لا تمثل دالة لأن العنصر ب ∈ س لم يخرج منه أى سهم
- $ع_2$ لا تمثل دالة لأن العنصر ﺃ ∈ س خرج منه سهمان
- $ع_3$ تمثل دالة لأن كل عنصر من س خرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر ص

، مجال الدالة = {ﺃ ، ب ، حـ ، ء} ، مدى الدالة = {١ ، ٣ ، ٥}

مثال (٢)

حدد قيم ﺃ ، ب ، حـ التى تجعل د (س) = ر (س) حيث :

د (س) = (ﺃ + ب) $س^2$ − ٣ س − ٤ ، ر (س) = $س^2$ + (ﺃ + حـ) س + ب

الحـــل

∵ د (س) = ر (س) عندما تتساوى معاملات قوى س المتناظرة

∴ ﺃ + ب = ١ (١) ، (ﺃ + حـ) = −٣ (٢) ، ب = −٤

، بالتعويض عن قيمة ب فى (١) ∴ ﺃ − ٤ = ١ ∴ ﺃ = ٥

وبالتعويض عن قيمة ﺃ فى (٢) ∴ ٥ + حـ = −٣ ∴ حـ = −٨



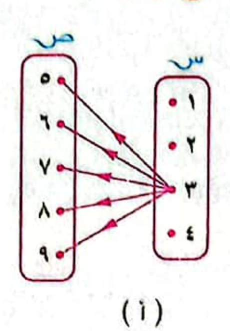
تمارين على المتطلبات القبلية

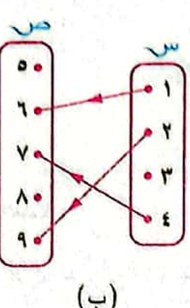
📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

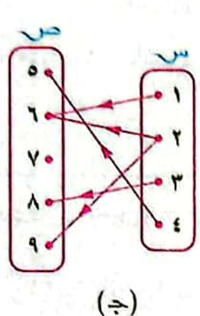
أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

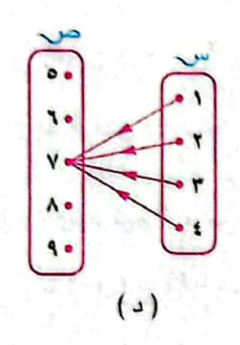
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① 📖 أى المخططات السهمية الآتية يمثل دالة من س إلى ص ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

② 📖 العلاقة المبينة بمجموعة الأزواج المرتبة والتى لا تمثل دالة هى ....

(أ) {(١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧) ، (٧ ، ٩)}

(ب) {(٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٥)}

(جـ) {(٠ ، ٣) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣)}

(د) {(-٣ ، ٥) ، (-١ ، ٥) ، (٠ ، ٥) ، (٢ ، ٥)}

③ إذا كانت د : ح ⟵ ح وكانت د تربط العدد بنصف مربعه مضافاً إليه ٣

فإن : د (٢) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٥

④ إذا كانت ط هى مجموعة الأعداد الطبيعية أى مما يأتى يمثل دالة من ط ⟵ ط ؟

(أ) د (س) = $\frac{٢ س}{٣}$ (ب) ر (س) = ١ - س

(جـ) هـ (س) = ٢ س + ٣ (د) ن (س) = $\frac{١}{س - ٢}$

⑤ إذا كانت د : {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ⟵ ح حيث د (س + ٢) = ٣ س + ١

فإن : د (٣) = ...

(أ) ١٠ (ب) ٩ (جـ) ٤ (د) ١



٦ مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{س^{٣} - ٨}{٤}$ هو ....

(أ) ع (ب) ع - {٨} (جـ) ع - {٢} (د) ع - {٤}

٧ إذا كانت د : ع⁺ ⟵ ع ، د (س) = $\frac{س^{٢} + ١}{س}$ فإن مجال الدالة هو ....

(أ) ع (ب) ع - {٠} (جـ) $ع^{+}$ (د) ع - {-١}

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت د ، ر كثيرتى حدود حيث د (س) = $(أ س + ٥)^{٢}$ ،

ر (س) = ٩ $س^{٢}$ + ٣٠ س + حـ - ٤ وكانت د (س) = ر (س)

أوجد قيمتى : أ ، حـ

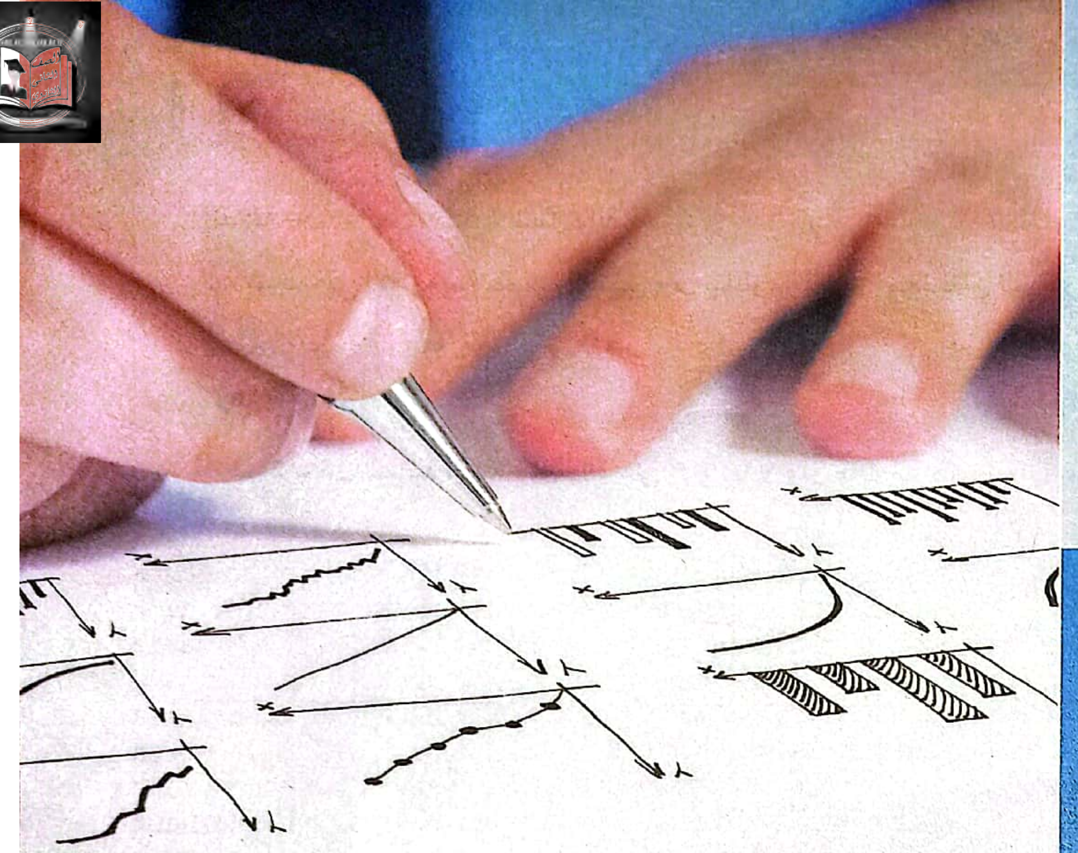
٣٠ ، ٢٩

٢ حدد قيم أ ، ب ، حـ التى تجعل د (س) = ر (س) حيث :

١ د (س) = (أ + ب) $س^{٣}$ + ٣ $س^{٢}$ - ٢ ، ر (س) = ٥ $س^{٣}$ + (أ + حـ) س + ب

٢ د (س) = (أ + ب) $س^{٣}$ - ٢ ، ر (س) = $س^{٣}$ + (أ + حـ) س + ب

٣ د (س) = (أ + ٢ ب) $س^{٣}$ - حـ س + ٤ ، ر (س) = ٧ $س^{٣}$ + ٥ س + (أ - ب)



الدرس

1

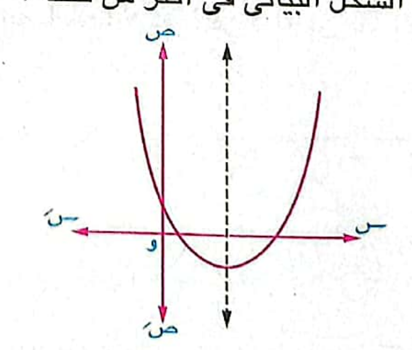
الدوال الحقيقية (تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد)

الدالة الحقيقية

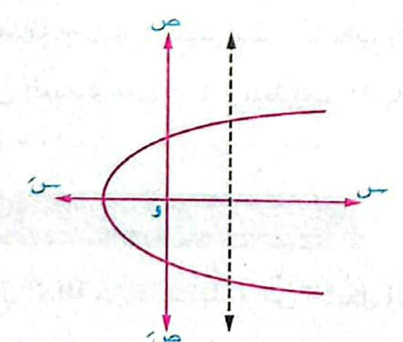
الدالة د : س ← ص تسمى دالة حقيقية إذا كان كل من المجال (س) والمجال المقابل (ص) هو مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية فعلية منها.

• **تحديد كون العلاقة من س ← ص دالة أم لا :**

1. **جبريًا** : العلاقة تكون دالة إذا كان كل قيمة للمتغير س ∈ س يناظرها قيمة واحدة فقط للمتغير ص ∈ ص
2. **بيانيًا (اختبار الخط الرأسى)** : العلاقة لا تمثل دالة إذا وجد خط مستقيم رأسى (يوازى محور الصادات) يقطع الشكل البيانى فى أكثر من نقطة :



التمثيل البيانى للعلاقة يمثل دالة من س ← ص



التمثيل البيانى للعلاقة لا يمثل دالة من س ← ص

مثال (1)

بين أيًا من العلاقتين الآتيتين تمثل دالة وأيهما لا تمثل دالة على ح مع ذكر السبب :

1. ص = $س^2$ + ٣
2. $ص^2$ = $س^2$ + ٩

الحل

1. العلاقة ص = $س^2$ + ٣ تمثل دالة لأن كل قيمة حقيقية للمتغير س يناظرها قيمة وحيدة فقط للمتغير ص

فمثلًا : عند س = ٣ ∴ ص = ١٢ ، وعند س = −٢ ∴ ص = ٧ ، .... وهكذا



٢ العلاقة $ص^2 = س^2 + ٩$ لا تمثل دالة

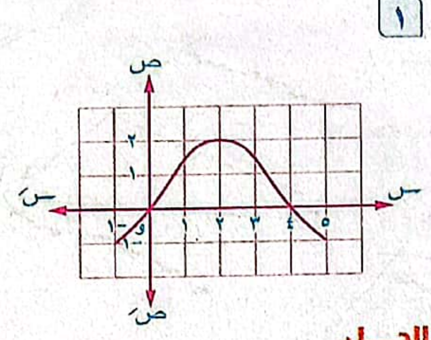
لأنه توجد على الأقل قيمة حقيقية للمتغير س يناظرها قيمتان مختلفتان للمتغير ص

فمثلًا : عند س = ٤ ∴ $ص^2 = ٢٥$ ∴ ص = ± ٥

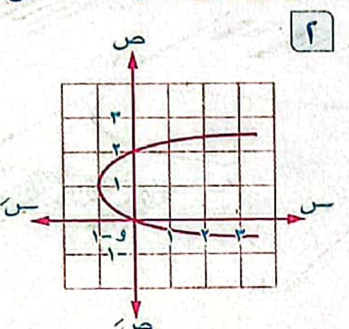
مثال ٢

بين أيًا من الأشكال البيانية الآتية يمثل دالة على ح وأيها لا يمثل دالة مع ذكر السبب :

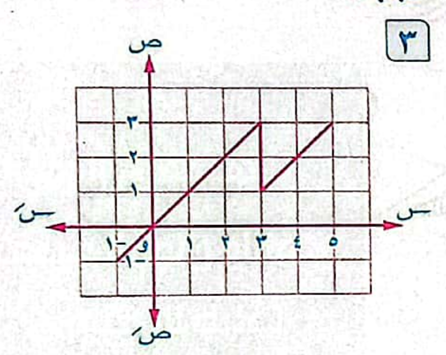
١



٢



٣



الحل

١ يمثل دالة لأن كل خط رأسى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة على الأكثر.

٢ لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسى يقطع المنحنى فى أكثر من نقطة واحدة.

٣ لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسى يمر بالنقطة (٣ ، ٠) ويقطع المنحنى فى أكثر من نقطة واحدة.

ملاحظتان

١ العلاقة ص = ٤ (تمثل بخط مستقيم أفقى يوازى محور السينات) تعبر عن دالة من س إلى ص لأن كل عنصر من س يرتبط بعنصر واحد فقط من ص

٢ العلاقة س = ٤ (تمثل بخط مستقيم رأسى يوازى محور الصادات) لا تعبر عن دالة من س إلى ص لأن العنصر س = ٤ ارتبط بعدد لانهائى من عناصر ص

تحديد مجال الدوال الحقيقية

يتعين مجال الدالة من قاعدتها أو من الشكل البيانى لها.

أولًا تعيين مجال الدالة إذا عُلمت قاعدتها

١ الدالة كثيرة الحدود

د : د (س) = $أ_0 + أ_1 س + أ_2 س^2 + ... + أ_ن س^ن$ حيث : $أ_0$ ، $أ_1$ ، $أ_2$ ، .... ، $أ_ن$ ثوابت حقيقية ، $أ_ن \in ح - \{٠\}$ كثيرة حدود من الدرجة ن

فإن مجال الدالة كثيرة الحدود يساوى ح ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.





فمثلاً : د : د (س) = ٣ كثيرة حدود ثابتة مجالها = ح

، د : د (س) = ٢ س + ١ ، س ≥ ١

كثيرة حدود من الدرجة الأولى مجالها =]− ∞ ، ١]

، د : د (س) = $س^٢$ − ٤ س + ٣ كثيرة حدود من الدرجة الثانية مجالها = ح

٢ الدالة الكسرية

إذا كانت د دالة كسرية حيث د (س) = $\frac{هـ (س)}{ى (س)}$ ، هـ ، ى كثيرتى حدود

فإن : مجال الدالة د هو ح − مجموعة أصفار المقام.

مثال ٣

عين مجال كل من الدوال الكسرية المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = $\frac{١}{س}$

٢ د (س) = $\frac{٣}{س − ٢}$

٣ د (س) = $\frac{س − ١}{٢ س^٢ + ٥ س}$

٤ د (س) = $\frac{س − ٣}{س^٢ − ٥ س + ٦}$

٥ د (س) = $\frac{س + ١}{س^٢ − ٤ س + ٤}$

٦ د (س) = $\frac{س}{س^٢ + ٢٥}$

الحل

١ المجال = ح − {٠}

٢ المجال = ح − {٢}

٣ بوضع ٢ $س^٢$ + ٥ س = ٠

∴ س (٢ س + ٥) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = $\frac{-٥}{٢}$

∴ المجال = ح − {٠ ، $\frac{-٥}{٢}$}

٤ بوضع $س^٢$ − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣

∴ المجال = ح − {٢ ، ٣}

٥ بوضع $س^٢$ − ٤ س + ٤ = ٠

∴ $(س − ٢)^٢$ = ٠

∴ س = ٢

∴ المجال = ح − {٢}

٦ بوضع $س^٢$ + ٢٥ = ٠ وهذه المعادلة ليس لها حل فى ح أى لا يوجد أصفار حقيقية للمقام

∴ المجال = ح

٣ دالة الجذر النونى

إذا كانت د (س) = $\sqrt[ن]{هـ (س)}$ حيث ن ∈ $ص^+$ ، ن > ١ ، هـ (س) كثيرة حدود

أولاً : عندما ن عدد فردى فإن مجال الدالة د هو ح

ثانيًا : عندما ن عدد زوجى فإن مجال الدالة د هو مجموعة قيم س التى تحقق هـ (س) ≥ ٠

حيث ن تسمى دليل الجذر.



مثال ٤

عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د(س) = $\sqrt{س + ٢}$

٢ د(س) = $\sqrt{س^٢ + ٥}$

٣ د(س) = $\sqrt{-٢س + ٣}$

٤ د(س) = $\sqrt[٣]{٩ - س^٢}$

٥ د(س) = $\sqrt{٤س^٢ - ١٢س + ٩}$

٦ د(س) = $\sqrt{س^٢ - ٤}$

٧ د(س) = $\frac{١}{\sqrt{٤ + ٣س - س^٢}}$

الحل

١ ∵ دليل الجذر عدد زوجي. ∴ الدالة معرفة بشرط س + ٢ ≥ ٠

∴ س ≥ -٢ ∴ المجال = [-٢ ، ∞[

٢ ∵ دليل الجذر عدد زوجي.

∴ الدالة معرفة بشرط س^٢ + ٥ ≥ ٠ وهو متحقق لكل قيم س الحقيقية ∴ المجال = ح

٣ ∵ دليل الجذر عدد زوجي. ∴ -٢س + ٣ ≥ ٠

∴ س ≤ $\frac{٣}{٢}$ ∴ المجال =]-∞ ، $\frac{٣}{٢}$]

٤ ∵ دليل الجذر عدد فردي. ∴ المجال = ح

٥ ∵ دليل الجذر عدد زوجي.

∴ الدالة معرفة بشرط أن : ٤س^٢ - ١٢س + ٩ ≥ ٠ ∴ (٢س - ٣)^٢ ≥ ٠

، ∵ مجموعة حل المتباينة = ح ∴ مجال الدالة د = ح

٦ ∵ دليل الجذر عدد زوجي.

∴ الدالة معرفة بشرط أن : س^٢ - ٤ ≥ ٠

∴ (س - ٢) (س + ٢) ≥ ٠

، ∵ مجموعة حل المتباينة = ح -]-٢ ، ٢[

∴ مجال الدالة د = ح -]-٢ ، ٢[

٧ ∵ الدالة تكون معرفة بشرط أن :

٤ + ٣س - س^٢ > ٠

∴ س^٢ - ٣س - ٤ < ٠

∴ (س - ٤) (س + ١) < ٠

، ∵ مجموعة حل المتباينة =]-١ ، ٤[

∴ مجال الدالة د =]-١ ، ٤[

تذكر أن

(حل متباينات الدرجة الثانية فى متغير واحد)

إذا كان : ل ، م حيث ل < م هما جذران حقيقيان للمعادلة :

أس^٢ + ب س + حـ = ٠ ، أ > ٠

فإن مجموعة الحل فى ح للمتباينة :

١ أس^٢ + ب س + حـ ≥ ٠ هى ح -]ل ، م[

٢ أس^٢ + ب س + حـ > ٠ هى ح - [ل ، م]

٣ أس^٢ + ب س + حـ ≤ ٠ هى [ل ، م]

٤ أس^٢ + ب س + حـ < ٠ هى]ل ، م[



٤ الدالة مجزأة المجال «ذات المقاطع»

هى دالة معرفة بقواعد مختلفة فى فترات مختلفة من مجالها ومجال هذه الدالة يساوى اتحاد الفترات المعرفة فيها قواعدها.

مثال ٥

عين مجال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين :

١ د (س) = { ٢ – س ، س < ٠ ؛ س – ٢ ، س > ٠ }

٢ د (س) = { س^{٢} ، –٢ ≤ س < ٠ ؛ س ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س > ١ }

الحل

١ الدالة د معرفة على فترتين كما يلى :

معرفة عندما س ∈]–∞ ، ٠[

، معرفة عندما س ∈]٠ ، ∞[

∴ مجال د =]–∞ ، ٠[∪]٠ ، ∞[= ح – {٠}



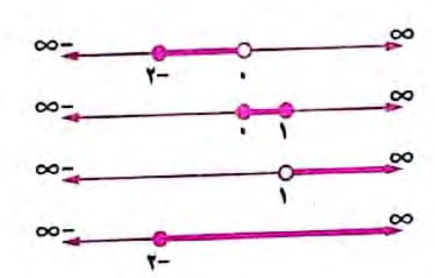
٢ الدالة د معرفة على ثلاث فترات كما يلى :

معرفة عندما س ∈ [–٢ ، ٠[

، معرفة عندما س ∈ [٠ ، ١]

، معرفة عندما س ∈]١ ، ∞[

∴ مجال د = [–٢ ، ٠[∪ [٠ ، ١] ∪]١ ، ∞[= [–٢ ، ∞[

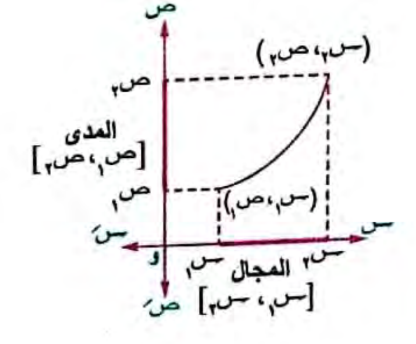


ثانياً تعيين مجال ومدى الدالة من الشكل البيانى لها

من الشكل البيانى للدالة يمكن استنتاج مجال ومدى الدالة فيكون :

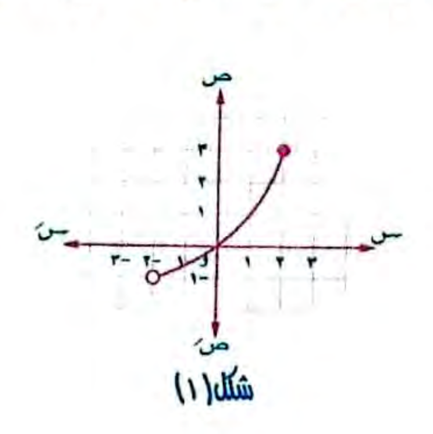
١ مجال الدالة هو مجموعة الإحداثيات السينية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.

٢ مدى الدالة هو مجموعة الإحداثيات الصادية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.

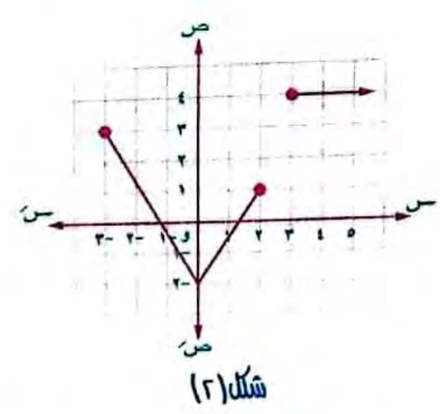


مثال ٦

عين مجال ومدى كل من الدالتين الممثلتين بالشكلين الآتيين :



شكل (١)

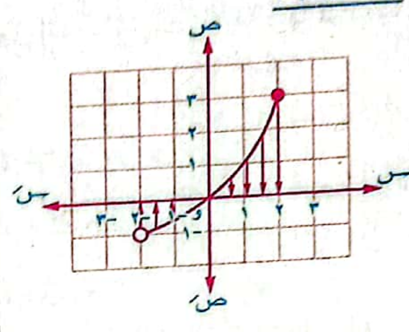


شكل (٢)



الحل

فى شكل (١) :



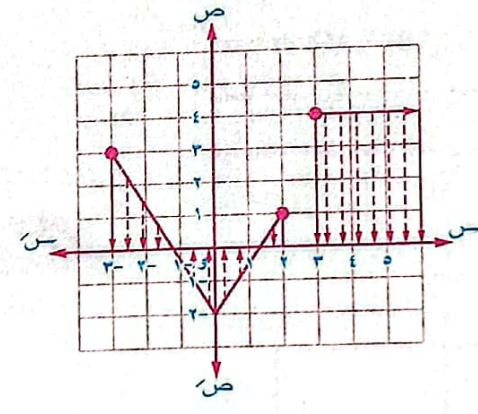
* الإحداثيات السينية لجميع نقط منحنى الدالة
هى الفترة]−٢ ، ٢]
∴ المجال =]−٢ ، ٢]

* الإحداثيات الصادية لجميع نقط منحنى الدالة
هى الفترة]−١ ، ٣]
∴ المدى =]−١ ، ٣]

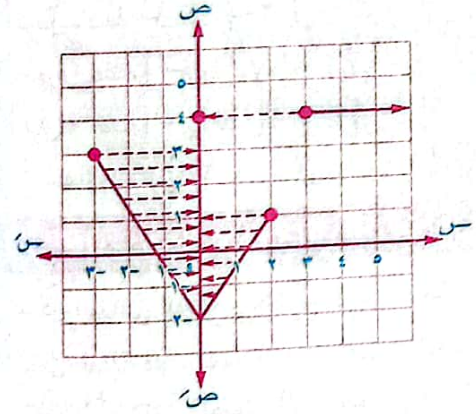
لاحظ أن

* الدائرة المفرغة عند النقطة (−٢ ، −١) توضح أن النقطة ∌ بيان الدالة وبالتالى −٢ ∌ مجال الدالة ، −١ ∌ مدى الدالة
* الدائرة المغلقة عند النقطة (٢ ، ٣) توضح أن النقطة ∋ بيان الدالة وبالتالى ٢ ∋ مجال الدالة ، ٣ ∋ مدى الدالة

فى شكل (٢) :



* الإحداثيات السينية لجميع نقط منحنى الدالة هى الفترتين [−٣ ، ٢] ، [٣ ، ∞[
∴ المجال = [−٣ ، ٢] ∪ [٣ ، ∞[



* ∵ الإحداثيات الصادية لجميع نقط الشعاع الأفقى هى ص = ٤ ، الإحداثيات الصادية لجزء المنحنى الآخر هى الفترة [−٢ ، ٣]
∴ المدى = [−٢ ، ٣] ∪ {٤}

تعيين اطراد الدالة من الشكل البيانى لها

* يقصد ببحث اطراد دالة ما تحديد الفترات التى تكون فيها الدالة تزايدية والفترات التى تكون فيها الدالة تناقصية والفترات التى تكون فيها الدالة ثابتة.



تعريف

إذا كانت الدالة د معرفة فى الفترة]أ ، ب[وكانت $س_1$ ، $س_2$ ∋]أ ، ب[

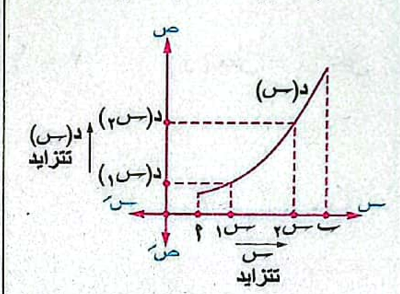
فيقال للدالة د إنها

① تزايدية فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

$س_2 > س_1$ ⟸

د $(س_2)$ > د $(س_1)$

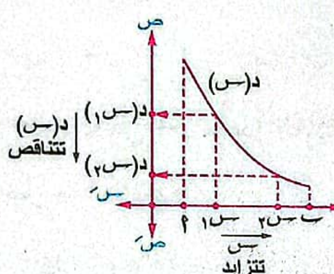


② تناقصية فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

$س_2 > س_1$ ⟸

د $(س_2)$ < د $(س_1)$

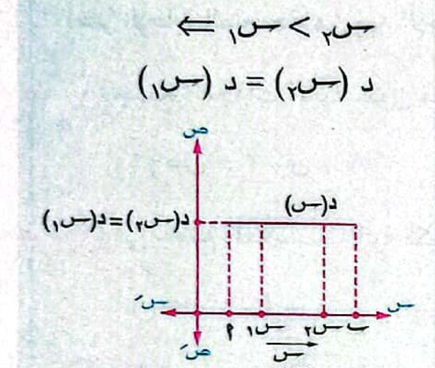


③ ثابتة فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان :

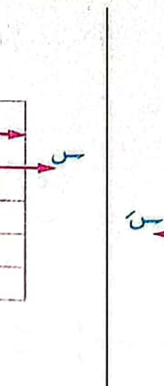
$س_2 > س_1$ ⟸

د $(س_2)$ = د $(س_1)$

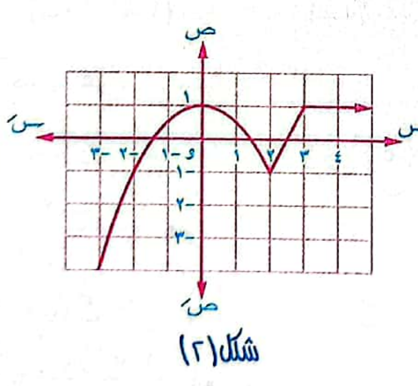


مثال ⑦

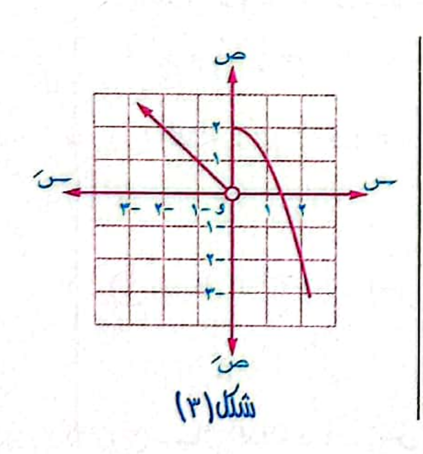
ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :



شكل(١)



شكل(٢)



شكل(٣)

الحــل

شكل(١) : الدالة تناقصية فى الفترة]− ∞ ، ٠[، تزايدية فى الفترة]٠ ، ٢[، ثابتة فى الفترة]٢ ، ∞[

شكل(٢) : الدالة تزايدية فى الفترة]− ∞ ، ٠[، تناقصية فى الفترة]٠ ، ٢[

، تزايدية فى الفترة]٢ ، ٣[، ثابتة فى الفترة]٣ ، ∞[

شكل(٣) : الدالة تناقصية فى كل من الفترتين]− ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[



تمارين 1 على الدوال الحقيقية (تحديد المجال والمدى - بحث الاطراد)



من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة ....

(أ) ص = ٢ س + ١ (ب) ص = س^٢ − ٤ (جـ) س = ص^٢ − ٢ (د) ص = جا س

② فى جميع العلاقات التالية تكون ص دالة فى س ماعدا العلاقة ....

(أ) ص = جتا س (ب) ص = ٢ (جـ) ص = س^٢ − ١ (د) ص^٢ = س^٢ + ١

③ إذا كانت : د (√س) = س^٢ فإن : د (٢) = ...

(أ) √٢ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ١٦

④ إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = (أ + ١) س + ب − ٢ وكانت :
د (س) تربط كل عدد حقيقي بنفسه فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (١ ، ٢) (ب) (٠ ، ٢) (جـ) (٠ ، ٢) (د) (٠ ، ٠)

⑤ الدالة د : د (س) = ٥ مجالها هو ....

(أ) ح (ب) ح^+ (جـ) {٥} (د) {٠ ، ٥}

⑥ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٢ س + ١}{س − ٢}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {−½} (جـ) ح − {−½ ، ٢} (د) ح − {٢}

⑦ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س^٢ + ١}{س^٢ + ٤ س}$ هو ....

(أ) ح − {١ ، −١} (ب) ح − {٠ ، −٤} (جـ) ح (د) ح − {٠ ، ٤}

⑧ مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{٥ + ٢ س}{س^٢ + س + ١}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٥} (جـ) ح − {٢} (د) ح − {−٢ ، −٥}

⑨ مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{٧}{س^٣ − س}$ هو ....

(أ) ح − {٣} (ب) ح − {٧} (جـ) ح − {٠ ، ١} (د) ح − {٠ ، ١ ، −١}

(١٠) مجال الدالة د حيث د : $ح^+ \longrightarrow ح$ ، د(س) = $\frac{س \quad ١}{٤ \quad س}$ هو ....

(أ) ح　　(ب) ح − {٠}　　(جـ) ح'　　(د) ح − {١}

(١١) إذا كان مجال الدالة د : د(س) = $\frac{٢}{س^٢ - ٦س + ك}$ هو ح − {٣} فإن : ك = ...

(أ) ٣　　(ب) ٩　　(جـ) ± ٩　　(د) ١٨

(١٢) مجال الدالة د : د(س) = $\sqrt{س - ٣}$ هو ....

(أ) ح　　(ب) ح − {٣}　　(جـ) [٣ ، ∞[　　(د)]−∞ ، ٣[

(١٣) مجال الدالة د حيث د(س) = $\sqrt{٤ - س}$ هو ....

(أ) [٤ ، ∞[　　(ب)]−∞ ، ٤]　　(جـ)]٤ ، ∞[　　(د)]−∞ ، ٤[

(١٤) مجال الدالة د : د(س) = $\sqrt[٣]{س - ٥}$ هو ....

(أ) [٥ ، ∞[　　(ب)]−∞ ، ٥]　　(جـ) ح　　(د) $ح^+$

(١٥) مجال الدالة د : د(س) = $\sqrt[٣]{٩ - س^٢}$ هو ....

(أ) [−٣ ، ٣]　　(ب) ح　　(جـ) ح − [−٣ ، ٣]　　(د)]−٣ ، ٣[

(١٦) مجال الدالة د : د(س) = $\frac{٥}{\sqrt{س - ٤}}$ هو ....

(أ) [٤ ، ∞[　　(ب)]٤ ، ∞[　　(جـ)]−∞ ، ٤[　　(د)]−∞ ، ٤]

(١٧) مجال الدالة د : د(س) = $\frac{١}{\sqrt{٩ - س^٢}}$ هو ....

(أ) ح　　(ب) ح −]−٣ ، ٣[　　(جـ) ح − {−٣ ، ٣}　　(د) [−٣ ، ٣]

(١٨) مجال الدالة د حيث د(س) = $\sqrt[٤]{س^٢ + ٤}$ هو ....

(أ) ح　　(ب) ح − {٤}　　(جـ) ح − {٠}　　(د) ح − {−٢ ، ٢}

(١٩) مجال الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{\sqrt[٣]{س^٢ - ٥س - ٦}}$ هو ....

(أ) ح − {٥}　　(ب) ح − {٦}　　(جـ) ح − {١ ، −٦}　　(د) ح − {−١ ، ٦}

(٢٠) إذا كانت م مساحة سطح دائرة وكان س طول نصف قطر الدائرة وكان م = π س^٢
أى أن المساحة دالة فى س ، فإن مجالها = ...

(أ) ح　　(ب) ح − {٠}　　(جـ) $ص^+$　　(د) $ح^+$

(٢١) إذا كان مجال الدالة د : د(س) = $\frac{١}{\sqrt{س - أ}}$ هو]−٣ ، ∞[فإن : أ = ...

(أ) ٣　　(ب) −٣　　(جـ) ± ٣　　(د) $\sqrt{٣}$



(٢٢) إذا كان مجال الدالة د : د $(\text{س}) = \frac{1}{\sqrt{\text{س}^2 + \text{أ}}}$ هو ح − $[-5 \text{ ، } 5]$ فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) −٢٥ (ج) −٥ (د) ٢٥

(٢٣) إذا كان مجال الدالة د : د $(\text{س}) = \frac{1}{\sqrt{\text{س}^2 + \text{أ}}}$ هو ح فإن : أ لايمكن أن تساوى ....

(أ) ٥ (ب) $\sqrt{4}$ (ج) صفر (د) ٩

(٢٤) إذا كانت : د $(\text{س}) = \begin{cases} -4\text{س} + 3 & \text{، س} < 3 \\ -\text{س}^3 & \text{، } 3 \le \text{س} \le 8 \\ 3\text{س}^2 + 1 & \text{، س} > 8 \end{cases}$ فإن : د (10) = ...

(أ) −٣٧ (ب) −١٠٠٠ (ج) ٣٠١ (د) ٤٣

(٢٥) مجال الدالة د حيث د $(\text{س}) = \begin{cases} -2 & \text{، س} < 2 \\ 3 & \text{، س} > 2 \end{cases}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − $\{3\}$ (ج) ح − $\{-2\}$ (د) ح − $\{2\}$

(٢٦) مجال الدالة د حيث د $(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} & \text{، } 0 \le \text{س} \le 1 \\ 2 - \text{س} & \text{، } 1 < \text{س} \le 2 \end{cases}$ هو ....

(أ) ح − $\{1\}$ (ب) $[0 \text{ ، } 2]$ (ج) ح − $\{0 \text{ ، } 2\}$ (د) $]0 \text{ ، } 2[$

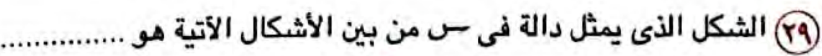
(٢٧) مجال الدالة د : د $(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 2 & \text{، } -2 \le \text{س} < 0 \\ \text{س} - 1 & \text{، س} > 0 \end{cases}$ هو ....

(أ) ح (ب) $[-2 \text{ ، } 0]$

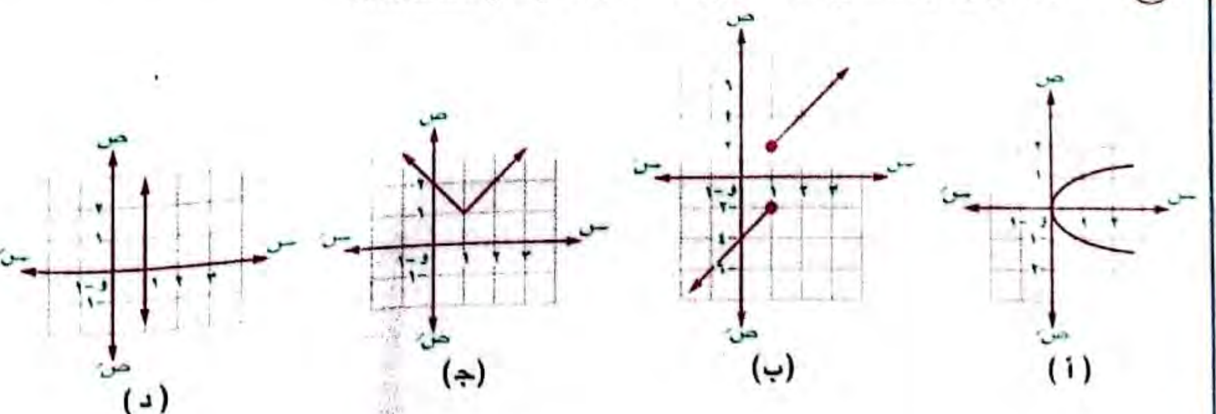
(ج) $[-2 \text{ ، } \infty[- \{0\}$ (د) $[-2 \text{ ، } \infty[$

(٢٨) مجال الدالة د : د $(\text{س}) = \begin{cases} 0 & \text{، س} \le 0 \\ 1 & \text{، س} > 3 \end{cases}$ هو ....

(أ) $\{0 \text{ ، } 1\}$ (ب) $[0 \text{ ، } 3[$ (ج) ح (د) ح − $]0 \text{ ، } 3]$



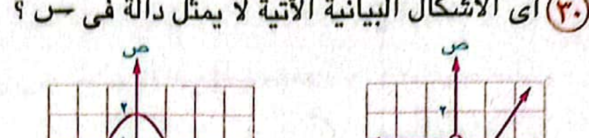
(٢٩) الشكل الذى يمثل دالة فى س من بين الأشكال الآتية هو ....

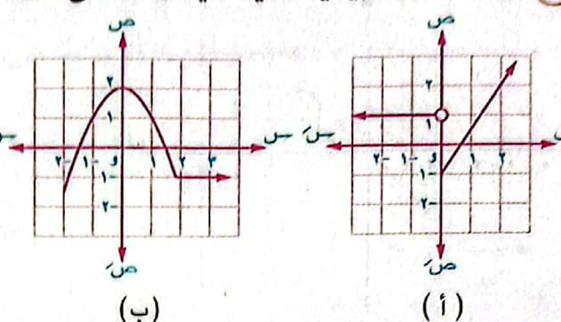


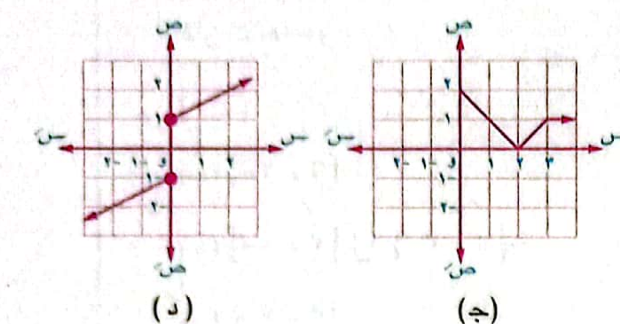




(٣٠) أى الأشكال البيانية الآتية لا يمثل دالة فى س ؟







(أ) (ب) (جـ) (د)

(٣١) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن مجالها هو ....

(أ) ح − {−٤ ، −١}

(ب)]−٤ ، −١[

(جـ) [−٤ ، ∞[

(د) [−٤ ، ∞[− {−١}

(٣٢) الشكل المقابل يمثل دالة فى س مجالها ....

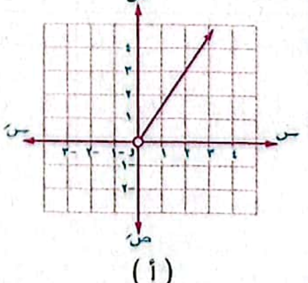
(أ) ح

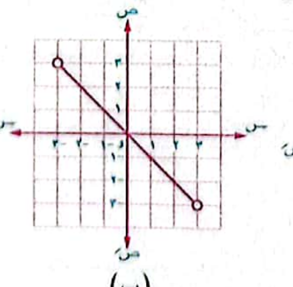
(ب) ح −]−٢ ، ٢[

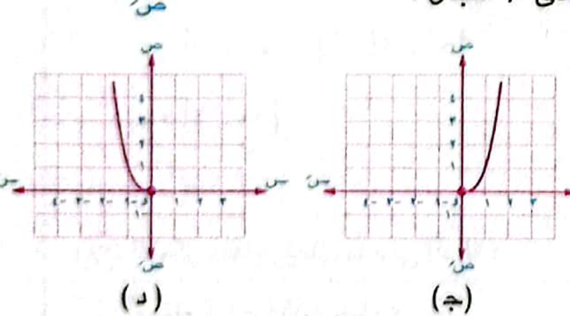
(جـ) ح − [−٢ ، ٢]

(د) ح − {٠}

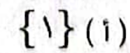
(٣٣) أى من الأشكال الآتية تمثل منحنى دالة يكون فيه المدى ≠ المجال ؟



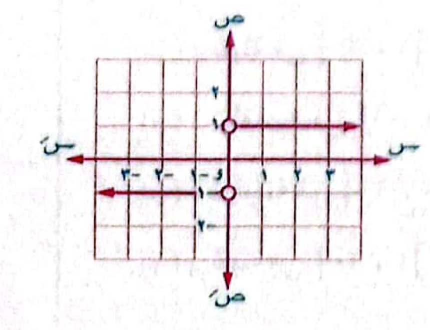




(أ) (ب) (جـ) (د)



(٣٤) مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....

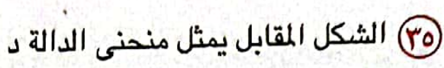


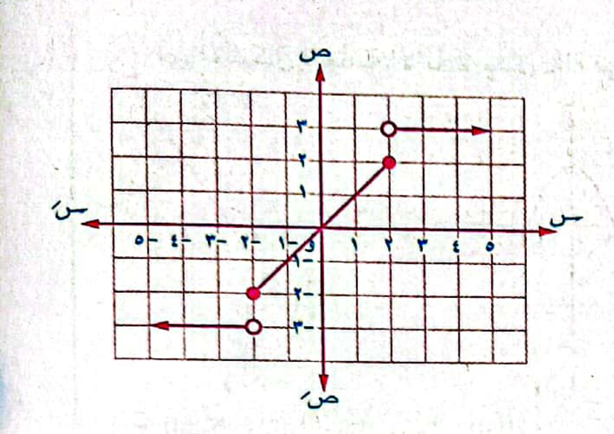
(أ) {١}

(ب) {١ ، −١}

(جـ) {−١}

(د) ح − {٠}





(٣٥) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

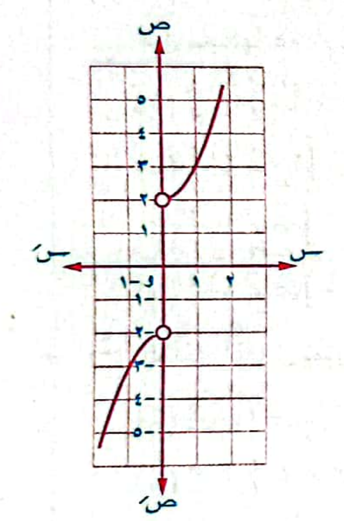
فإن مداها هو ....

(أ) ح

(ب) [–٢ ، ٢]

(جـ) [–٢ ، ٢] ∪ {–٣ ، ٣}

(د)]–٣ ، ٣[



(٣٦) فى الشكل المقابل :

أولاً : مدى الدالة هو ....

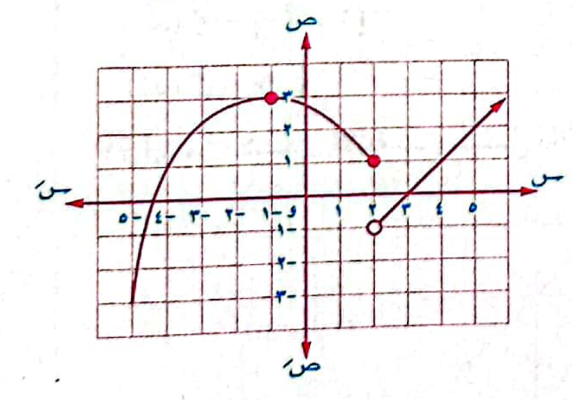
(أ) ح – {٠}　　(ب) ح – [–٢ ، ٢]

(جـ) ح　　(د) [–٢ ، ٢]

ثانيًا : الدالة تكون متزايدة فى ....

(أ)]–∞ ، ٠[فقط.　　(ب)]٠ ، ∞[فقط.

(جـ)]–∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[　　(د) ح – [–٢ ، ٢]



(٣٧) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

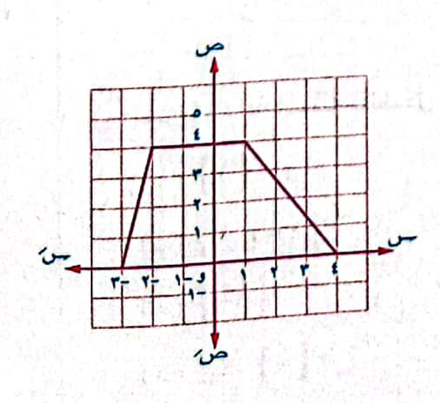
فإن الدالة تكون تزايدية فى ....

(أ)]–∞ ، –١[

(ب)]–∞ ، –١[،]٢ ، ∞[

(جـ)]٢ ، ∞[

(د)]–١ ، ٢[



(٣٨) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

أى العبارات الآتية خطأ ؟

(أ) د ثابتة فى]–٢ ، ١[

(ب) د تناقصية فى]١ ، ٤[

(جـ) د تزايدية فى]–٣ ، –٢[

(د) د ثابتة فى]–٣ ، ٤[

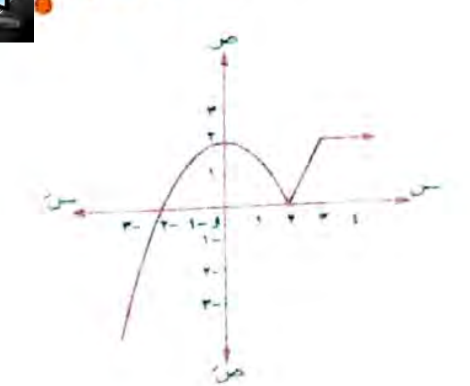
(٣٩) فى الشكل المقابل :

إذا كانت الدالة متناقصة فى]٠ ، أ[وثابتة فى]ب ، ∞[

فإن : أ − ب = ...

(أ) ٥ (ب) ١

(جـ) −١ (د) ٣

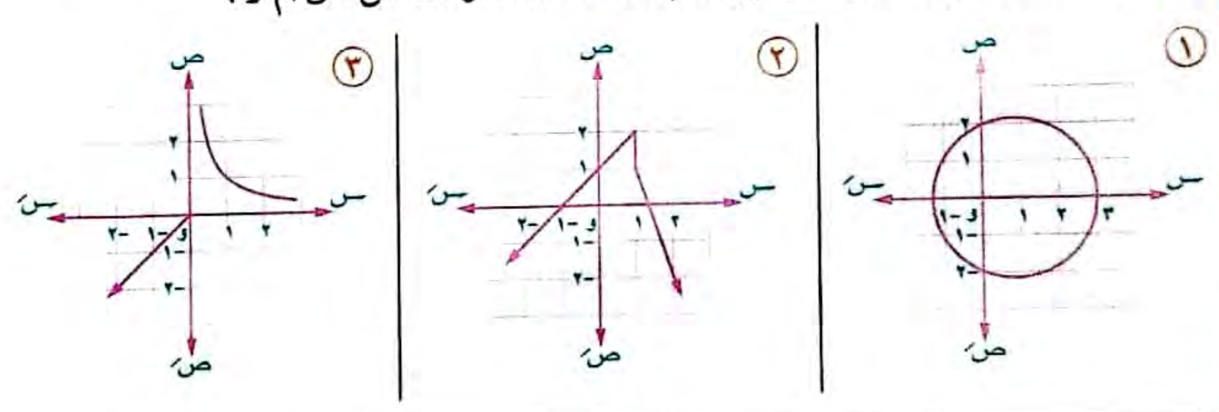


ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كان س ، ص متغيرين حقيقيين فحدد أى علاقة مما يأتى تمثل دالة فى س وأيها لا :

(١) ص = ٢ س + ٥
(٢) ص^{٢} = س + ٤
(٣) ص = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤}$
(٤) (س − ص)^{٢} = ٥
(٥) ص^{٣} − س^{٢} = ٢
(٦) ص = ٢
(٧) س = ٣
(٨) ص = ٣ جا س
(٩) س ص + ص = ٢ س + ٢

٢ فى كل شكل من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت ص تمثل دالة فى س أم لا :



٣ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

(١) د(س) = $\frac{\text{٢ س + ٣}}{\text{س}^{٢} - \text{٣ س} + ٢}$

(٢) د(س) = $\frac{٨}{\text{س}^{٢} - \text{٦ س} + ٩}$

(٣) د(س) = $\frac{\text{س} + ٣}{\text{٣ س}^{٢} - \text{س} - ٢}$

(٤) د(س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٣} + ١}$

٤ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

(١) د(س) = $\frac{٤}{\sqrt[٣]{\text{٢ س} - ٥}}$

(٢) د(س) = $\frac{٣}{\sqrt{\text{س} - ٣}}$

(٣) د(س) = $\frac{٢}{\sqrt{١ - \text{س}}}$

(٤) د(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ١٦}$

(٥) د(س) = $\frac{٥}{\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}}$

(٦) د(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{٢ س} + ٥}$

(٧) د(س) = $\frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{٤ س} + ٤}}$

(٨) د(س) = $\frac{٥}{\sqrt{\text{س}} - ١}$

٥ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

① $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -٣ & \text{، س} < ٣ \\ ٥ - \text{س} & \text{، س} \geq ٣ \end{cases}$

② $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ - ١ & \text{، س} \leq ٢ \\ -٥ & \text{، } ٢ < \text{س} < ٤ \end{cases}$

③ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س} & \text{، س} \in [٠ ، ٢] \\ ٦ & \text{، س} \in]٢ ، ٤[\\ \text{س} + ٢ & \text{، س} \in [٤ ، ٦] \end{cases}$

٦ عين مجال ومدى ثم ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :

① ② ③

④ ⑤ ⑥

⑦ ⑧ ⑨

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

❖ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت العلاقة بين مجموع قياسات زوايا المضلع الداخلة (ص) ، عدد أضلاع المضلع (س) هى ص = π (س − ٢) فإن مجال الدالة ص = ...

(أ) $ح^{+}$ (ب) ح − {٢} (جـ) $ص^{+}$ (د) $ص^{+}$ − {١ ، ٢}

② مجال الدالة د : د(س) = $\frac{س}{\sqrt[3]{س} - ٢}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٢} (جـ) ح − {٠ ، ٢} (د) ح − {٨}

③ مجال الدالة د : د(س) = $\frac{س}{\sqrt{٣س} - س}$ هو ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠]

(جـ)]٠ ، ∞[− {١} (د)]٠ ، ∞[− {٣}

④ مجال الدالة د : د(س) = $\frac{٥}{\sqrt{س - ١} - ٣}$ هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[− {٣}

(جـ) [١ ، ∞[− {١٠} (د) [−٣ ، ∞[

⑤ مجال الدالة د : د(س) = $\frac{٧}{\sqrt{س - ١} + ٣}$ هو ....

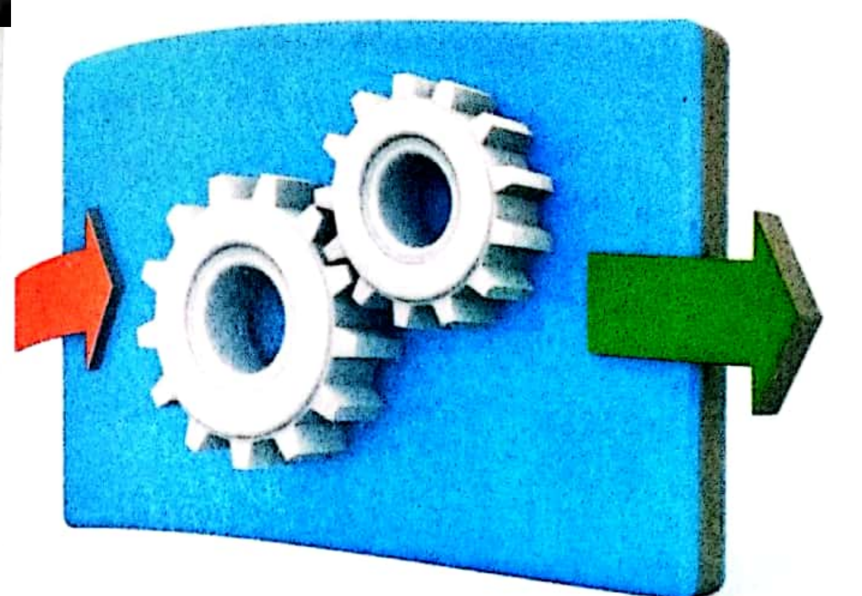
(أ) [١ ، ∞[(ب) [١ ، ∞[− {−٣}

(جـ) [١ ، ∞[− {١٠} (د) [٣ ، ∞[

⑥ مجال الدالة د : د(س) = $\sqrt{٦س - ٩ - س^{2}}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٣} (جـ) [٣ ، ∞[(د) {٣}





الدرس

2

العمليات على الدوال - تركيب دالتين

* إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ دالتين مجالاهما $م_١$ ، $م_٢$ فإن :

١ $(د_١ \pm د_٢)(س) = د_١(س) \pm د_٢(س)$ ، مجال $(د_١ \pm د_٢)$ هو $م_١ \cap م_٢$

٢ $(د_١ \times د_٢)(س) = د_١(س) \times د_٢(س)$ ، مجال $(د_١ \times د_٢)$ هو $م_١ \cap م_٢$

٣ $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)(س) = \frac{د_١(س)}{د_٢(س)}$ حيث $د_٢(س) \neq ٠$

، مجال $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$ هو $(م_١ \cap م_٢) - ص(د_٢)$ حيث $ص(د_٢)$ مجموعة أصفار $د_٢$

ونلاحظ أنه فى جميع العمليات على الدوال يكون مجال الدالة الناتجة يساوى تقاطع مجالى الدالتين مع استثناء القيم التى تجعل المقام يساوى الصفر فى عملية القسمة.

مثال ١

إذا كانت $د : ح^+ \longrightarrow ح$ حيث $د(س) = ٢س^٢ - ٧س + ٥$

، $ر :]-\infty ، ٤] \longrightarrow ح$ حيث $ر(س) = ٢س - ٥$ **أوجد :**

١ $(د + ر)(س)$ ٢ $(د - ر)(س)$ ٣ $(د \times ر)(س)$ ٤ $\left(\frac{د}{ر}\right)(س)$

وعين مجال كل منهم ثم احسب قيمة كل من :

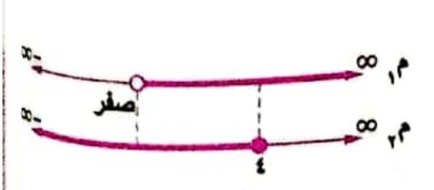
$(د + ر)(٣)$ ، $(د - ر)(٠)$ ، $(د \times ر)(-٣)$ ، $\left(\frac{د}{ر}\right)(١)$

الحل

مجال $د = م_١ = ح^+ =]٠ ، \infty[$

، مجال $ر = م_٢ =]-\infty ، ٤]$

$\therefore$ المجال المشترك للدالتين $= م_١ \cap م_٢ = ح^+ \cap]-\infty ، ٤] =]٠ ، ٤]$





١ (د + ر) (س) = (٢ س^{٢} – ٧ س + ٥) + (٢ س – ٥) = ٢ س^{٢} – ٥ س

، المجال =]٠ ، ٤[

٢ (د – ر) (س) = (٢ س^{٢} – ٧ س + ٥) – (٢ س – ٥) = ٢ س^{٢} – ٩ س + ١٠

، المجال =]٠ ، ٤[

٣ (د × ر) (س) = (٢ س^{٢} – ٧ س + ٥) (٢ س – ٥)

= ٤ س^{٣} – ٢٤ س^{٢} + ٤٥ س – ٢٥ ، المجال =]٠ ، ٤[

٤ $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (س) = $\frac{\text{٢ س}^{٢}\text{ – ٧ س + ٥}}{\text{٢ س – ٥}}$ = $\frac{\text{(٢ س – ٥) (س – ١)}}{\text{٢ س – ٥}}$ = س – ١

، المجال =]٠ ، ٤[– $\left\{\frac{٥}{٢}\right\}$

القيم العددية

- (د + ر) (٣) = ٢ × ٩ – ٥ × ٣ = ٣
- (د – ر) (٠) غير معرفة لأن صفر ∌]٠ ، ٤[
- (د × ر) (–٣) غير معرفة لأن –٣ ∌]٠ ، ٤[
- $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (١) = صفر

مثال ٢

إذا كانت د ، ر دالتين حيث د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س + ١}}$ ، ر (س) = $\frac{\text{س + ١}}{\text{س – ٢}}$ **فأوجد :**

١ (د + ر) (س) ثم احسب قيمة (د + ر) (٣)

٢ (د – ر) (س) ثم احسب قيمة (د – ر) (٢)

٣ (د × ر) (س) ثم احسب قيمة (د × ر) (٣)

٤ $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (س) ثم احسب قيمة $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (–١) ، $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (١)

◂ **الحـــل**

مجال د = م$_{١}$ = ح – {–١} ، مجال ر = م$_{٢}$ = ح – {٢}

∴ المجال المشترك للدالتين د ، ر = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح – {–١ ، ٢}

١ (د + ر) (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س + ١}}$ + $\frac{\text{س + ١}}{\text{س – ٢}}$ = $\frac{\text{س (س – ٢) + (س + ١)}^{٢}}{\text{(س + ١) (س – ٢)}}$

= $\frac{\text{س}^{٢}\text{ – ٢ س + س}^{٢}\text{ + ٢ س + ١}}{\text{(س + ١) (س – ٢)}}$ = $\frac{\text{٢ س}^{٢}\text{ + ١}}{\text{(س + ١) (س – ٢)}}$

، المجال = ح – {–١ ، ٢} ، (د + ر) (٣) = $\frac{\text{٢ × ٩ + ١}}{\text{٤ × ١}}$ = $\frac{١٩}{٤}$





٢ $(\text{د} - \text{ر})(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+١} - \frac{\text{س}+١}{\text{س}-٢} = \frac{\text{س}(\text{س}-٢) - (\text{س}+١)^{٢}}{(\text{س}+١)(\text{س}-٢)}$

$= \frac{-٤\text{س} - ١}{(\text{س}+١)(\text{س}-٢)}$ ، المجال = ح − {−١ ، ٢}

، (د − ر) (٢) غير معرفة لأن ٢ ∉ مجال (د − ر)

٣ $(\text{د} \times \text{ر})(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+١} \times \frac{\text{س}+١}{\text{س}-٢} = \frac{\text{س}}{\text{س}-٢}$

، المجال = ح − {−١ ، ٢} ، (د × ر) (٣) = $\frac{٣}{١}$ = ٣

٤ $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+١} \div \frac{\text{س}+١}{\text{س}-٢} = \frac{\text{س}}{\text{س}+١} \times \frac{\text{س}-٢}{\text{س}+١} = \frac{\text{س}(\text{س}-٢)}{(\text{س}+١)^{٢}}$

، المجال = ح − {−١ ، ٢}

، $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (−١) غير معرفة لأن −١ ∉ مجال $\frac{\text{د}}{\text{ر}}$ ، $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)(١) = \frac{١ \times -١}{٢^{٢}} = \frac{-١}{٤}$

مثال ٣

إذا كانت : $\text{د}_{١}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}-٢}$ ، $\text{د}_{٢}(\text{س}) = \sqrt{٥-\text{س}}$ ، $\text{د}_{٣}(\text{س}) = \text{س} - ٣$

فأوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية :

١ $(\text{د}_{١} + \text{د}_{٢})$ ٢ $(\text{د}_{٢} - \text{د}_{٣})$ ٣ $(\text{د}_{١} \times \text{د}_{٢})$ ٤ $\left(\frac{\text{د}_{٢}}{\text{د}_{٣}}\right)$ ٥ $\left(\frac{\text{د}_{٣}}{\text{د}_{١}}\right)$

الحل

مجال $\text{د}_{١}$ = $\text{م}_{١}$ = [٢ ، ∞[

، مجال $\text{د}_{٢}$ = $\text{م}_{٢}$ =]−∞ ، ٥]

، مجال $\text{د}_{٣}$ = $\text{م}_{٣}$ = ح



١ $(\text{د}_{١} + \text{د}_{٢})(\text{س}) = \sqrt{\text{س}-٢} + \sqrt{٥-\text{س}}$ ، المجال = [٢ ، ٥]

٢ $(\text{د}_{٢} - \text{د}_{٣})(\text{س}) = \sqrt{٥-\text{س}} + ٣ - \text{س}$ ، المجال =]−∞ ، ٥]

٣ $(\text{د}_{١} \times \text{د}_{٢})(\text{س}) = \sqrt{\text{س}-٢} \times \sqrt{٥-\text{س}}$ ، المجال = [٢ ، ٥]

٤ $\left(\frac{\text{د}_{٢}}{\text{د}_{٣}}\right)(\text{س}) = \frac{\sqrt{٥-\text{س}}}{\text{س}-٣}$ ، المجال =]−∞ ، ٥] − {٣}

٥ $\left(\frac{\text{د}_{٣}}{\text{د}_{١}}\right)(\text{س}) = \frac{\text{س}-٣}{\sqrt{\text{س}-٢}}$ ، المجال =]٢ ، ∞[



تركيب الدوال

إذا كانت : د ، ر دالتين وكان مدى الدالة ر تقاطع مجال الدالة د لا يساوى ∅

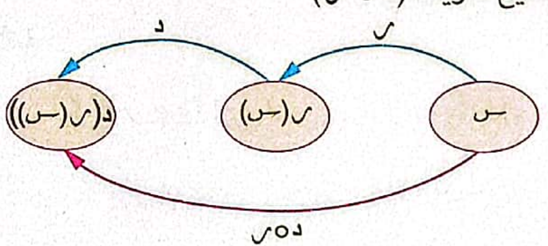
فإن تركيب الدالة د مع الدالة ر ينتج دالة جديدة يرمز لها بالرمز (د ∘ ر) وتقرأ [د تركيب ر] أو [د بعد ر]

ويكون (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) وتطبق قاعدة الدالة ر أولاً ثم قاعدة الدالة د

حيث : مجال (د ∘ ر) يتكون من قيم س التى فى مجال الدالة ر والتى تجعل ر (س) فى مجال الدالة د

أى أن مجال (د ∘ ر) = {س : س ∈ مجال ر ، ر (س) ∈ مجال د}

والشكل التالى يساعدنا فى توضيح تعريف (د ∘ ر)



مثال توضيحى

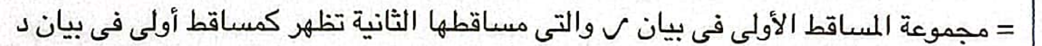
إذا كانت : ر ، د دالتين معرفتين كمجموعة من الأزواج المرتبة كالتالى :

بيان ر = {(١ ، ٥) ، (٢ ، ١٠) ، (٣ ، ١٥)}

، بيان د = {(١٠ ، ٢٠) ، (١٥ ، ٣٠) ، (١٦ ، ٣٢)}

فإن : مجال ر = {١ ، ٢ ، ٣} ، مجال د = {١٠ ، ١٥ ، ١٦}

مجال (د ∘ ر) = {س : س ∈ مجال ر ، ر (س) ∈ مجال د}


= مجموعة المساقط الأولى فى بيان ر والتى مساقطها الثانية تظهر كمساقط أولى فى بيان د

∴ مجال (د ∘ ر) = {٢ ، ٣} ، مدى (د ∘ ر) = {٢٠ ، ٣٠}

، بيان (د ∘ ر) = {(٢ ، ٢٠) ، (٣ ، ٣٠)}

مثال ٤

إذا كانت : د (س) = $س^٢$ ، ر (س) = س + ١ **فأوجد :**

[١] (د ∘ ر) (١) [٢] (ر ∘ د) (١) [٣] (د ∘ د) (−١) [٤] (ر ∘ ر) (−١)

الحل

[١] ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) ∴ (د ∘ ر) (١) = د (ر (١))

، ∵ ر (١) = ١ + ١ = ٢ ∴ (د ∘ ر) (١) = د (٢) = $٢^٣$ = ٨



٢ ∵ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))
، ∵ د (١) = ١^{٣} = ١
∴ (ر ∘ د) (١) = ر (د (١))
∴ (ر ∘ د) (١) = ر (١) = ١ + ١ = ٢

٣ ∵ (د ∘ د) (س) = د (د (س))
، ∵ د (−١) = (−١)^{٣} = −١
∴ (د ∘ د) (−١) = د (د (−١))
∴ (د ∘ د) (−١) = د (−١) = −١

٤ ∵ (ر ∘ ر) (س) = ر (ر (س))
، ∵ ر (−١) = −١ + ١ = ٠
∴ (ر ∘ ر) (−١) = ر (ر (−١))
∴ (ر ∘ ر) (−١) = ر (٠) = ٠ + ١ = ١

مثال ٥

إذا كانت : د (س) = ٢ س + ١ ، ر (س) = س^{٢} − ٣

فأوجد كلًا من تركيبات الدوال الآتية :

١ (د ∘ ر) (س) ٢ (ر ∘ د) (س) ٣ (د ∘ د) (س)

الحـــل

١ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) وبوضع ر (س) بدلًا من س فى الدالة د
∴ (د ∘ ر) (س) = ٢ ر (س) + ١ وبوضع ر (س) = س^{٢} − ٣
∴ (د ∘ ر) (س) = ٢ (س^{٢} − ٣) + ١ وبتبسيط المقدار الناتج
∴ (د ∘ ر) (س) = ٢ س^{٢} − ٦ + ١ = ٢ س^{٢} − ٥

٢ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) وبوضع د (س) بدلًا من س فى الدالة ر
∴ (ر ∘ د) (س) = (د (س))^{٢} − ٣ وبوضع د (س) = ٢ س + ١
∴ (ر ∘ د) (س) = (٢ س + ١)^{٢} − ٣ وبتبسيط المقدار الناتج
∴ (ر ∘ د) (س) = ٤ س^{٢} + ٤ س + ١ − ٣ = ٤ س^{٢} + ٤ س − ٢

٣ (د ∘ د) (س) = د (د (س))
∴ (د ∘ د) (س) = ٢ (د (س)) + ١
∴ (د ∘ د) (س) = ٢ (٢ س + ١) + ١
∴ (د ∘ د) (س) = ٤ س + ٢ + ١ = ٤ س + ٣

ملاحظة

فى المثال السابق لاحظ أن : (د ∘ ر) (س) ≠ (ر ∘ د) (س)

ومن ذلك يمكن استنتاج أن : د ∘ ر ≠ ر ∘ د

أى أن عملية تركيب دالتين ليست عملية إبدالية.





مثال ٦

إذا كانت د دالة خطية وكانت (د ٥ د) (س) = ٤ س + ٣ أوجد : د (س)

الحـل

نفرض أن : د (س) = أ س + ب

، ∵ (د ٥ د) (س) = ٤ س + ٣

∴ د (أ س + ب) = ٤ س + ٣

∴ أ^٢ س + أ ب + ب = ٤ س + ٣

، أ ب + ب = ٣

، عند أ = ٢

، عند أ = -٢

∴ د (د (س)) = ٤ س + ٣

∴ أ (أ س + ب) + ب = ٤ س + ٣

∴ أ^٢ = ٤ ومنها أ = ±٢

∴ ب = $\frac{٣}{أ + ١}$

∴ ب = ١

∴ ب = -٣

∴ د (س) = ٢ س + ١ أو د (س) = -٢ س - ٣

مثال ٧

إذا كانت د (س) = ٢ س + ١ ، (د ٥ ر) (س) = س^٢ + س - ١ أوجد : ر (س)

الحـل

∵ (د ٥ ر) (س) = س^٢ + س - ١

∴ ٢ ر (س) + ١ = س^٢ + س - ١

∴ ر (س) = $\frac{١}{٢}$ س^٢ + $\frac{١}{٢}$ س - ١

∴ د (ر (س)) = س^٢ + س - ١

∴ ٢ ر (س) = س^٢ + س - ٢

مثال ٨

إذا كانت د : ح ← ح ، د (س) = ٥ س - ٢ ، ر (س) = $\begin{cases} س + ١ ، س > ٣ \\ ٢ س ، س \leq ٣ \end{cases}$

أوجد : [١] (د ٥ ر) (٤) [٢] (ر ٥ د) (١)

الحـل

[١] (د ٥ ر) (٤) = د (ر (٤)) (لاحظ أن : ر (٤) = ٤ + ١ = ٥)

= د (٥) = ٥ × ٥ - ٢ = ٢٣

[٢] (ر ٥ د) (١) = ر (د (١)) (لاحظ أن : د (١) = ٥ × ١ - ٢ = ٣)

= ر (٣) = ٢ × ٣ = ٦



لتعيين مجال الدالة (د ∘ ر) نتبع الخطوات التالية :

١ نوجد $م_1$ = مجال الدالة ر

٢ نوجد $م_2$ = قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال

٣ نوجد $م_1 \cap م_2$ وهو مجال (د ∘ ر)

مثال ٩

أوجد مجال (د ∘ ر) إذا كان : د (س) = $\frac{٣}{س - ٤}$ ، ر (س) = $\frac{٤}{س + ٢}$

الحـــل

لإيجاد مجال (د ∘ ر) نتبع الخطوات الآتية :

* نوجد مجال ر وليكن $م_1$:

∵ ر (س) = $\frac{٤}{س + ٢}$ ∴ $م_1$ = مجال ر = ح − {−٢}

* نوجد قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال الدالة د ولتكن $م_2$:

∵ د (س) = $\frac{٣}{س - ٤}$ ∴ د (ر (س)) = $\frac{٣}{ر (س) - ٤}$

∴ ر (س) فى مجال د إذا كان : ر (س) ≠ ٤

، عندما ر (س) = ٤ ∴ $\frac{٤}{س + ٢}$ = ٤

∴ س + ٢ = ١ ∴ س = −١

∴ $م_2$ = قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د = ح − {−١}

* نوجد مجال (د ∘ ر) = $م_1 \cap م_2$ = (ح − {−٢}) ∩ (ح − {−١}) = ح − {−٢ ، −١}

ويمكن اختصار الخطوات السابقة فى المخطط التالى :

د [ر (س)] = $\frac{٣}{\frac{٤}{س + ٢} - ٤}$

س + ٢ ≠ ٠

∴ س ≠ −٢

$\frac{٤}{س + ٢}$ − ٤ ≠ ٠

∴ $\frac{٤}{س + ٢}$ ≠ ٤

∴ س + ٢ ≠ ١

∴ س ≠ −١

لاحظ أنه

فى حالة استخدام هذا المخطط لإيجاد المجال نكتب د [ر (س)] كما هى دون تبسيط.

∴ مجال (د ∘ ر) = ح − {−٢ ، −١}





مثال ١٠

إذا كانت : $د(س) = \sqrt{س - ٢}$ ، $ر(س) = \sqrt{٦ - س}$

فأوجد مجال كل من الدالتين الآتيتين : [١] د ∘ ر [٢] ر ∘ د

الحل

[١] $(د ∘ ر)(س) = د(ر(س)) = \sqrt{ر(س) - ٢} = \sqrt{\sqrt{٦ - س} - ٢}$

، ∵ $ر(س) = \sqrt{٦ - س}$ وبوضع $٦ - س \geq ٠$ ∴ $س \leq ٦$

∴ $م_١$ = مجال ر = $]-\infty ، ٦]$

وبوضع $ر(س) - ٢ \geq ٠$ ∴ $\sqrt{٦ - س} - ٢ \geq ٠$

∴ $\sqrt{٦ - س} \geq ٢$ (بتربيع الطرفين)

∴ $٦ - س \geq ٤$ ∴ $س \leq ٢$

∴ $م_٢$ = قيم س التى تجعل ر(س) فى مجال د = $]-\infty ، ٢]$

∴ مجال $(د ∘ ر) = م_١ \cap م_٢ =]-\infty ، ٦] \cap]-\infty ، ٢] =]-\infty ، ٢]$

[٢] $(ر ∘ د)(س) = ر(د(س)) = \sqrt{٦ - د(س)} = \sqrt{٦ - \sqrt{س - ٢}}$

، ∵ $د(س) = \sqrt{س - ٢}$ وبوضع $س - ٢ \geq ٠$

∴ $س \geq ٢$ ∴ $م_١$ = مجال د = $[٢ ، \infty[$

وبوضع $٦ - \sqrt{س - ٢} \geq ٠$ ∴ $\sqrt{س - ٢} \leq ٦$ (بتربيع الطرفين)

∴ $س - ٢ \leq ٣٦$ ∴ $س \leq ٣٨$

∴ $م_٢$ = قيم س التى تجعل د(س) فى مجال ر = $]-\infty ، ٣٨]$

∴ مجال $(ر ∘ د) = م_١ \cap م_٢ = [٢ ، \infty[\cap]-\infty ، ٣٨] = [٢ ، ٣٨]$

حل آخر لإيجاد مجال (ر ∘ د) :

∵ مجال د = $[٢ ، \infty[$ ، مجال ر = $]-\infty ، ٦]$

، ∵ مجال $(ر ∘ د) = \{س : س \in$ مجال د ، د(س) $\in$ مجال ر$\}$

∵ س ∈ مجال د ∴ $س \in [٢ ، \infty[$

∵ د(س) ∈ مجال ر ∴ $د(س) \in]-\infty ، ٦]$



$\therefore \sqrt{س - ٢} \in]-\infty ، ٦]$ $\therefore \sqrt{س - ٢} \le ٦$

$\therefore س - ٢ \le ٣٦$ $\therefore س \le ٣٨$

$\therefore \boxed{س \in]-\infty ، ٣٨]}$

أى أن مجال $(ر \circ د) = [٢ ، \infty[\cap]-\infty ، ٣٨] = [٢ ، ٣٨]$

مثال ⑪

إذا كانت : $د(س) = \sqrt{س - ١}$ ، $ر(س) = س^{٢} - ٣$

أوجد $(د \circ ر)(س)$ فى أبسط صورة موضحًا المجال ثم أوجد $(د \circ ر)(٢)$

الحل

$(د \circ ر)(س) = د(ر(س)) = \sqrt{ر(س) - ١} = \sqrt{س^{٢} - ٣ - ١} = \sqrt{س^{٢} - ٤}$

$\because$ مجال د $= [١ ، \infty[$ ، مجال ر $= ح$

، $\because$ مجال $(د \circ ر) = \{س : س \in$ مجال ر ، $ر(س) \in$ مجال د$\}$

$\because س \in$ مجال ر $\therefore \boxed{س \in ح}$

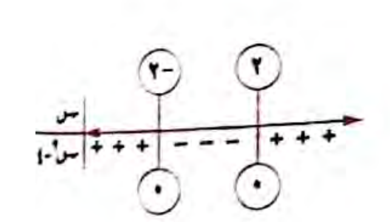
، $\because ر(س) \in$ مجال د $\therefore ر(س) \in [١ ، \infty[$

$\therefore س^{٢} - ٣ \in [١ ، \infty[$ $\therefore س^{٢} - ٣ \ge ١$

$\therefore س^{٢} - ٤ \ge$ صفر

$\therefore (س - ٢)(س + ٢) \ge$ صفر

$\therefore س \ge ٢$ ، $س \le -٢$ $\therefore \boxed{س \in ح -]-٢ ، ٢[}$



$\therefore$ مجال $(د \circ ر) = ح \cap (ح -]-٢ ، ٢[) = ح -]-٢ ، ٢[$

، $(د \circ ر)(٢) = \sqrt{٤ - ٤} =$ صفر



تمارين 2 على العمليات على الدوال - تركيب دالتين



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : د (س) = $\sqrt[3]{س - ١}$ ، ر (س) = $\sqrt{س - ١}$ فإن مجال (د - ر) هو ....

(أ)]-١ ، ∞[(ب)]١ ، ∞[(جـ) ح (د)]-∞ ، ١]

② مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ١}$ + $\sqrt{س + ٢}$ هو ....

(أ)]-٢ ، ∞[(ب)]١ ، ∞[(جـ)]١ ، ∞[(د)]-٢ ، ∞[

③ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س + ٢}$ - $\sqrt{٣ - س}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح - [-٢ ، ٣] (جـ) [-٢ ، ٣] (د)]-٢ ، ٣[

④ إذا كانت د دالة حيث بيان د = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨)}

، ر دالة حيث بيان ر = {(١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧)} فإن : د + ر = ...

(أ) {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧)}

(ب) {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) ، (٥ ، ٧)}

(جـ) {(١ ، ٥) ، (٣ ، ١١)}

(د) {(١ ، ٥) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ١١) ، (٤ ، ٨) ، (٥ ، ٧)}

⑤ إذا كانت : د ، ر : ح ← ح حيث د (س) = ٣ س + ١

، وكان (د + ر) (س) = س^{٣} + ٢ س - ١ فإن : ر (-١) = ...

(أ) -٢ (ب) -١ (جـ) صفر (د) ٢

⑥ إذا كانت د : ح$^{+}$ ← ح حيث د (س) = س^{٢} - ٧ ، ر : [-٣ ، ٢] ← ح

حيث ر (س) = س^{٢} + ٣ فإن : (د - ر) (-٥) = ...

(أ) -٥ (ب) -١٠ (جـ) -٢٠ (د) غير معرفة.

⑦ مجال الدالة (د . ر) حيث د (س) = س^{٢} - ٤ ، ر (س) = س + ١ هو ....

(أ) ح - {٢ ، -٢ ، -١} (ب) {٢ ، -٢ ، -١}

(جـ) ح (د) ح - {٤ ، ١}



⑧ إذا كانت : د (س) = $\frac{1}{س}$ ، ر (س) = $\sqrt{س}$ فإن مجال (د × ر) = ...

(أ) ح − {٠} (ب) ح (جـ) $ح^+$ (د)]٠ ، ∞[

⑨ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٤}$ $\sqrt[3]{س - ٢}$ هو ....

(أ)]٤ ، ∞[(ب) [٢ ، ∞[(جـ) ح (د) [٤ ، ∞[

⑩ إذا كان د : ح ⟵ ح حيث د (س) = $س^٢$ − س ، ر : ح ⟵ ح حيث ر (س) = ٣ س − ٢

فإن : (د × ر − ٦ ر) (٢) = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٤٠ (جـ) ١٦ (د) −١٦

⑪ إذا كانت : د (س) = ٢ س + ١ ، ر (س) = − س − ٢

وكانت : هـ (س) = د (س) + ر (س) ، ك (س) = د (س) − ر (س)

فإن : هـ (٢) × ك (١) = ...

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٦ (د) صفر

⑫ إذا كانت د : $ح^+$ ⟵ ح حيث د (س) = س − ٥ ، ر : [−١ ، ٥] ⟵ ح

حيث ر (س) = س − ٢ فإن : $(\frac{د}{ر})$ (١) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

⑬ إذا كانت : د ، ر دالتين حقيقيتين حيث د (س) = $\frac{س - ٢}{س^٢ - ٣ س + ٢}$ ، ر (س) = س − ٣

فإن : $(\frac{د}{ر})$ (٣) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) غير معرفة.

⑭ إذا كانت د ، ر دالتين كثيرتي حدود وكان مجال الدالة $(\frac{د}{ر})$ هو ح − {٣} ومجال الدالة $(\frac{ر}{د})$ هو ح − {٢} فإن مجال الدالة (د . ر) هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٣} (جـ) ح − {٢} (د) ح − {٢ ، ٣}

⑮ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س - ٥}{\sqrt{٢ س - ٣}}$ هو ....

(أ) ح − {٥} (ب)]$\frac{٣}{٢}$ ، ∞[(جـ) [$\frac{٣}{٢}$ ، ∞[− {٥} (د) ح − {$\frac{٣}{٢}$}

⑯ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٣}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٣} (جـ) [٢ ، ∞[(د) [٢ ، ∞[− {٣}



(١٧) إذا كانت د : ح$^+$ ⟵ ح حيث د (س) = س − ٥ ، ر : [−١ ، ٥] ⟵ ح

حيث ر (س) = س − ٢ فإن مجال ($\frac{د}{ر}$) هو ....

(أ)]٠ ، ٥]　(ب)]٠ ، ٥] − {٢}　(جـ) [−١ ، ∞[　(د) ح

(١٨) إذا كانت د$_١$: [−٢ ، ٣] ⟵ ح حيث د$_١$ (س) = س ، د$_٢$: [٠ ، ٤[⟵ ح

، حيث د$_٢$ (س) = س^٢　فإن : مجال $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$ = ...

(أ) [−٢ ، ٤[　(ب) [−٢ ، ٤[− {٠}　(جـ)]٠ ، ٣]　(د) [٠ ، ٣]

(١٩) مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{س + ١}{\sqrt[٣]{س - ١}}$ هو ....

(أ) ح − {١}　(ب) ح − {−١}　(جـ) [−١ ، ∞[　(د) ح

(٢٠) إذا كان : د (س) = $\sqrt[٣]{س - ٣}$ ، ر (س) = $\sqrt{٣ - س}$ فإن مجال ($\frac{د}{ر}$) هو ....

(أ)]٣ ، ∞[　(ب) [٣ ، ∞[　(جـ)]−∞ ، ٣[　(د)]−∞ ، ٣]

(٢١) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٤}}{(س - ٣)(س - ٥)}$ هو ....

(أ) ح　(ب) ح − {٣ ، ٥}　(جـ) [٤ ، ∞[　(د) [٤ ، ∞[− {٥}

(٢٢) مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{\sqrt[٣]{س - ٣}}{\sqrt{٥ - س}}$ هو ....

(أ)]٣ ، ٥[　(ب) ح − {٣ ، ٥}　(جـ) [٣ ، ٥[　(د) {−٣ ، −٥}

(٢٣) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{\frac{٣ - س}{٥ - س}}$ هو ....

(أ)]٣ ، ٥[　(ب) ح −]٣ ، ٥[　(جـ) [٣ ، ٥]　(د) ح − [٣ ، ٥[

(٢٤) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س + ٥}$ ، ر (س) = س^٢　فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٧　(ب) ٣　(جـ) ٤　(د) ٩

(٢٥) إذا كان : د (١) = ٤ ، ر (٤) = ٧　فإن : (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) ١　(ب) ٤　(جـ) ٧　(د) ١١

(٢٦) إذا كانت د : [−٢ ، ٣] ⟵ ح حيث د (س) = س + ١ ، ر : [٠ ، ٢] ⟵ ح

حيث ر (س) = س^٢　فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٤　(ب) −١　(جـ) ٥　(د) غير معرفة

(٢٧) إذا كانت : د (س) = ٥ س + ٤ ، ر (س) = ٢ − س

فإن : (د ∘ ر) (−٢) + (ر ∘ د) (٥) = ...

(أ) ٢٤　(ب) −٢٧　(جـ) ٤٩　(د) −٣



(٢٨) إذا كان : د $(س) = \sqrt[3]{س}$ ، ر $(س) = س^٣$ فإن : (د ∘ ر) (س) = ...

(أ) س (ب) $س^٣$ (جـ) $\sqrt[3]{س}$ (د) |س|

(٢٩) إذا كان : د (س) = س − ٣ ، ر $(س) = س^٢$ فإن : (د ∘ ر) (س) = ...

(أ) $(س − ٣)^٢$ (ب) $س^٢ − ٣$ (جـ) $س^٢ + ٣$ (د) $\sqrt{س − ٣}$

(٣٠) إذا كانت : د $(س) = \frac{٣ س + ٢}{٢ س − ٣}$ فإن : (د ∘ د) (س) = ...

(أ) س (ب) − س (جـ) د (س) (د) − د (س)

(٣١) إذا كانت : د (س) = ٢ س + ٥ ، وكانت ر $(س) = س^٢$ فإن : د (ر (س)) = ...

(أ) $(٢ س + ٥)^٢$ (ب) $٢ س^٢ + ٥$ (جـ) $(٢ س^٢ + ٥)^٢$ (د) $٢ س^٢ + ١٠$

(٣٢) إذا كان : د (س) = ٣ س + ٢ ، ر (س) = ٢ س + ك

وكان (د ∘ ر) (س) = (ر ∘ د) (س) فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٣) إذا كانت : د (س) = س + ١ ، ر $(س) = س^٢ − ١$

فإن مجموعة حل المعادلة ر (د (س)) = صفر هي ....

(أ) {٠ ، ٢} (ب) {١ ، −١} (جـ) {٠ ، −٢} (د) {٢ ، −٢}

(٣٤) إذا كانت : د (س) = ٩ س + ٣ ، ر (س) = ٢ س + ٩ وكان (د ∘ ر) (٢) = ١٥

فإن ٩ ∋ ....

(أ) {٢ ، ٦} (ب) {−٢ ، −٦} (جـ) {−٦ ، ٢} (د) {−٢ ، ٦}

(٣٥) إذا كانت : د (س) = ٢ س ، ر $(س) = \frac{١}{٢ س}$ ، كان د (ر (س)) = ٦

فإن : س = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{١٢}$

(٣٦) إذا كانت : د $(س) = \frac{١}{س}$ ، ر $(س) = س^٢ − ١$ فإن مجال (د ∘ ر) = ...

(أ) {٠ ، ١ ، −١} (ب) ح − {٠ ، ١ ، −١} (جـ) ح − {١ ، −١} (د) [−١ ، ١]

(٣٧) إذا كان : د $(س) = \sqrt{س}$ ، ر $(س) = س^٢$ فإن : مجال (ر ∘ د) = ...

(أ)]−∞ ، ٠] (ب) [٠ ، ∞[(جـ) $ح^+$ (د) ح

(٣٨) إذا كان : د $(س) = \sqrt{س}$ ، ر $(س) = س^٢$ فإن : مجال (د ∘ ر) = ...

(أ)]−∞ ، ٠] (ب) [٠ ، ∞[(جـ) $ح^+$ (د) ح

(٣٩) مجال الدالة (د ∘ ر) حيث : د $(س) = \sqrt{س − ٢}$ ، ر $(س) = \sqrt{٦ − س}$ هو ....

(أ) ح (ب) [٢ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٢] (د)]−∞ ، ٢[



(٤٠) إذا كانت العلاقة بين س ، د (س) ، ر (س) كما بالجدول المقابل

س	د (س)	س	ر (س)
-٣	٤	-٤	٣
-٢	٣	-١	١
٣	١	١	-٤
٦	-١	٤	-٧

فإن : ر (د (٦)) = ...

(أ) ٣ (ب) ١

(جـ) -٤ (د) -٧

(٤١) إذا كان الجدول المقابل يمثل بيان كل من الدالتين د ، ر

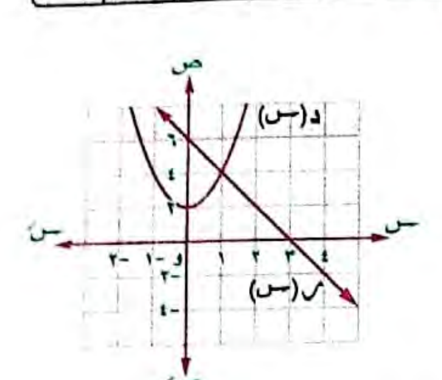
س	١	٢	٣	٤
د (س)	٣	١	٤	٢
ر (س)	٤	٣	٢	١

فإن (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤

(٤٢) الشكل المقابل يوضح منحنى الدالتين د ، ر



فإن : (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) ٥ (ب) -٢

(جـ) -٤ (د) ٦

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت د دالة حيث : د (س) = $س^٢$ - س - ١٢ ومجالها [-٤ ، ٨] ، ر دالة حيث ر (س) = س - ٤ ومجالها [-٧ ، ٤] **فأوجد كلاً من الدوال الآتية مع تعيين مجال كل منها :**

(١) (د + ر) (س) | (٢) (د - ر) (س) | (٣) (د . ر) (س)

(٤) $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (س) | (٥) $\left(\frac{ر}{د}\right)$ (س)

---

٢ إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث : د (س) = $س^٢$ - ٤ ، ر (س) = $\sqrt{س - ١}$

أوجد : (١) مجال كل من الدوال الآتية : (د + ر) ، (د . ر) ، $\left(\frac{د}{ر}\right)$ ، $\left(\frac{ر}{د}\right)$

(٢) القيمة العددية - إن أمكن - لكل من :

(د + ر) (٥) ، (د . ر) (٢) ، $\left(\frac{د}{ر}\right)$ (٣) ، $\left(\frac{ر}{د}\right)$ (-٢)

---

٣ إذا كان : د (س) = $س^٢$ - ٤ س ، ر (س) = $\sqrt{س + ٢}$ ، ع (س) = $\sqrt{٤ - س}$

أولًا : أوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية :

(١) (د + ر) (٢) (ر - ع) (٣) (د . ع) (٤) $\left(\frac{ع}{د}\right)$



ثانيًا : احسب القيمة العددية - إن أمكن - لكل من :

① $(ر - ع)(١)$ ② $(د . ع)(٥)$ ③ $\left(\frac{ع}{د}\right)(٣)$

---

٤ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

① د $(س) = \frac{١}{س} + \frac{١}{س + ٢}$

② د $(س) = \frac{س - ١}{س^٢ - ١} + \frac{١}{س + ١}$

③ د $(س) = \frac{س}{\sqrt{١ - س}}$

④ د $(س) = \frac{٣ س}{\sqrt{٢ س - ١}}$

⑤ د $(س) = \sqrt[٣]{س - ٤} + \sqrt{س - ٢}$

⑥ د $(س) = \frac{\sqrt{س - ٤}}{س - ٦}$

⑦ د $(س) = \frac{\sqrt{س - ٣}}{س^٢ - ٤}$

⑧ د $(س) = \frac{\sqrt{س - ٣}}{\sqrt{س - ٥}}$

---

٥ إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث : د $(س) = \begin{cases} س - ٢ & ، س \geq ٢ \\ -س + ٢ & ، س < ٢ \end{cases}$ ، ر $(س) = س$

فأوجد كلاً من : ① $(د . ر)(س)$ ② $\left(\frac{د}{ر}\right)(س)$ ③ $\left(\frac{ر}{د}\right)(س)$

مع تعيين مجال كل دالة.

---

٦ عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية :

① د $(س) = \sqrt{\frac{س - ٣}{س - ٥}}$

② د $(س) = \frac{٥ س + ٢٠}{\sqrt{س - ٢} - ١}$

③ د $(س) = \frac{\sqrt{س + ٢}}{س^٢ - ٦ س - ٧}$

④ د $(س) = \frac{\frac{٣}{س - ١}}{\frac{١}{س - ٢} + ٤}$

---

٧ إذا كان : د $(س) = ٣ س + ١$ ، ر $(س) = س^٢ - ٥$ ، ه $(س) = س^٣$

أوجد : ① $(ر \circ د)(٢)$ ② $(ر \circ د)(-٣)$ ③ $(ر \circ ه)(١)$ ④ $(ه \circ د)(-٢)$

«-٢ ، ٥٩ ، -٤ ، -١٢٥»

---

٨ إذا كان : د $(س) = \frac{١}{س}$ ، ر $(س) = س + ٣$

أوجد : ① $(د \circ ر)(س)$ ② $(ر \circ د)(س)$ وحدد مجال كل منهما.

---

٩ إذا كان : د $(س) = س^٢ + ٦$ ، ر $(س) = ٣ س$

① أوجد : $(د \circ ر)(٣)$

② حدد : قيم س التي تجعل $(د \circ ر)(س) = ٤٢$

«٨٧ ، ±٢»



١٠ إذا كان : د (س) = س^{٢} − ٣ ، ر (س) = √(س − ٢)

أوجد (د ∘ ر) (س) في أبسط صورة محددًا المجال ثم أوجد (د ∘ ر) (٣)   «−٢»

١١ إذا كان : د (س) = √(س + ١) ، ر (س) = ٢ / (س − ٣) فأوجد مجال (د ∘ ر)

١٢ إذا كان : د (س) = √(س − ٢) ، ر (س) = √(٤ − س)

فأوجد كلًا من الدالتين الآتيتين موضحًا مجالها : ① د ∘ ر   ② ر ∘ د

١٣ إذا كان : د (س) = √(س − ١) ، ر (س) = √(س^{٢} − ٤)

فأوجد مجال كل من الدالتين الآتيتين : ① د ∘ ر   ② ر ∘ د

١٤ إذا كان : ع (س) = √(س^{٣} − ٤) فأوجد الدالتين د ، ر بحيث يكون : ع (س) = (د ∘ ر) (س)

١٥ إذا كانت : د دالة خطية وكان (د ∘ د) (س) = ١٦ س + ١٥   أوجد : د (س)

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = √(س − ١) ، ر (س) = √(١ − س) فإن مجال (د + ر) هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب)]−∞ ، ١]   (جـ) [−١ ، ∞[(د) {١}

② إذا كانت : د (س) = { −س + ٢ ، س > ٠ ؛ ٣ س ، س ≤ ٠ } ، ر (س) = { ٢ س − ١ ، س ≥ ١ ؛ س + ٢ ، س < ١ }

فإن : (د + ر) (س) = ... حيث ٠ < س < ١

(أ) ٤ س + ٢   (ب) س + ١   (جـ) ٥ س − ١   (د) ٤

③ إذا كانت : د (س) = { س^{٢} + ١ ، س < ٠ ؛ ٣ س + ١ ، س ≥ ٠ } ، ر (س) = { ٤ س − ٢ ، س < ٢ ؛ س^{٢} + ٢ ، س ≥ ٢ }

فإن : (ر ∘ د) (−١) = ...

(أ) ٣٧   (ب) −١٧   (جـ) ١٠   (د) ٦

④ إذا كانت : د (س) = س^{٢} ، ر (س) = ٢ س + ٣

فإن مجموعة حل المعادلة د (ر (س)) = د (س) هي ....

(أ) {١ ، ٣}   (ب) {−٣ ، ١}   (جـ) {−١ ، −٣}   (د) {−١ ، ٣}



⑤ إذا كانت : د(س) = ٢س + ١ وكان : (د ∘ ر)(س) = ٣س + ٢

فإن : ر(س) = ...

(أ) س + ١ (ب) ٥س + ٣ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$ (د) ٢س + ٣

⑥ إذا كانت د : ح ← ح وكان : د(س) = ٢س − ٣ ، (ر ∘ د)(س) = س + ٢

فإن : ر(س) = ...

(أ) ٢س² + س − ٦ (ب) $\frac{\text{س} + ٢}{٢\text{س} - ٣}$ (جـ) $\frac{\text{س} + ٣}{٢}$ (د) $\frac{\text{س} + ٧}{٢}$

⑦ إذا كانت : د(س) = س + ٢ ، ر(س) = $\frac{\text{س} - \text{ك}}{٣\text{س} - ١}$

وكان : (ر ∘ د)(٠) = (د ∘ ر)(١) فإن : ك = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ١ (د) $\frac{٧}{٢}$

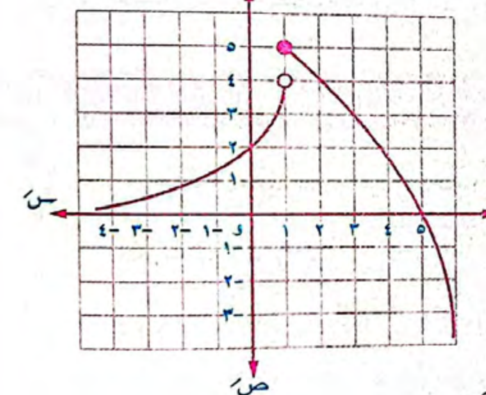
⑧ الشكل المقابل يمثل

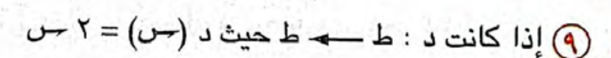
منحنى ص = د(س)

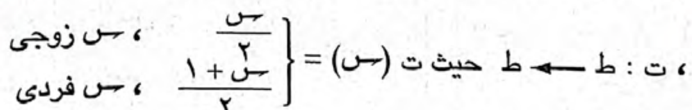
فإن : (د ∘ د ∘ د)(١) = ...

(أ) −٥ (ب) −١

(جـ) ١ (د) ٢




⑨ إذا كانت د : ط ← ط حيث د(س) = ٢س


، ت : ط ← ط حيث ت(س) = { $\frac{\text{س}}{٢}$ ، س زوجي ؛ $\frac{\text{س} + ١}{٢}$ ، س فردي }

فإن : (د ∘ ت)(٣) − (د ∘ ت)(٨) = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) −٤ (د) −٥

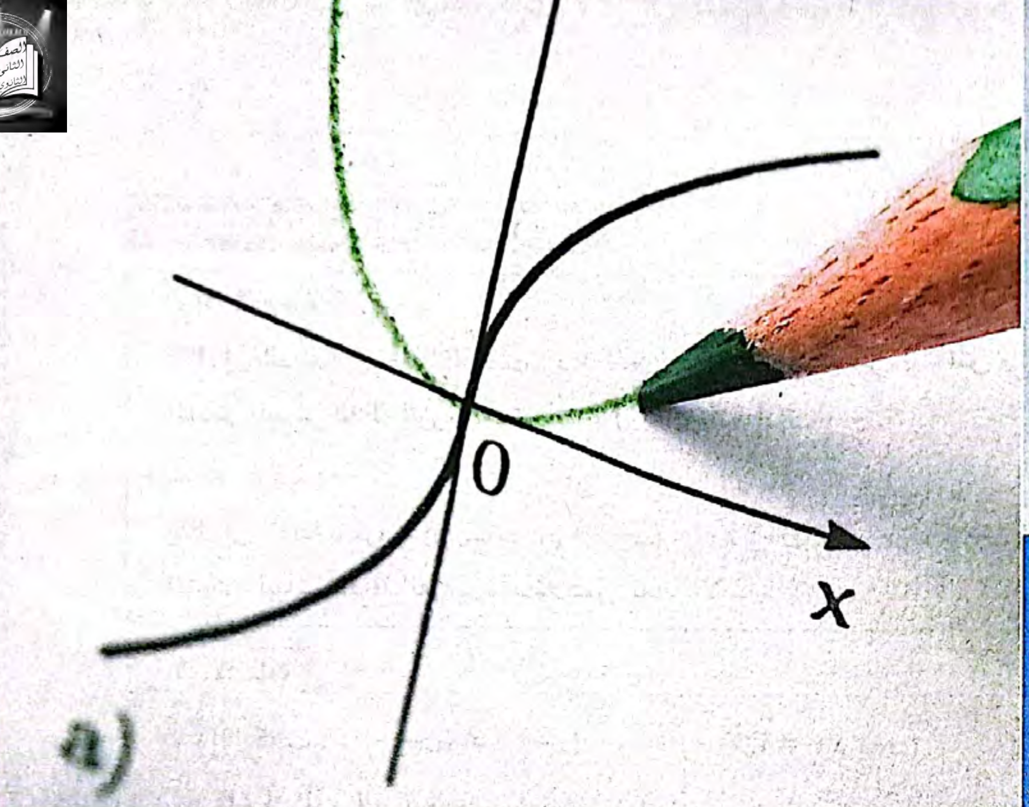
---

٢ إذا كانت د : ح − {٠} ← ح وكان د(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ أوجد :

① (د ∘ د)(س) ② (د ∘ د ∘ د)(س)

③ (د ∘ د ∘ د ∘ ..... إلى ن من المرات)(س)





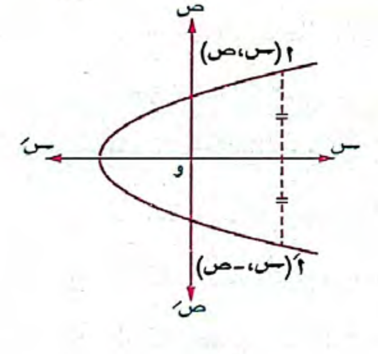
الدرس
3

بعض خواص الدوال
(الدوال الزوجية والفردية - الدوال الأحادية)

تمهيد

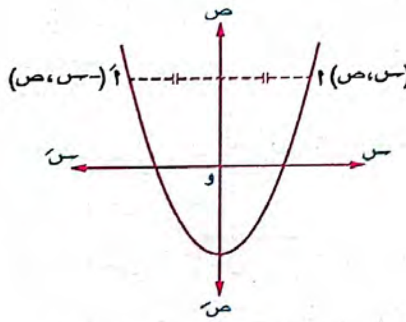
١ التماثل حول محور السينات

يكون الشكل البيانى متماثلًا حول محور السينات إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البيانى توجد نقطة أخرى أَ (س ، – ص) تقع على الشكل البيانى حيث أَ صورة أ بالانعكاس فى محور السينات.



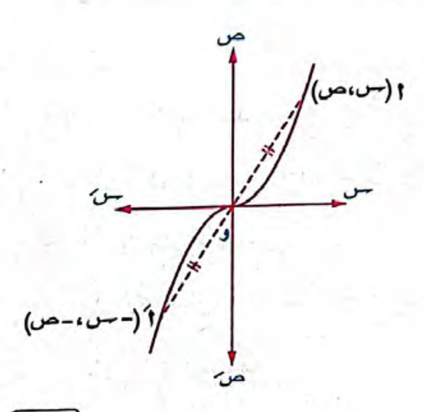
٢ التماثل حول محور الصادات

يكون الشكل البيانى متماثلًا حول محور الصادات إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البيانى توجد نقطة أخرى أَ (– س ، ص) تقع على الشكل البيانى حيث أَ صورة أ بالانعكاس فى محور الصادات.



٣ التماثل حول نقطة الأصل «و»

يكون الشكل البيانى متماثلًا حول نقطة الأصل (و) إذا كان لكل نقطة أ (س ، ص) واقعة على الشكل البيانى توجد نقطة أخرى أَ (– س ، – ص) تقع على الشكل البيانى حيث أَ صورة أ بالانعكاس فى نقطة الأصل (و)





الدالة الزوجية والدالة الفردية

• **الدالة الزوجية :**

يقال إن الدالة د زوجية إذا كانت : د (−س) = د (س) لكل س ، −س فى مجال الدالة د ويكون الشكل البيانى للدالة الزوجية متماثلًا حول محور الصادات.

• **الدالة الفردية :**

يقال إن الدالة د فردية إذا كانت : د (−س) = − د (س) لكل س ، −س فى مجال الدالة د ويكون الشكل البيانى للدالة الفردية متماثلًا حول نقطة الأصل.

ملاحظات

١ إذا كانت : د (−س) ≠ د (س) ، د (−س) ≠ − د (س)
فإن الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

٢ عند بحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط انتماء كل من العنصرين س ، −س إلى مجال الدالة وإذا لم يتحقق الشرط كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون الحاجة لإيجاد د (−س)

٣ إذا كانت الدالة مجالها ح − {أ} ، أ ≠ صفر فإن الدالة ليست زوجية وليست فردية بدون بحثها.

٤ إذا كانت الدالة زوجية ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (أ ، ب) فإن منحنى الدالة أيضًا يمر بالنقطة (−أ ، ب)

٥ إذا كانت الدالة فردية ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (أ ، ب) فإن منحنى الدالة أيضًا يمر بالنقطة (−أ ، −ب)

٦ الدالة الصفرية د : د (س) = ٠ هى زوجية وفردية فى نفس الوقت.

مثال ١

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (س) = $س^٢$

٢ د (س) = ٢ $س^٣$

٣ د (س) = $\sqrt{س - ١}$

٤ د (س) = جتا س

٥ د (س) = $س^٢$ − ٥ ، س ∈ [−٢ ، ٢]

الحل

١ ∵ د كثيرة حدود ∴ مجال د = ح

∴ لكل س ، −س ∈ ح يكون : د (−س) = $(−س)^٢$ = $س^٢$ = د (س) ∴ د دالة زوجية.

٢ ∵ د كثيرة حدود ∴ مجال د = ح

∴ لكل س ، −س ∈ ح يكون : د (−س) = ٢ $(−س)^٣$ = ٢ $(−س^٣)$ = −٢ $س^٣$ = − د (س)

∴ د دالة فردية.



٣ ∵ مجال د هو مجموعة قيم س التى تجعل س − ١ ≥ ٠ أى : س ≥ ١

∴ مجال د = [١ ، ∞[

∴ لكل س ∈ [١ ، ∞[لا يوجد − س ∈ [١ ، ∞[

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

لاحظ أن

٢ ∈ [١ ، ∞[

ولكن −٢ ∉ [١ ، ∞[

٤ مجال الدالة د : د (س) = جتا س هو ح

∴ لكل س ، − س ∈ ح يكون : د (− س) = جتا (− س) = جتا س = د (س)

∴ د دالة زوجية.

تذكر أن

جا (− س) = − جا س

جتا (− س) = جتا س

ظا (− س) = − ظا س

٥ ∵ −٢ ∈ مجال الدالة ، ٢ ∉ مجال الدالة ∴ د ليست زوجية وليست فردية.

ملاحظتان

١ تُسمى الدالة د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ $س^{ن}$ حيث أ ≠ ٠ ، ن ∈ $ص_+$ دالة القوى وتكون الدالة د زوجية إذا كان ن عددًا زوجيًا. ، فردية إذا كان ن عددًا فرديًا.

٢ د (س) = جتا س ، د (س) = قا س دوال زوجية

بينما د (س) = جا س ، د (س) = قتا س ، د (س) = ظا س ، د (س) = ظتا س دوالًا فردية.

مثال ٢

إذا كانت د دالة زوجية حيث : د (س) = أ $س^{٢}$ + ب س + ٥ وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (١ ، ٦)

فأوجد : قيمة كل من أ ، ب

الحل

∵ الدالة زوجية ومنحناها يمر بالنقطة (١ ، ٦) ∴ المنحنى يمر بالنقطة (−١ ، ٦)

عند النقطة (١ ، ٦) ∴ ٦ = أ + ب + ٥ (١)

، عند النقطة (−١ ، ٦) ∴ ٦ = أ − ب + ٥ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ١٢ = ٢ أ + ١٠ ∴ ٢ أ = ٢ ∴ أ = ١

، بالتعويض فى (١) : ∴ ٦ = ١ + ب + ٥ ∴ ب = صفر

خواص هامة

إذا كان كل من $د_١$ ، $د_٢$ دالة زوجية وكل من $ر_١$ ، $ر_٢$ دالة فردية فإن :

١ $د_١ \pm د_٢$ دالة زوجية.

٢ $ر_١ \pm ر_٢$ دالة فردية.

٣ $د_١ \pm ر_١$ دالة ليست زوجية وليست فردية.

٤ كل من ($د_١ \times د_٢$) ، $\left(\frac{د_١}{د_٢}\right)$ دالة زوجية.

٥ كل من ($ر_١ \times ر_٢$) ، $\left(\frac{ر_١}{ر_٢}\right)$ دالة زوجية.

٦ كل من ($د_١ \times ر_١$) ، $\left(\frac{د_١}{ر_١}\right)$ دالة فردية.



مثال ③

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

[١] د (س) = $س^٢$ + جتا س [٢] د (س) = $س^٣$ + جا س [٣] د (س) = ٣ $س^٤$ ظا س

الحـــل

[١] ∵ د (– س) = $(– س)^٢$ + جتا (– س) = $س^٢$ + جتا س = د (س)

∴ د دالة زوجية.

حل آخر : بفرض أن : د (س) = $د_١$ (س) + $د_٢$ (س)

حيث $د_١$ (س) = $س^٢$ ، $د_٢$ (س) = جتا س دالتان زوجيتان.

∴ $د_١$ + $د_٢$ دالة زوجية. ∴ د دالة زوجية.

[٢] ∵ د (– س) = $(– س)^٣$ + جا (– س) = – $س^٣$ – جا س

= – ($س^٣$ + جا س) = – د (س)

∴ د دالة فردية.

لاحظ أن : الدالة الناتجة من جمع دالتين فرديتين هى دالة فردية.

[٣] ∵ د (– س) = ٣ $(– س)^٤$ ظا (– س) = ٣ $س^٤$ (– ظا س)

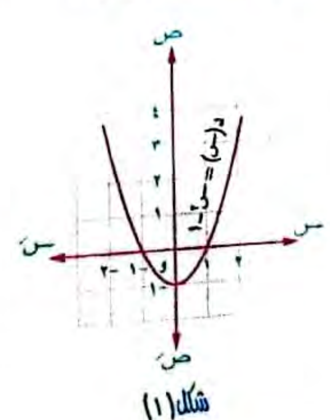
= –٣ $س^٤$ ظا س = – د (س)

∴ د دالة فردية.

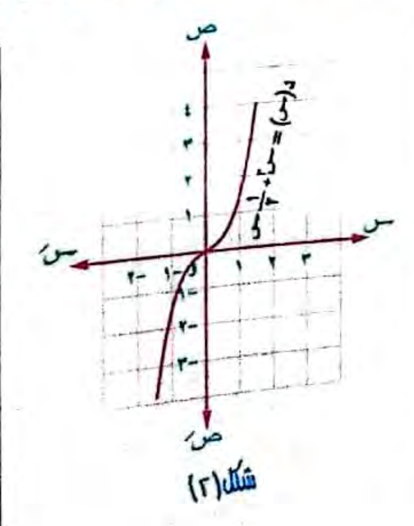
لاحظ أن : الدالة الناتجة من ضرب دالتين إحداهما زوجية والأخرى فردية هى دالة فردية.

مثال ④

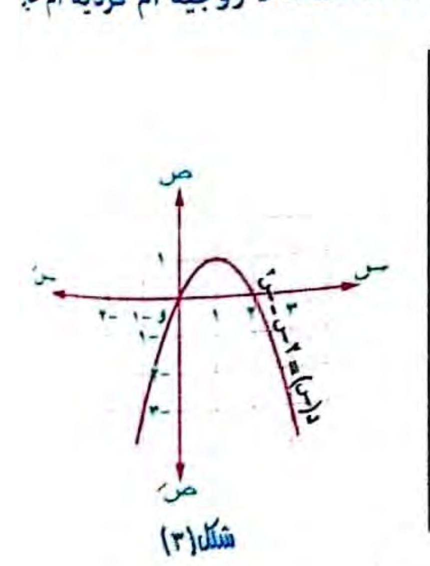
كل من الأشكال الآتية يوضح الشكل البيانى للدالة د ، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أم فردية أم غير ذلك وحقق إجابتك جبريًا :



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



الحل

مثال(١): د (س) = $س^٢$ − ١

∵ مجال الدالة د = ح والمنحنى متماثل حول محور الصادات ∴ الدالة د دالة زوجية.

التحقق الجبري : ∵ لكل س ، − س ∈ ح

د (− س) = $(− س)^٢$ − ١ = $س^٢$ − ١ = د (س) ∴ الدالة د دالة زوجية.

مثال(٢): د (س) = $س^٣$ + $\frac{١}{٢}$ س

∵ مجال الدالة د = ح والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل

∴ الدالة د دالة فردية.

التحقق الجبري : ∵ لكل س ، − س ∈ ح

د (− س) = $(− س)^٣$ + $\frac{١}{٢}$ (− س) = − $س^٣$ − $\frac{١}{٢}$ س = − ($س^٣$ + $\frac{١}{٢}$ س) = − د (س)

∴ الدالة د دالة فردية.

مثال(٣): د (س) = ٢ س − $س^٢$

∵ مجال الدالة د = ح والمنحنى ليس متماثلًا حول محور الصادات وليس متماثلًا حول نقطة الأصل.

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

التحقق الجبري : لكل س ، − س ∈ ح

د (− س) = ٢ (− س) − $(− س)^٢$ = −٢ س − $س^٢$ = − (٢ س + $س^٢$)

∴ د (− س) ≠ د (س) ، د (− س) ≠ − د (س)

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

مثال ٥

ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (س) = ٣ $س^٤$ − ٥ $س^٢$ + ١

٢ د (س) = $س^٣$ + ٢ س − ٥

٣ د (س) = $\frac{س − جا ٢ س}{١ + س^٢}$

٤ د (س) = $\frac{س − ظا س}{س^٣ + س}$

الحل

١ ∵ د (− س) = ٣ $(− س)^٤$ − ٥ $(− س)^٢$ + ١ = ٣ $س^٤$ − ٥ $س^٢$ + ١ = د (س)

∴ الدالة د زوجية.

[٢] ∵ $\text{د}(-\text{س}) = (-\text{س})^{٣} + ٢(-\text{س}) - ٤ = -\text{س}^{٣} - ٢\text{س} - ٤ = -(\text{س}^{٣} + ٢\text{س} + ٤)$

∴ $\text{د}(-\text{س}) \neq \text{د}(\text{س})$ ، $\text{د}(-\text{س}) \neq -\text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

[٣] ∵ $\text{د}(-\text{س}) = \frac{(-\text{س}) - \text{جا}\,٣(-\text{س})}{١ + (-\text{س})^{٢}} = \frac{(-\text{س}) - (-\text{جا}\,٣\text{س})}{١ + \text{س}^{٢}} = \frac{-(\text{س} - \text{جا}\,٣\text{س})}{١ + \text{س}^{٢}} = -\text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د فردية.

[٤] ∵ $\text{د}(-\text{س}) = \frac{(-\text{س}) - \text{ظا}(-\text{س})}{(-\text{س})^{٢} + (-\text{س})} = \frac{-\text{س} - (-\text{ظا}\,\text{س})}{\text{س}^{٢} - \text{س}} = \frac{-\text{س} + \text{ظا}\,\text{س}}{-\text{س}^{٢} - \text{س}}$

$= \frac{-(\text{س} - \text{ظا}\,\text{س})}{-(\text{س}^{٢} + \text{س})} = \frac{\text{س} - \text{ظا}\,\text{س}}{\text{س}^{٢} + \text{س}} = \text{د}(\text{س})$ ∴ الدالة د زوجية.

مثال ⑥

ابحث نوع كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

[١] $\text{د}(\text{س}) = \left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢} + \left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢}$

[٢] $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -\frac{١}{\text{س}} & \text{، س} < ٠ \\ \frac{١}{\text{س}} & \text{، س} > ٠ \end{cases}$

الحـــل

[١] ∵ $\text{د}(-\text{س}) = \left(-\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢} + \left(-\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢}$

$= \left[-\left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)\right]^{٢} + \left[-\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)\right]^{٢} = -\left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢} - \left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢}$

$= -\left[\left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢} + \left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢}\right] = -\text{د}(\text{س})$ ∴ الدالة د فردية.

[٢] ∵ $\text{د}(-\text{س}) = \begin{cases} -\frac{١}{(-\text{س})} & \text{، }(-\text{س}) < ٠ \\ \frac{١}{(-\text{س})} & \text{، }(-\text{س}) > ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{١}{\text{س}} & \text{، س} > ٠ \\ -\frac{١}{\text{س}} & \text{، س} < ٠ \end{cases}$ «وبتبديل كتابة القاعدتين».

$= \begin{cases} -\frac{١}{\text{س}} & \text{، س} < ٠ \\ \frac{١}{\text{س}} & \text{، س} > ٠ \end{cases} = \text{د}(\text{س})$

∴ الدالة د زوجية.



الدالة الأحادية (Injective function)

تعريف

الدالة د : س ⟵ ص تسمى دالة أحادية إذا كان :

لكل أ ، ب ∈ س ، د (أ) = د (ب) فإن : أ = ب

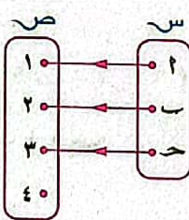
أو : لكل أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب فإن : د (أ) ≠ د (ب)

وهذا يعنى أنه لا يوجد عنصران فى مجال الدالة الأحادية لهما نفس الصورة.

فمثلًا :



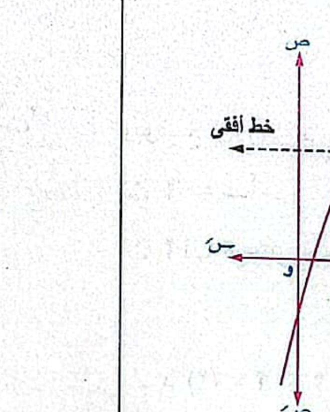
دالة ليست أحادية
من س ⟵ ص



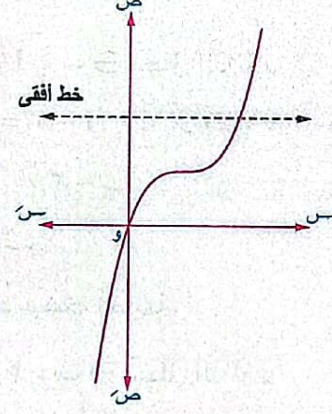
دالة أحادية
من س ⟵ ص

اختبار الخط الأفقى

إذا وجد خط أفقى (يوازى محور السينات) يقطع منحنى الدالة فى أكثر من نقطة فإن المنحنى يمثل دالة ليست أحادية.



الخط الأفقى يقطع المنحنى فى نقطتين لذلك فإن الدالة ليست أحادية



أى خط أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة على الأكثر لذلك فإن الدالة أحادية

مثال ٧

أثبت أن كلًا من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين دالة أحادية :

١ د (س) = $س^٣ + ٢$

٢ د (س) = $\frac{٢ س - ٣}{٣ س + ٢}$



الحل

١ بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = $أ^٣$ + ٢ ، د (ب) = $ب^٣$ + ٢ وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $أ^٣$ + ٢ = $ب^٣$ + ٢ ∴ $أ^٣$ = $ب^٣$

∴ أ = ب ∴ الدالة د دالة أحادية.

٢ بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = $\frac{٢أ - ٣}{٣أ + ٢}$ ، د (ب) = $\frac{٢ب - ٣}{٣ب + ٢}$ وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{٢أ - ٣}{٣أ + ٢} = \frac{٢ب - ٣}{٣ب + ٢}$ ∴ (٢أ - ٣) (٣ب + ٢) = (٣أ + ٢) (٢ب - ٣)

∴ ٦أب + ٤أ - ٩ب - ٦ = ٦أب - ٩أ + ٤ب - ٦

∴ ٤أ + ٩أ = ٤ب + ٩ب ∴ ١٣أ = ١٣ب

∴ أ = ب ∴ الدالة د دالة أحادية.

مثال ٨

أثبت أن كلًا من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ليست أحادية :

١ د (س) = ٣ - $س^٢$

٢ د (س) = $س^٢$ + س

الحل

١ بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = ٣ - $أ^٢$ ، د (ب) = ٣ - $ب^٢$ وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٣ - $أ^٢$ = ٣ - $ب^٢$ ∴ $أ^٢$ = $ب^٢$

∴ أ = ± ب ∴ أ لها قيمتان هما ب ، -ب

∴ الدالة د ليست أحادية.

٢ بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = $أ^٢$ + أ ، د (ب) = $ب^٢$ + ب

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $أ^٢$ + أ = $ب^٢$ + ب

∴ $أ^٢$ - $ب^٢$ + أ - ب = ٠

∴ (أ - ب) (أ + ب) + (أ - ب) = ٠

∴ (أ - ب) (أ + ب + ١) = ٠

∴ إما أ - ب = ٠ ومنها أ = ب أو أ + ب + ١ = ٠ ومنها أ = -ب - ١

∴ أ لها قيمتان هما ب ، -ب - ١

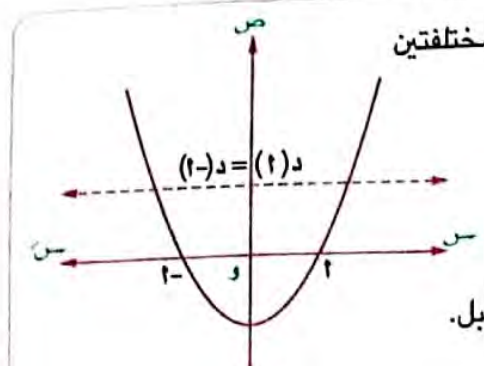
∴ الدالة د ليست أحادية.



ملاحظتان

• الدوال الزوجية بصفة عامة ليست دوال أحادية لأنه لكل قيمتين مختلفتين أ ، - أ ∈ مجال الدالة الزوجية يكون د (- أ) = د (أ)

أى أن : القيمتين أ ، - أ للمتغير س تناظرهما قيمة وحيدة للمتغير ص ولذلك فإن الدالة الزوجية ليست دالة أحادية كما يتضح ذلك باستخدام اختبار الخط الأفقى كما فى الشكل المقابل.



• الدالة الفردية قد تكون أحادية أو غير أحادية.

مثال ٩

مثل بيانيًا منحنى دالة زوجية يمر بالنقط : (٠ ، -٢) ، (-١ ، -١) ، (-٢ ، ٢)

ومن الرسم : بيِّن أن الدالة ليست أحادية.

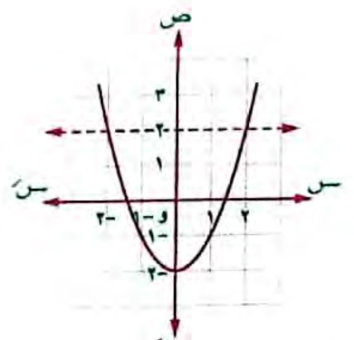
الحـل

∵ الدالة زوجية ∴ د (س) = د (- س)

∴ د (١) = د (-١) = -١ ، د (٢) = د (-٢) = ٢

أى أن : منحنى الدالة يمر أيضًا بالنقطتين :

(١ ، -١) ، (٢ ، ٢)

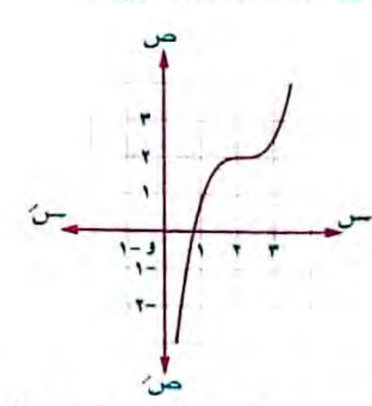


من الرسم : الدالة ليست أحادية لأنه يوجد خط أفقى يقطع منحنى الدالة فى نقطتين.

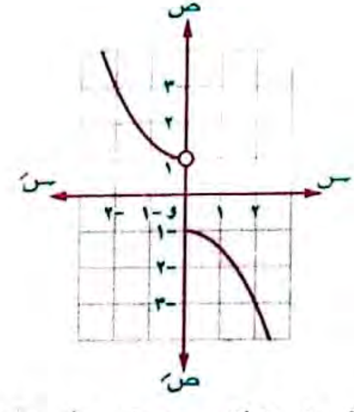
ملاحظة

إذا كانت الدالة د فى تزايد مستمر أو فى تناقص مستمر لجميع القيم التى تنتمى إلى مجال الدالة فإن الدالة د تكون أحادية.

فمثلًا : فى كل من الشكلين الآتيين :



الدالة د فى تزايد مستمر على مجالها
لذلك الدالة د دالة أحادية



الدالة د فى تناقص مستمر على مجالها
لذلك الدالة د دالة أحادية

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة الزوجية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = $س^٣$ (ب) د (س) = جا س

(جـ) د (س) = س جتا س (د) د (س) = س جا س

(٢) الدالة الفردية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = $س^٢$ جا س (ب) د (س) = $ظا^٢$ س

(جـ) د (س) = جتا س (د) د (س) = ١

(٣) نوع الدالة د : د (س) = $\frac{جا س}{س}$ هى ....

(أ) زوجية. (ب) فردية. (جـ) لا زوجية ولا فردية. (د) أحادية.

(٤) الدالة د : د (س) = س جتا س ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) ليست زوجية ولا فردية. (د) أحادية.

(٥) كل مما يأتى قواعد دوال زوجية ماعدا ....

(أ) د (س) = جا س (ب) د (س) = جتا س

(جـ) د (س) = $س^٢$ − ١ (د) د (س) = ١

(٦) القاعدة التى لا تمثل دالة زوجية فيما يلى هى ....

(أ) ص = $\frac{١}{س^٢}$ (ب) ص = قا س

(جـ) ص = $س^٢$ + جا س (د) ص = ٣ $س^٤$ + ٢٧

(٧) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{جا س}$ فإن : ....

(أ) د (س) = $\frac{١}{د (س)}$ (ب) د (س) = − د (− س)

(جـ) د (س) = د (− س) (د) د (− س) = د $\left(\frac{١}{س}\right)$



⑧ إذا كانت د دالة فردية ، د (١) = ٢ فأى من النقط الآتية تقع على منحنى د ؟

(أ) (-١ ، ٢) (ب) (-١ ، -٢) (جـ) (١ ، -٢) (د) (-١ ، ٠)

⑨ إذا كانت د دالة فردية ، أ ∈ مجال د فإن : د (أ) + د (- أ) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ د (أ) (جـ) ٢ أ (د) د (أ)

⑩ اذا كانت : د (س) دالة فردية فإن : د (أ) - د (- أ) = ...

(أ) صفر (ب) د (أ) (جـ) ٢ د (أ) (د) د (٢ أ)

⑪ اذا كانت : د (س) دالة زوجية فإن : د (أ) - د (- أ) = ...

(أ) صفر (ب) د (أ) (جـ) ٢ د (أ) (د) د (٢ أ)

⑫ إذا كانت د دالة زوجية ، ٢ ∈ مجال د فإن : د (٢) + د (-٢) = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ٢ د (٢)

⑬ الدالة د : د (س) = (س + جاس) (..............) تكون زوجية.

(أ) س٢ + ظاس (ب) ١ + جاس (جـ) ٤ - س٢ (د) س - جتاس

⑭ إذا كانت د دالة زوجية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (-٣ ، ٢ م + ١) وكانت د (٣) = ٥

فإن : م = ...

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

⑮ إذا كانت الدالة د دالة زوجية فى الفترة [أ ، ب] فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) - أ (جـ) ٢ أ (د) أ٢

⑯ إذا كانت : د دالة زوجية وكان د (٥) = ١ ، د (-٥) = ٣ - ك فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢

⑰ إذا كانت د دالة حيث د :]-٥ ، ٥[⟵ ح ، د (س) = س٢ فإن الدالة د (س) تكون ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) أحادية. (د) ليست زوجية وليست فردية.

⑱ إذا كانت : د دالة زوجية مجالها]-٥ ، ٥[فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = د (س - ٢)

هى ....

(أ) {٢} (ب) {١} (جـ) {٠} (د) {-١}



(١٩) إذا كانت : د (س) = أ س^{٣} + ب س + حـ ، د دالة فردية فإن : حـ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) −١

(٢٠) إذا كانت د : د (س) = س^{٢} + أ س + ٩ دالة زوجية فإن : أ = ...

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) صفر (د) −٦

(٢١) إذا كانت : د (س) = س^{٣} − س فإن : | د (س) + د (−س) | = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٢٢) إذا كانت د دالة زوجية وكان : د (س) + س^{٢} د (−س) = ٣ فإن : د (١) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٢

(٢٣) إذا كانت د دالة فردية فإن : $\frac{٢ د (س) + ٨ د (−س)}{٣ د (س)}$ = ... حيث د (س) ≠ صفر

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) −٤ (د) ٤

(٢٤) إذا كانت : د دالة فردية وكان س د (س) + س^{٣} د (−س) = ٢ فإن : د (٢) = ...

(أ) −٢ (ب) ٢ (جـ) $\frac{-١}{٣}$ (د) $\frac{١}{١٠}$

(٢٥) إذا كانت د : د (س) = أ س^{٣} + ب دالة فردية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (٢ ، ٨)
فإن : أ + ب^{٢} = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٥

(٢٦) الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = ٣ − س^{٢} (ب) د (س) = س^{٢} + ٣

(جـ) د (س) = جاس طاس (د) د (س) = س^{٢} + س

(٢٧) الدوال المعرفه بالقواعد الآتية كلها أحادية ما عدا ؟

(أ) د (س) = س^{٣} (ب) ر (س) = ٣ س (جـ) ق (س) = $\frac{١}{س}$ (د) ل (س) = س^{٢}

(٢٨) كل الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ليست أحادية ما عدا ....

(أ) د (س) = س^{٢} (ب) د (س) = ٥ (جـ) د (س) = س + ٢ (د) د (س) = جاس

(٢٩) إذا كان د ، ر دالتين حيث : د (س) = س^{٣} ، ر (س) = س + ٢
فإن : (ر ∘ د) هى دالة ....

(أ) أحادية. (ب) فردية. (جـ) زوجية. (د) خطية.

(٣٠) إذا كانت الدالة فى تناقص مستمر لجميع قيم س ∈ مجال الدالة فإن الدالة تكون ....

(أ) زوجية. (ب) فردية. (جـ) أحادية. (د) ليست أحادية.



(٣١) إذا كانت الدالة فى تزايد مستمر لجميع قيم س ∋ مجال الدالة فإن الدالة تكون ....

(أ) أحادية.　　(ب) زوجية.　　(جـ) فردية.　　(د) ليست أحادية.

(٣٢) الدالة د : د (س) = $س^٣$ + ٥ س متماثلة حول ....

(أ) محور السينات.　　(ب) محور الصادات.　　(جـ) نقطة الأصل.　　(د) لا يمكن أن تحدد.

(٣٣) الدالة د : د (س) = $س^٢$ + $س^٤$ + ١ متماثلة حول ....

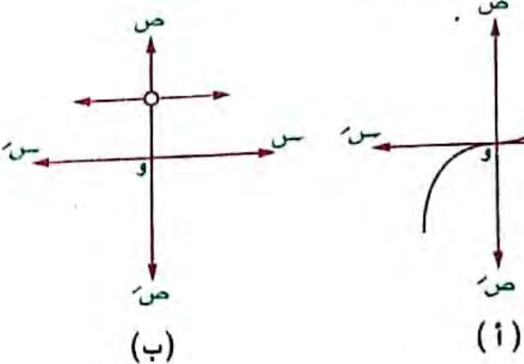
(أ) نقطة الأصل.　　(ب) محور السينات.

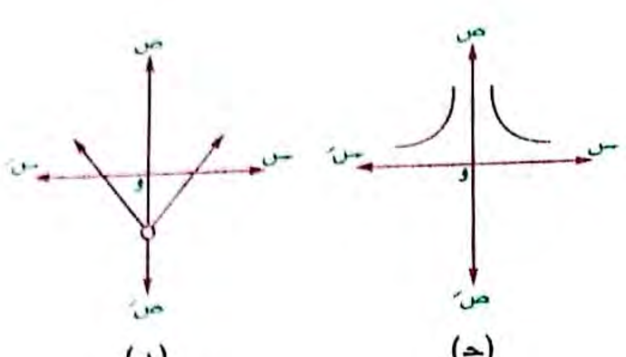
(جـ) محور الصادات.　　(د) ليس لها نقطة أو محور تماثل.

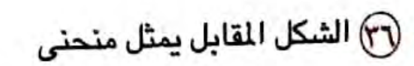
(٣٤) الدالة د : د (س) = جا ٣ س متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٠ ، ٠)　　(ب) (٣ ، ٠)　　(جـ) (−٣ ، ٠)　　(د) (−٣ ، ٣)

(٣٥) أى من الدوال الآتية ليست زوجية ؟






(٣٦) الشكل المقابل يمثل منحنى

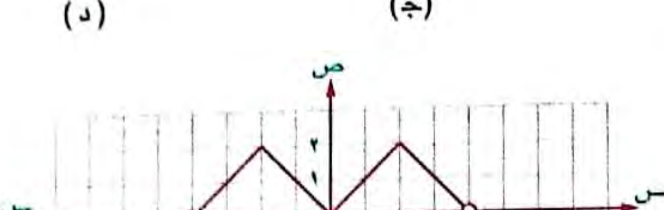
الدالة د ، فإن د تكون ....

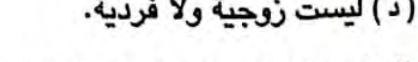
(أ) أحادية.

(ب) زوجية.

(جـ) فردية.

(د) ليست زوجية ولا فردية.




(٣٧) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

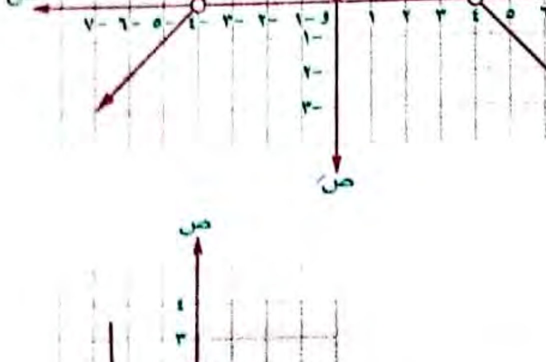
فإن د تكون ....

(أ) أحادية.

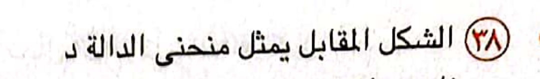
(ب) زوجية.

(جـ) فردية.

(د) ليست زوجية وليست فردية.







(٣٨) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن د تكون ....

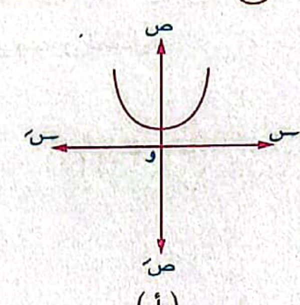
(أ) أحادية.

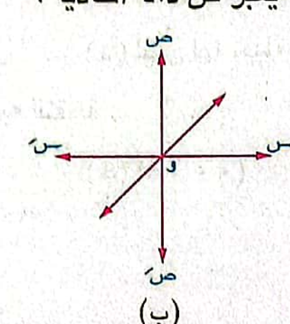
(ب) زوجية.

(جـ) فردية.

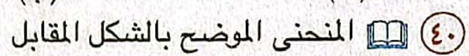
(د) ليست زوجية ولا فردية.

(٣٩) أى من الأشكال الآتية يعبر عن دالة أحادية ؟





(أ) (ب) (جـ) (د)



(٤٠) المنحنى الموضح بالشكل المقابل

متماثل حول المستقيم الذى معادلته ....

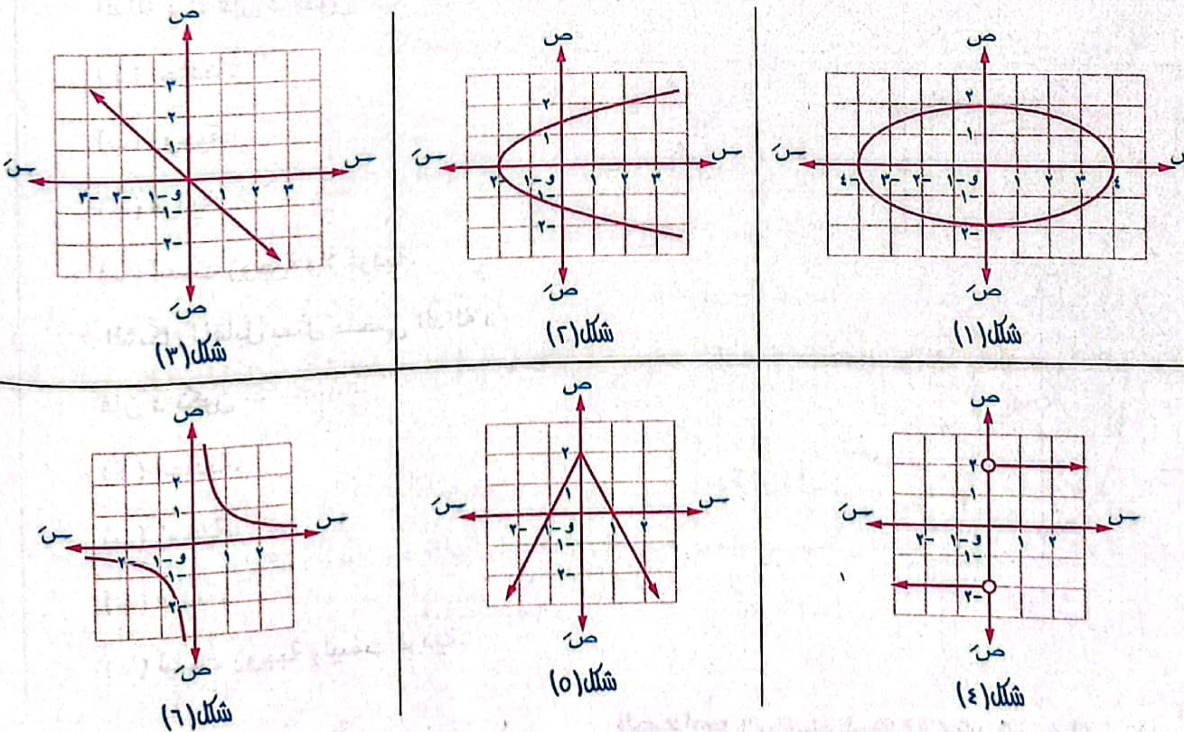
(أ) س = صفر (ب) ص = صفر

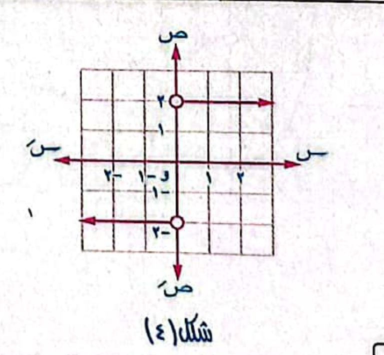
(جـ) ص = −٢ (د) س = ٢



ثانيًا الأسئلة المقالية

(١) فى كل من الأشكال الآتية اذكر ما إذا كان تماثل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل :



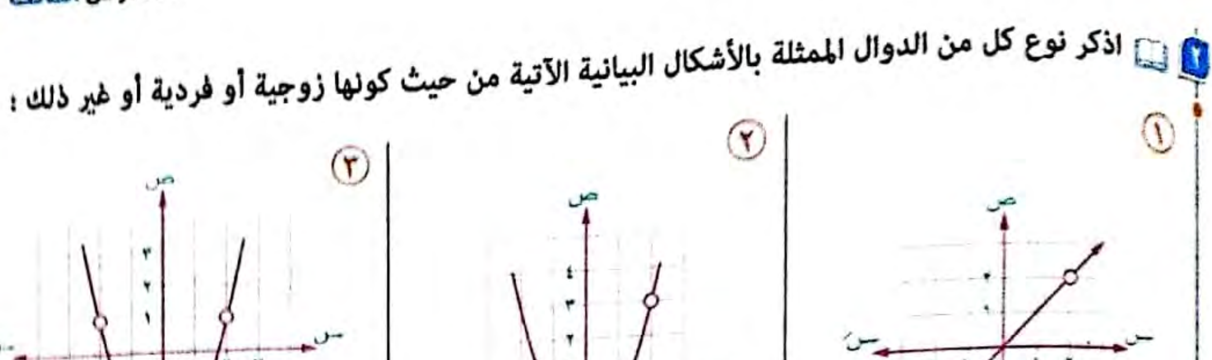


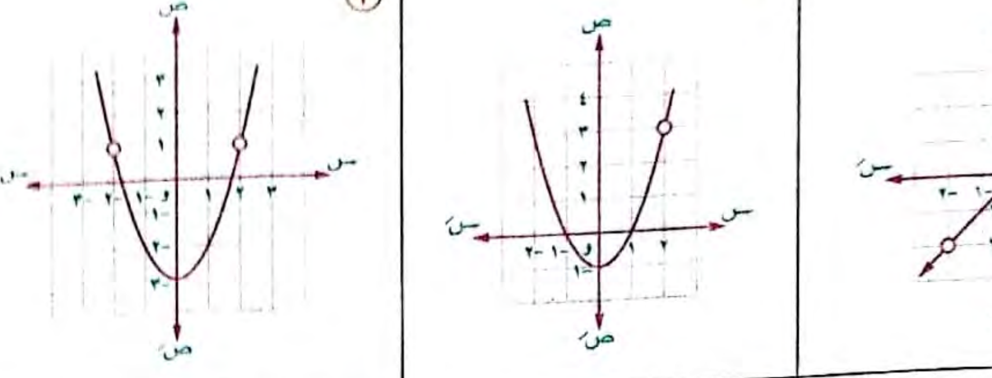
شكل(١) شكل(٢) شكل(٣)

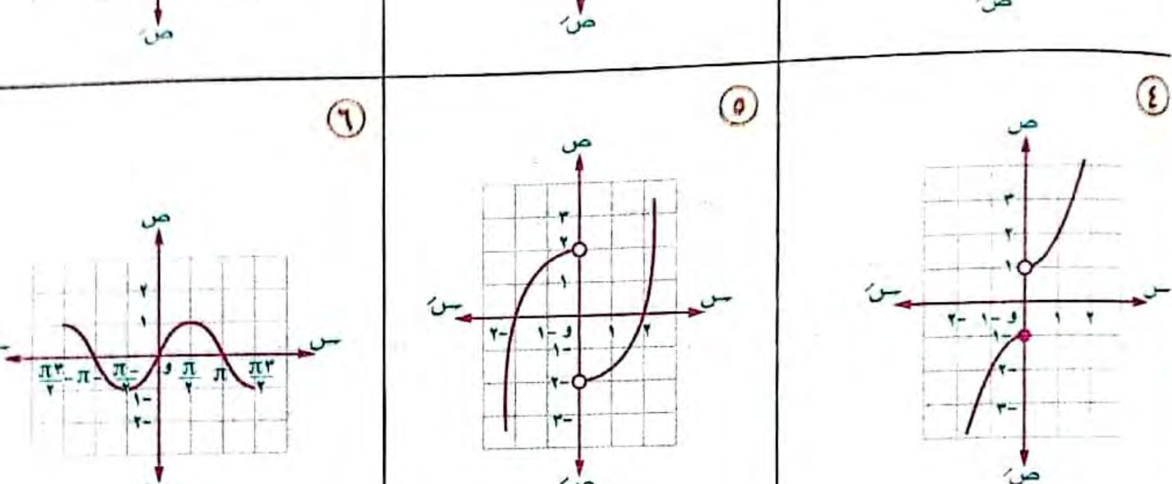
شكل(٤) شكل(٥) شكل(٦)



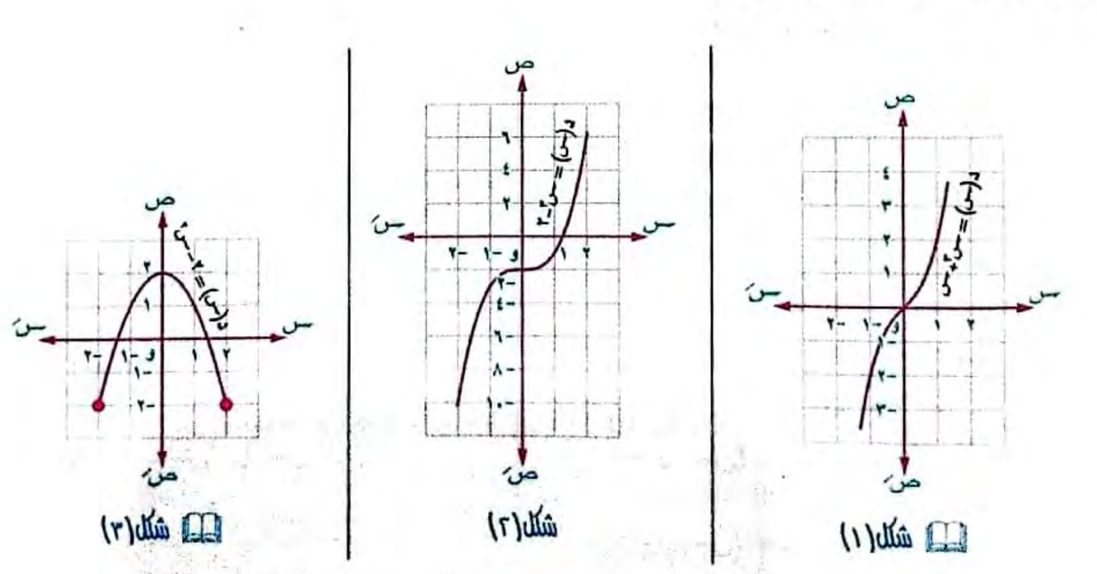
٢ اذكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :







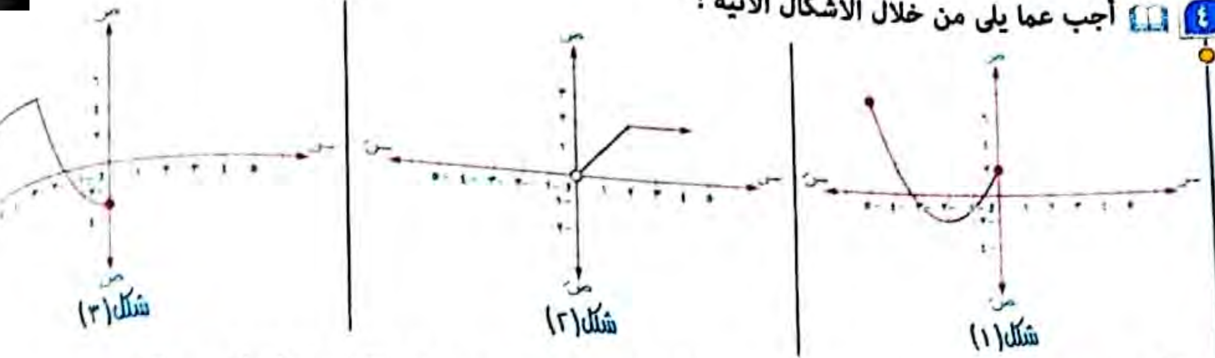
٣ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د ، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك وحقق إجابتك جبريًا.



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)



٤ أجب عما يلى من خلال الأشكال الآتية :



أولًا : أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) فى كراستك ، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها.

ثانيًا : أكمل رسم شكل (٢) فى كراستك ، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.

ثالثًا : حدد مجال ومدى الدالة فى كل حالة وبين أى الأشكال البيانية يمثل منحنى دالة أحادية.

---

٥ ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① $\text{د}(\text{س}) = ٥$

② $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٤ + \text{س}^٢ - ١$

③ $\text{د}(\text{س}) = ٣\text{س} - ٤\text{س}^٣$

④ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٤$

⑤ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٣(\text{س}^٢ - ١)$

⑥ $\text{د}(\text{س}) = (\text{س} - ٣)^٢ - ٧$

⑦ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ + ٢}{\text{س} - ٣}$

⑧ $\text{د}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}^٣ - \text{س}^٥}{\text{س}}$

⑨ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + ٣}$

⑩ $\text{د}(\text{س}) = (\text{س}^٢ + ١)^٣$

⑪ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^٢ + ٦}$

⑫ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}^٣ + \text{س}}$

⑬ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٣ - \frac{١}{\text{س}}$

⑭ $\text{د}(\text{س}) = \left(\text{س} - \frac{٢}{\text{س}}\right)^٣$

⑮ $\text{د}(\text{س}) = \left(\frac{\text{س}^٢}{٣} - \frac{٥}{\text{س}^٤}\right)^٥$

⑯ $\text{د}(\text{س}) = \left(\frac{١ - \text{س}}{١ + \text{س}}\right)^٢ - \left(\frac{١ + \text{س}}{١ - \text{س}}\right)^٢$

⑰ $\text{د}(\text{س}) = \left(\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}\right)^٥ + \left(\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}\right)^٥$

⑱ $\text{د}(\text{س}) = (\text{س}^٣ + ١)^٤ - (\text{س}^٣ - ١)^٤$

⑲ $\text{د}(\text{س}) = \text{س جتا س}$

⑳ $\text{د}(\text{س}) = \frac{٣\text{س}}{\text{ظا س}}$

㉑ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ \text{ جا } ٣\text{س}}{١ + \text{س}^٤}$

㉒ $\text{د}(\text{س}) = \frac{٣\text{س}^٢ - \text{جتا س}}{\text{س}^٢ - ٦\text{س}}$

㉓ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٢ \text{ جا}^٢ \text{ س}$

㉔ $\text{د}(\text{س}) = \text{س جا س}^٣$

㉕ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ + \text{ظا س}}{\text{س}^٤ + \text{جا س}}$

㉖ $\text{د}(\text{س}) = \text{جا س}^٢ - \text{جا}^٢ \text{ س}$

㉗ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٤ + \text{جا}^٦ \text{ س}$

㉘ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^٧ + \text{ظا}^٥ \text{ س}$

㉙ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{جا } ٣\text{س جتا } ٢\text{س}}{\text{قا س}}$

㉚ $\text{د}(\text{س}) = ٤^{\text{س}} + \text{جتا س} + ٢^{-٢\text{س}}$

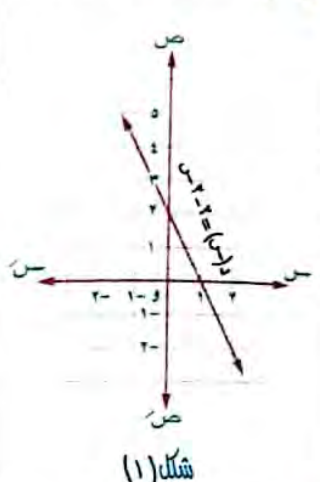


(٣١) د (س) = (ﺟﺘﺎ س + ﺟﺎ س - ١) (ﺟﺘﺎ س + ﺟﺎ س + ١)

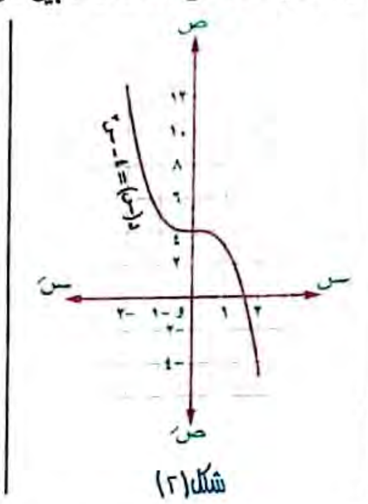
(٣٢) د (س) = { ٢ س ، س ≥ ٠ ؛ -٢ س ، س < ٠ }

(٣٣) د (س) = { ٢ س + $س^٢$ ، س ≤ ٠ ؛ ٢ س - $س^٢$ ، س > ٠ }

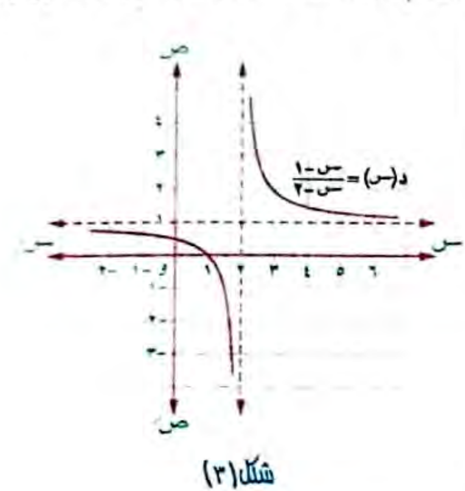
٦ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د ، بين من الرسم أن الدالة د أحادية وحقق ذلك جبريًا.



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

٧ أثبت أن الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دوال أحادية :

(١) د (س) = ٢ س - ٣

(٢) د (س) = ٤ - $س^٣$

(٣) د (س) = $\frac{٣}{٢ س + ٥}$

(٤) د (س) = $\frac{٣ س - ٥}{٤ س + ٣}$

٨ أثبت أن الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دوال ليست أحادية :

(١) د (س) = ٣

(٢) د (س) = $(س + ٣)^٢$

(٣) د (س) = $س^٢$ - ٥ س + ٦

(٤) د (س) = $\frac{١}{س^٢ - ٤}$

٩ فى كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية حدد ما إذا كانت الدالة أحادية أم لا مع توضيح السبب :

(١) د (س) = ٢ $س^٣$ - $س^٢$ - س - ٣

(٢) د (س) = $س^٤$ + ٢ $س^٢$ + ١

١٠ اذكر نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

(١) د : ح ⟵ ح ، د (س) = س + ٢

(٢) د : [-٢ ، ٢] ⟵ ح ، د (س) = ٣ $س^٢$

(٣) د : $ح^+$ ⟵ $ح^+$ حيث د (س) = $س^٢$

(٤) د : د (س) = $س^٢$ حيث س ∈ ح - {٣}

١١ إذا كانت د دالة مجالها ح أوجد قيمة : $\frac{٧ د (-٥) + ٣ د (٥)}{٢ د (-٥)}$ إذا كان :

(١) د دالة فردية.

(٢) د دالة زوجية.

٢٠ ، ٥



١٢ إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ ، $ر_١$ ، $ر_٢$ دوال حقيقية حيث $د_١(س) = س^٤$
، $د_٢(س) = جا^٥ س$ ، $ر_١(س) = ٢ س^٣$ ، $ر_٢(س) = جا^٢ س$
فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك :

① $د_١ + ر_٢$	② $د_١ - د_٢$	③ $ر_١ + ر_٢$
④ $د_١ \times ر_٢$	⑤ $ر_١ \times ر_٢$	⑥ $\frac{د_٢}{د_١}$

١٣ مثل بيانيًا منحنى يحقق الشروط الآتية :
① يمر بالنقط (٠ ، −٢) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٧) ويمثل دالة زوجية.
② يمر بالنقط (٠ ، ٠) ، (−٢ ، ١) ، (−٣ ، ٥) ويمثل دالة فردية.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطة (٢ ، ٣) تنتمى لبيان الدالة د
فأى النقط الآتية يمكن أن تنتمى لبيان د ؟
(أ) (٥ ، ٣) (ب) (٢ ، −١) (جـ) (٣ ، ٢) (د) كل ما سبق.

② إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطتان (٢ ، أ) ، (٣ ، ب) تنتميان للدالة د
فأى مما يأتى صحيح دائمًا ؟
(أ) أ < ب (ب) أ = ب (جـ) أ ≠ ب (د) أ + ب = ٥

③ إذا كانت د دالة فردية وكان د (١) = ك وكانت د (س + ٢) = د (س) + د (٢) فإن : د (٣) = ...
(أ) صفر (ب) ٣ ك (جـ) ٦ ك (د) ٩ ك

④ إذا كانت : د (س) = $\frac{١ + س}{١ - س}$ وكانت ر (س) = $\frac{١ - س}{١ + س}$ فإن كل من مجموع الدالتين وحاصل ضربهما يكون دالة ....
(أ) زوجية. (ب) فردية.
(جـ) أحادية. (د) ليست زوجية وليست فردية.

⑤ إذا كانت د دالة حقيقية وكانت س ، − س ∈ مجال الدالة
فإن الدالة ر (س) = د (س) + د (− س) تكون دائمًا ....
(أ) فردية. (ب) زوجية.
(جـ) ليست زوجية وليست فردية. (د) أحادية.

⑥ إذا كانت : د معرفة على ح وكانت ٣ د (س) + ٢ د (− س) = $س^٢$ − جا س فإن : د تكون ....
(أ) فردية. (ب) زوجية.
(جـ) ليست زوجية وليست فردية. (د) ليست أحادية.

⑦ إذا كانت : د (س) = $س^٣$ ، ر (س) = $س^٢$ + ١ فأى مما يأتى يكون دالة فردية ؟
① (د × ر) ② (د ∘ ر) ③ (ر ∘ د)
(أ) ① فقط. (ب) ② ، ③ (جـ) ① ، ② (د) ① ، ③







الدرس 4

التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال

تمثيل الدالة الخطية

* نعلم أن الدالة الخطية د : ح ⟵ ح حيث د (س) = أ س + ب يمثلها بيانيًا خط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ب) وميله = أ

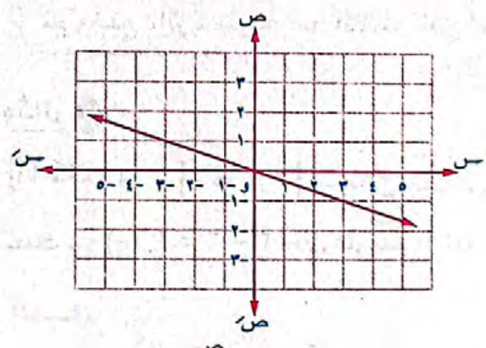
مثال ١

مثل بيانيًا الدالة د فى كل مما يأتى واستنتج من الرسم مدى الدالة :

١ د : ح ⟵ ح ، د (س) = $-\frac{1}{2}$ س   ٢ د : [-١ ، ٢[⟵ ح ، د (س) = ٢ س - ١

٣ د :]- ∞ ، ١[⟵ ح ، د (س) = ٢ س - ١

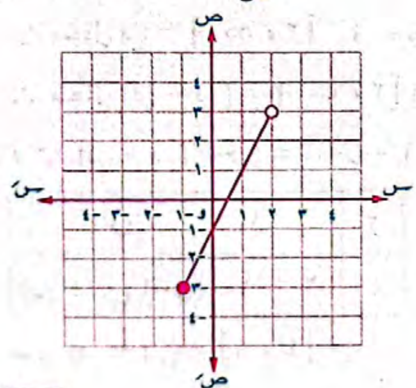
الحل



١ ∵ المجال = ح

∴ الدالة يمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

وميله = $\frac{-1}{2}$ ، المدى = ح



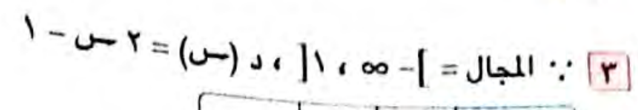
٢ ∵ المجال = [-١ ، ٢[، د (س) = ٢ س - ١

س	-١	٠	②
د (س)	-٣	-١	③

لاحظ أن : النقطة (٢ ، ٣) ∉ بيان الدالة لذلك استبعدنا هذه النقطة من الشكل البيانى بوضع دائرة مفرغة عندها.

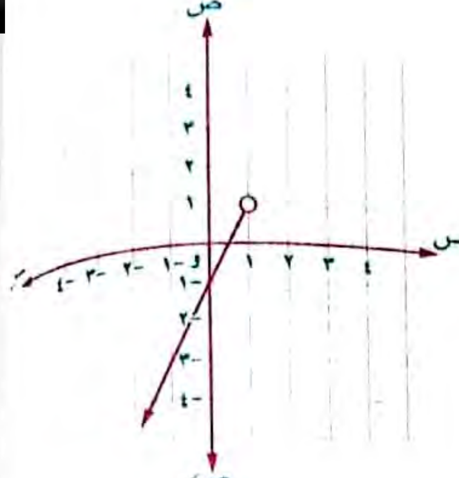
، من الرسم : المدى = [-٣ ، ٣[





٣ ∵ المجال =]- ∞ ، ١[، د (س) = ٢ س - ١

س	①	٠	-١
د (س)	①	-١	-٣



لاحظ أن : النقطة (١ ، ١) ∌ بيان الدالة لذلك استبعدناها من الشعاع الممثل للدالة بوضع دائرة مفرغة عندها.

من الرسم : المدى =]- ∞ ، ١[

مثال ٢

مثل بيانيًا الدالة د : ح - {٠} ⟵ ح ، د (س) = $\frac{س^٢ - س}{س}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

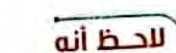
الحـــل

∵ مجال الدالة د = ح - {٠}

، د (س) = $\frac{س^٢ - س}{س}$ = $\frac{س (س - ١)}{س}$ = س - ١ يمثلها خط مستقيم

س	-١	⓪	١
د (س)	-٢	(-١)	٠

، المدى = ح - {-١}

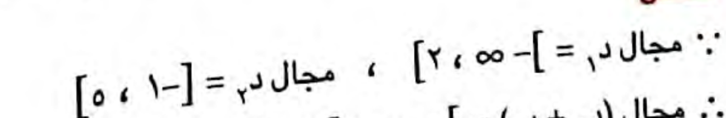


لاحـظ أنه

تم وضع دائرة مفرغة عند النقطة التى إحداثيها السينى س = ٠ لأنها لا تنتمى للمجال.

مثال ٣

إذا كانت $د_١$:]- ∞ ، ٢] ⟵ ح حيث $د_١$ (س) = ٣ س - ١ ، $د_٢$: [-١ ، ٥] ⟵ ح



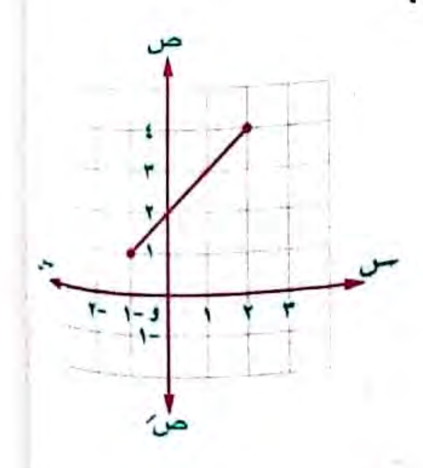
حيث $د_٢$ (س) = ٣ - ٢ س فارسم الدالة $د_١$ + $د_٢$ ومن الرسم استنتج مداها.

الحـــل

∵ مجال $د_١$ =]- ∞ ، ٢] ، مجال $د_٢$ = [-١ ، ٥]

∴ مجال ($د_١$ + $د_٢$) =]- ∞ ، ٢] ∩ [-١ ، ٥] = [-١ ، ٢]

، ∵ ($د_١$ + $د_٢$) (س) = ٣ س - ١ + ٣ - ٢ س = س + ٢



س	-١	٠	٢
($د_١$ + $د_٢$) (س)	١	٢	٤

مدى ($د_١$ + $د_٢$) = [١ ، ٤]



تمثيل الدالة التربيعية

مثال ٤

مثّل بيانيًا الدالة د : د (س) = س^{٢} − س حيث س ∈]−١ ، ٣[

الحل

∵ د (س) = س^{٢} − س ، المجال =]−١ ، ٣[

∴ الإحداثى السينى لرأس المنحنى = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{١}{٢}$

، ∵ د $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ = −$\frac{١}{٤}$

∴ رأس المنحنى هو $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٤}\right)$

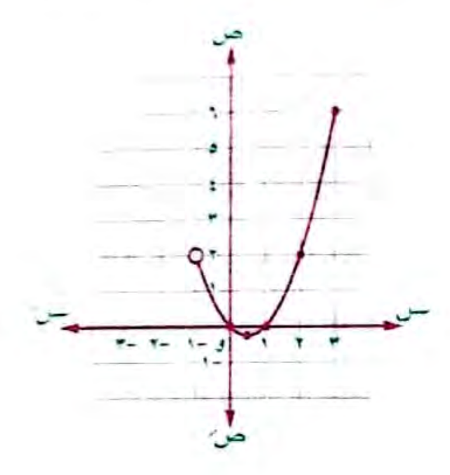
تذكر أن

نقطة رأس منحنى الدالة التربيعية

د : د (س) = أس^{٢} + ب س + جـ

هو $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

س	(−١)	٠	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٣
د (س)	(٢)	٠	$\frac{-١}{٤}$	٠	٢	٦



من الرسم :

* المدى = [−$\frac{١}{٤}$ ، ٦[

* الدالة تناقصية فى]−١ ، $\frac{١}{٢}$[وتزايدية فى]$\frac{١}{٢}$ ، ٣[

تمثيل الدالة مجزأة المجال (ذات المقاطع)

مثال ٥

مثّل بيانيًا الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢ - س ، & -١ \le س < ٢ \\ س - ٢ ، & ٢ \le س < ٥ \end{cases}$ ومن الرسم :

١ عين مجال ومدى الدالة د   ٢ ابحث اطراد الدالة د

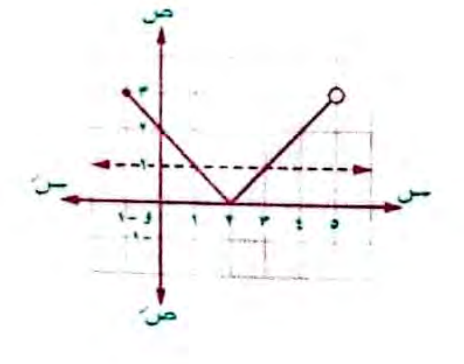
٣ اذكر نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك مع بيان السبب.

٤ اذكر هل الدالة د أحادية أم لا مع بيان السبب.

الحل

الدالة د معرفة بقاعدتين

• $د_{١}$ (س) = ٢ − س حيث س ∈ [−١ ، ٢[



س	−١	٠	(٢)
$د_{١}$ (س)	٣	٢	(٠)



• $د_٢$ (س) = س - ٢ حيث س ∈ [٢ ، ٥[

س	٢	٣	⑤
$د_٢$ (س)	٠	١	③

لاحظ أن

٢ ∌]-١ ، ٢[بينما ٢ ∈ [٢ ، ٥[

لذلك ٢ ∈ مجال د

وبالتالى (٢ ، ٠) ∈ بيان د

أى لا نضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢ ، ٠) فى الرسم

١ مجال د =]-١ ، ٢[∪ [٢ ، ٥[=]-١ ، ٥[، مدى د = [٠ ، ٣]

٢ الدالة د تناقصية فى الفترة]-١ ، ٢[وتزايدية فى الفترة]٢ ، ٥[

٣ الدالة ليست زوجية وليست فردية لأنها غير متماثلة حول محور الصادات وغير متماثلة حول نقطة الأصل

٤ الدالة د ليست أحادية لوجود خط أفقى يقطع الشكل البيانى للدالة د فى نقطتين.

الصور الأساسية لبعض الدوال

سوف نتعرف الآن على التمثيل البيانى للصور البسيطة (الصور الأساسية) لبعض الدوال الحقيقية وذلك تمهيدًا لاستخدامها فى تمثيل الدوال الحقيقية بصورها المختلفة فى الدرس القادم.

١ الصور الأساسية لبعض دوال كثيرات الحدود

	الدالــة الثابتــة	دالة الدرجة الأولى (الخطية)
الصورة الأساسية	د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ حيث أ ∈ ح	د : ح ⟵ ح ، د (س) = س
التمثيل البيانى		
المدى والاطراد والخواص	* مدى الدالة = {أ} * الدالة ثابتة على مجالها. * الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات). * الدالة ليست أحادية.	* مدى الدالة = ح * الدالة تزايدية على مجالها ح * الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل) * الدالة أحادية.



	دالة الدرجة الثانية (التربيعية)	دالة الدرجة الثالثة (التكعيبية)
الصورة الأساسية	د : ح ⟵ ح ، د (س) = س^{2}	د : ح ⟵ ح ، د (س) = س^{3}
التمثيل البيانى		
المدى والاطراد والخواص	* مدى الدالة = [٠ ، ∞[* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠] ، وتزايدية فى [٠ ، ∞[* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات). * الدالة ليست أحادية.	* مدى الدالة = ح * الدالة تزايدية على مجالها ح * الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل). * الدالة أحادية.

٢ الصورة الأساسية لدالة المقياس (دالة القيمة المطلقة)

- الصورة الأساسية :

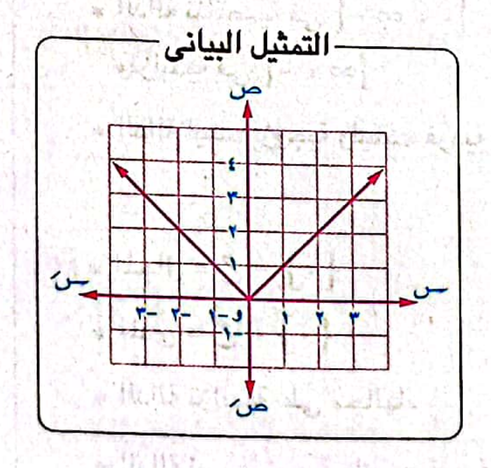
د : ح ⟵ ح ، د (س) = | س |

ويعاد تعريفها كالتالى : د (س) = { س ، س ≥ ٠ ؛ −س ، س < ٠

- المدى والاطراد والخواص :

* مدى الدالة = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠] وتزايدية فى [٠ ، ∞[
* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات).
* الدالة ليست أحادية.

التمثيل البيانى





٣ الصورة الأساسية للدالة الكسرية

التمثيل البيانى

• **الصورة الأساسية :**

د : ح − {٠} ⟵ ح ، د (س) = $\frac{١}{س}$

نظرًا لاقتراب كل من جزئى المنحنى من المحورين دون أن يقطعهما يقال إن المحورين $\overleftrightarrow{سس}$ ، $\overleftrightarrow{صص}$ هما خطا التقارب للمنحنى.

• **المدى والاطراد والخواص :**

* مدى الدالة = ح − {٠}

* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[وتناقصية أيضًا فى]٠ ، ∞[

* الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل)   * الدالة أحادية.

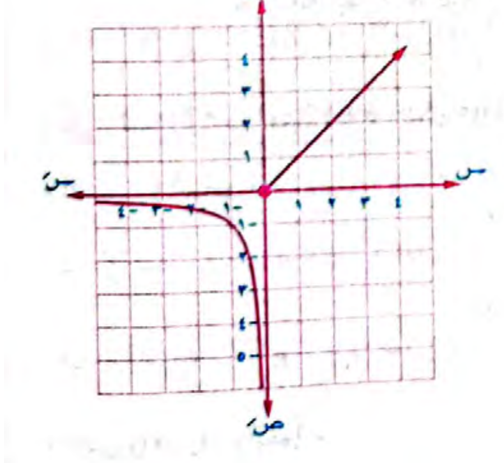
مثال ٦

مثل بيانيًا كلًا من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

[١] د (س) = { $\frac{١}{س}$ ، س < ٠ ؛ |س| ، س ≥ ٠ }

[٢] د (س) = { $س^٣$ ، س < ٠ ؛ س ، س > ٠ }

الحل



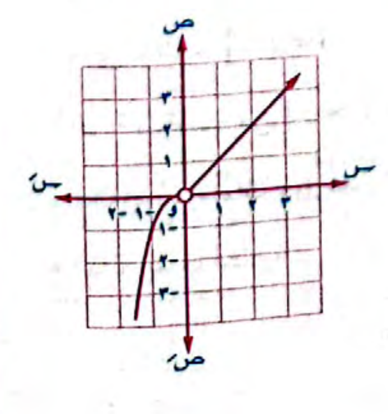
[١] * المجال = ح

* المدى = ح

* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[

وتزايدية فى]٠ ، ∞[

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.



[٢] * المجال = ح − {٠}

* المدى = ح − {٠}

* الدالة تزايدية على مجالها.

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.



تمـارين 4

على التمثيل البيانى للدوال الأساسية ورسم الدالة مجزأة المجال


اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى ● فهم ○ تطبيق ⁂ مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = ٥ فإن مجال الدالة د هو ....

(أ) ح (ب) $ح^+$ (جـ) {٥} (د) ح − {٥}

② إذا كانت : د (س) = ٧ فإن مدى الدالة د هو ....

(أ) ح (ب) $ح^+$ (جـ) {٧} (د) ح − {٧}

③ مدى الدالة د : د (س) = { ٠ ، س ≤ ٠ ؛ ١ ، س > ٠ هو ....

(أ) {١} (ب) {٠} (جـ) ح (د) {٠ ، ١}

④ مدى الدالة الممثلة بالشكل المقابل هو ....

(أ) {١} (ب) {١ ، −١} (جـ) {−١} (د) ح

⑤ مدى الدالة د : د (س) = $\frac{٣س^٢ - ٣}{س^٢ - ١}$ هو ....

(أ) ح − {١ ، −١} (ب) ح − {٣ ، −٣} (جـ) {٣ ، −٣} (د) {٣}

⑥ مدى الدالة د (س) = $\frac{س^٢ - ٣س}{س}$ حيث س ≠ ٠ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {٠} (جـ) {٠} (د) ح − {−٣}

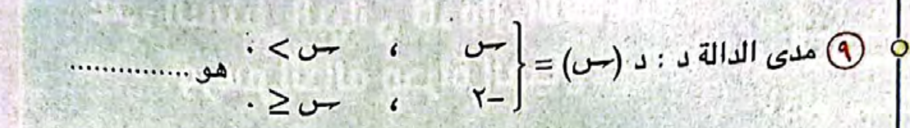
⑦ مدى الدالة د : د (س) = $\frac{٢س^٢ - ٢س}{س^٢ - ١}$ هو ....

(أ) ح − {١ ، −١} (ب) ح − {٢ ، −٢} (جـ) $ح^+$ (د) $ح^+$ − {٢}

⑧ مدى الدالة د :]−٢ ، ٣[⟵ ح ، د (س) = $س^٢$ هو ....

(أ) [٤ ، ٩[(ب) $ح^+$ (جـ) [٠ ، ٩[(د) [٠ ، ٤]





(٩) مدى الدالة د : د(س) = { س ، س > ٠ ؛ −٢ ، س ≤ ٠ } هو ....

(أ) ح$^+$ (ب) ح$^+$ − {−٢} (ج) ح$^+$ ∪ {−٢} (د) ح

(١٠) 📖 الدالة د حيث د(س) = { ٢ ، س > ٠ ؛ −٢ ، س < ٠ } متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (−٢ ، ٠) (ج) (٠ ، ٠) (د) (٢ ، −٢)

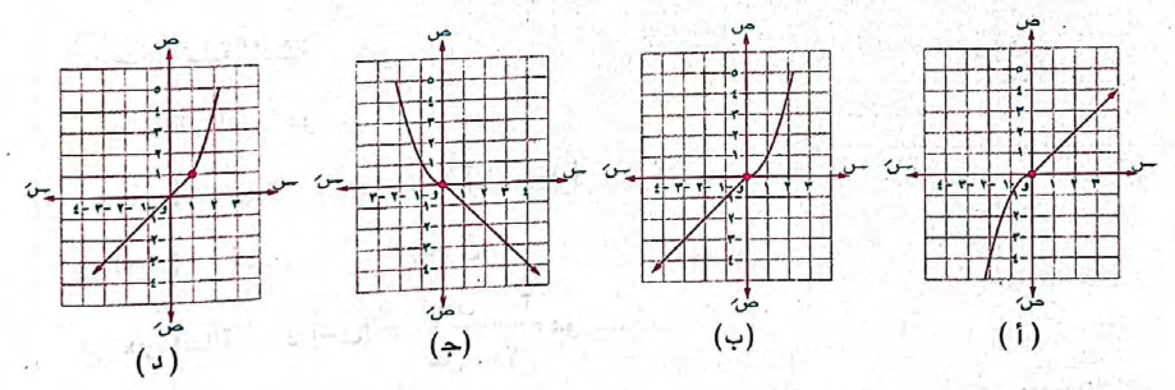
(١١) محور تماثل الدالة د : د(س) = س^٢ هو المستقيم ....

(أ) ص = صفر (ب) ص = س (ج) ص = − س (د) س = صفر

(١٢) الدالة د : د(س) = { س^٣ ، س < ٠ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س > ٠ } تكون تزايدية فى ....

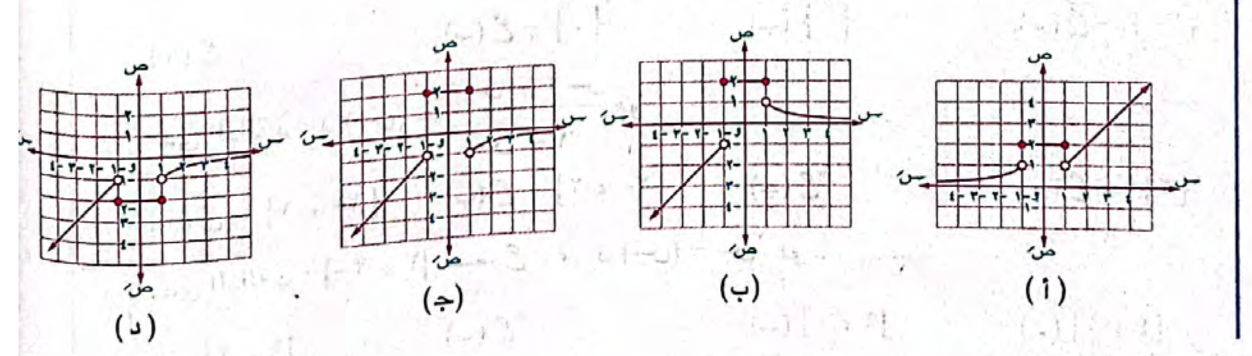
(أ) ح (ب) ح$^-$ (ج) ح$^+$ (د) ح − {٠}

(١٣) منحنى الدالة د : د(س) = { س^٢ ، س > ٠ ؛ س ، س ≤ ٠ } هو ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

(١٤) منحنى الدالة د : د(س) = { س ، س < −١ ؛ ٢ ، −١ ≤ س ≤ ١ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س > ١ } هو ....

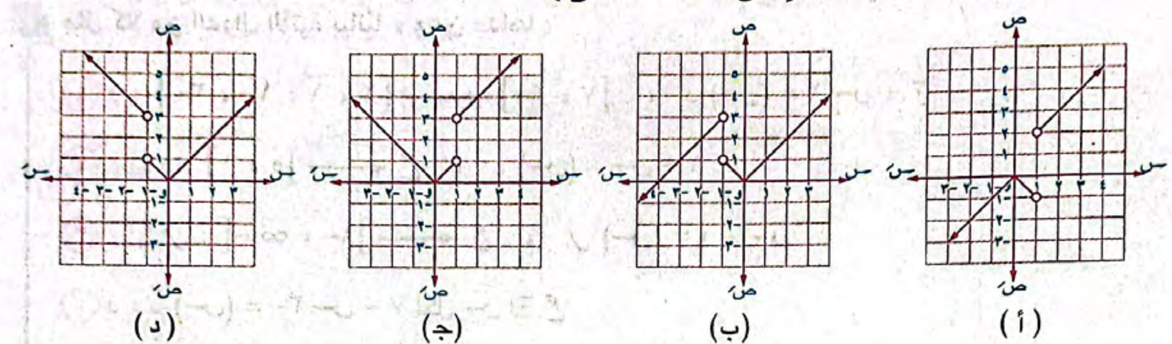


(أ) (ب) (جـ) (د)



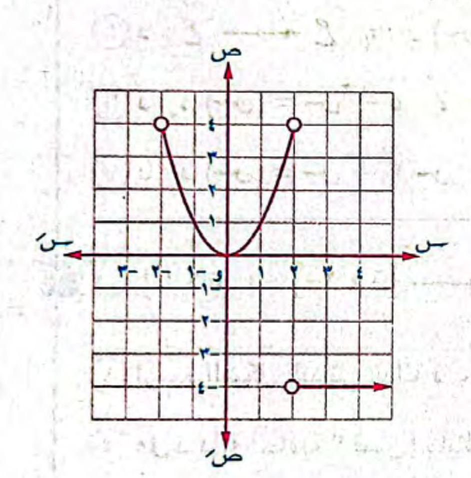


(١٥) منحنى الدالة د : د (س) = { |س| ، س < ١ ؛ س + ٢ ، س > ١ } هو ....



(١٦) فى الشكل المقابل :

منحنى الدالة د المعرفة بالقاعدة د (س) = ...



(أ) { $س^٢$ ، −٢ < س < ٢ ؛ −٤ ، س < −٢ }

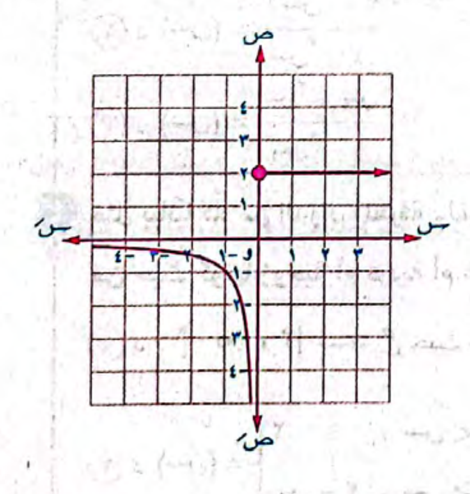
(ب) { $س^٢$ ، −٢ < س < ٢ ؛ −٤ ، س > ٢ }

(جـ) { $س^٢$ ، −٢ ≤ س ≤ ٢ ؛ −٤ ، س > ٢ }

(د) { $س^٢$ ، −٢ < س < ٢ ؛ −٤ ، س > ٢ }

(١٧) فى الشكل المقابل :

منحنى الدالة د المعرفة بالقاعدة د (س) = ...



(أ) { ٢ ، س > ٠ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س < ٠ }

(ب) { ٢ ، س ≥ ٠ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س < ٠ }

(جـ) { ٢ ، س < ٠ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س ≥ ٠ }

(د) { ٢ ، س ≥ ٢ ؛ $\frac{١}{س}$ ، س < ٢ }



ثانيًا الأسئلة المقالية

١ مثل كلاً من الدوال الآتية بيانيًا ، وعين مداها :

① د : {-٣ ، -١ ، ١ ، ٢} ⟵ [-٣ ، ٧] ، د(س) = ٢ س + ٣

② د : [١ ، ٥[⟵ ح ، د(س) = س + ١

③ ر :]-∞ ، -١] ⟵ ح ، ر(س) = ١ - س

④ د : د(س) = -٣ س + ٧ لكل س ∈ ح

⑤ د : ح⁻ ⟵ ح ، د(س) = س^{٢}

⑥ د : د(س) = س^{٢} - ٥ ، س ≥ ٠

⑦ د : د(س) = س^{٢} - ٣ س ، س ∈ [-٣ ، ٢]

---

٢ إذا كانت د : [-٢ ، ٦] ⟵ ح ، د(س) = { ٤ - س عندما -٢ ≤ س < ١ ، س عندما ١ ≤ س ≤ ٦ }

① ارسم الشكل البيانى للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

② هل د دالة أحادية ؟ فسر إجابتك.

---

٣ مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وابحث تماثلها :

① د(س) = $\frac{٣ س^{٢} - ٣}{س^{٢} - ١}$

② د(س) = $\frac{٤ - س^{٢}}{س + ٢}$

③ د(س) = $\frac{س^{٣} - س}{س^{٢} - ١}$

④ د(س) = $\frac{س^{٤} - س^{٢}}{س^{٢} - ١}$

---

٤ مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وابحث تماثلها :

① د :]-∞ ، ٣[⟵ ح حيث د(س) = ٢

② د(س) = { ٢ ، س ≤ ٠ ؛ -٣ ، س > ٠ }

③ د(س) = { ٢ ، س > ١ ؛ س - ٢ ، س ≤ ١ }

④ د(س) = { س + ٢ ، س ∈ [-٢ ، ١] ؛ -س + ٤ ، س ∈]١ ، ٤] }

⑤ د(س) = { ٤ ، س < -٢ ؛ س^{٢} ، س ≥ -٢ }

⑥ د(س) = { س^{٢} ، س < ٠ ؛ س ، س ≥ ٠ }



⑦ 📖 $د(س) = \begin{cases} س^{٣} & ، \quad س < ١ \\ ١ & ، \quad س > ١ \end{cases}$

⑧ 📖 $د(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، \quad س < ١ \\ ٢ - س & ، \quad س \geq ١ \end{cases}$

⑨ 📖 $د(س) = \begin{cases} |س| & ، \quad س \leq ٠ \\ \frac{١}{س} & ، \quad س > ٠ \end{cases}$

⑩ 📖 $د(س) = \begin{cases} |س| & ، \quad س \leq ٠ \\ س^{٢} & ، \quad س > ٠ \end{cases}$

⑪ $د(س) = \begin{cases} ٣ & ، \quad س \leq -٣ \\ |س| & ، \quad -٣ < س < ٣ \\ ٣ & ، \quad س \geq ٣ \end{cases}$

⑫ $د(س) = \begin{cases} \frac{٣س - ٦}{٢ - س} & ، \quad س > ٢ \\ ٢ & ، \quad س < ٢ \end{cases}$

⑬ $د(س) = \begin{cases} ٢ & ، \quad -٣ \leq س \leq -١ \\ ٠ & ، \quad -١ < س < ١ \\ ٢ & ، \quad ١ \leq س \leq ٣ \end{cases}$

⑭ $د(س) = \begin{cases} -س - ١ & ، \quad -٤ \leq س < -٢ \\ ١ & ، \quad -٢ \leq س \leq ٢ \\ س - ١ & ، \quad ٢ < س \leq ٤ \end{cases}$

---

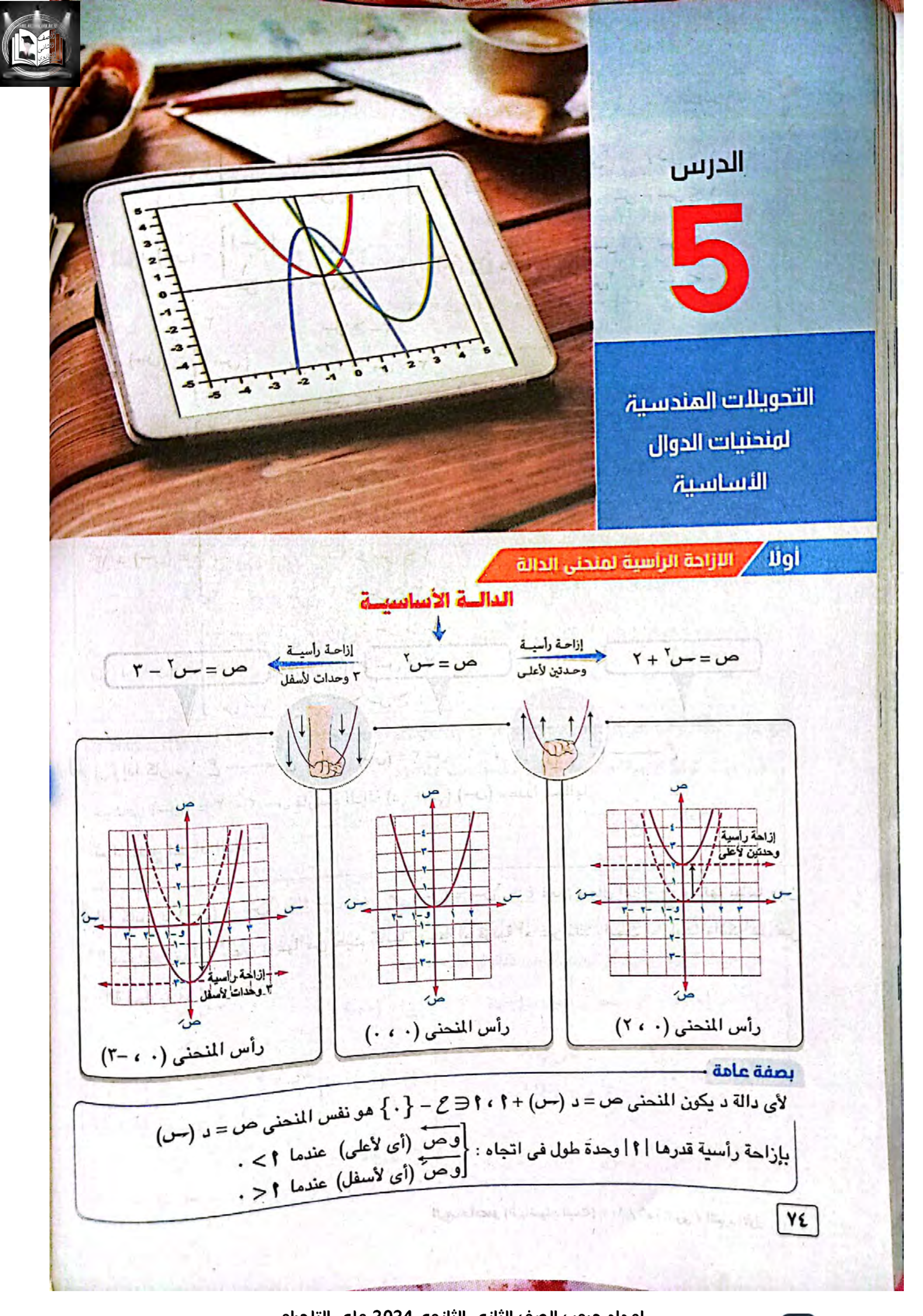
٥ 📖 إذا كان $د_{١}$: ح ⟵ ح حيث $د_{١}(س) = ٣س - ١$ ، $د_{٢}$: [−٢ ، ٣] ⟵ ح

حيث $د_{٢}(س) = ٣ - ٢س$ فارسم الدالة $(د_{١} + د_{٢})(س)$ محددًا مجالها

ثم استنتج اطراد الدالة.

---

٦ إذا كانت $د(س) = س^{٣} - ٤س$ ، $ر(س) = س^{٢} - ٤$ فعين مجال الدالة $\frac{د}{ر}$ ومثلها بيانيًا ومن الرسم عين مداها وعين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وابحث اطرادها واذكر هل هى دالة أحادية أم لا.



الدرس 5

التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال الأساسية

أولاً الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة

الدالة الأساسية

رأس المنحنى (٠ ، ٢)

رأس المنحنى (٠ ، ٠)

رأس المنحنى (٠ ، −٣)

بصفة عامة

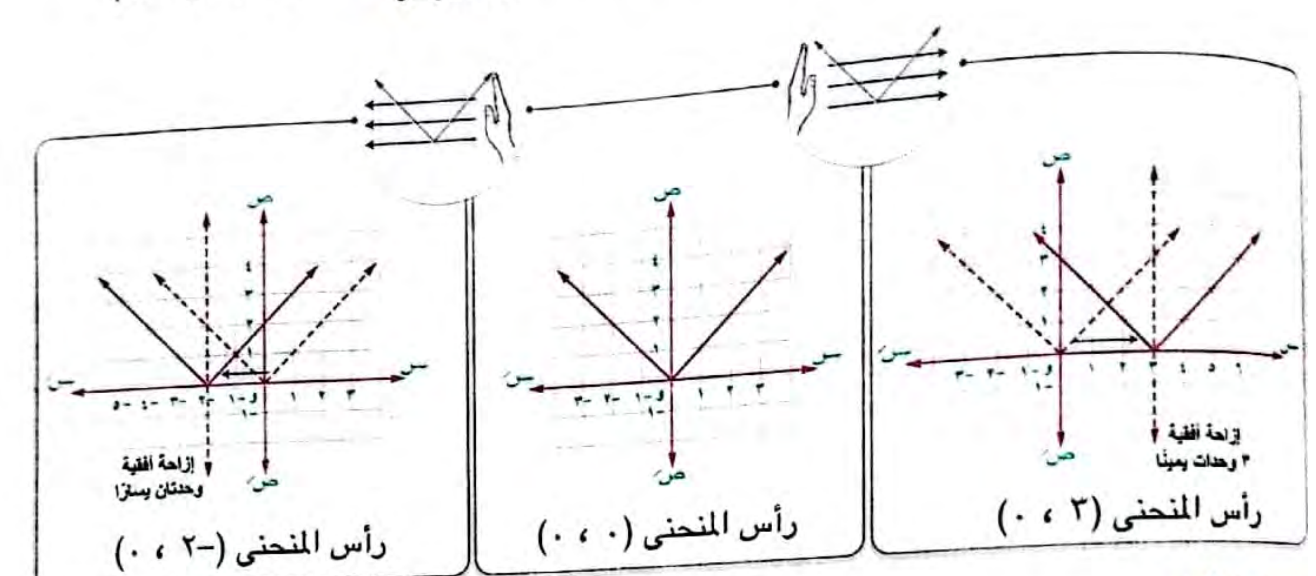
لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (س) + أ ، أ ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د (س)

بإزاحة رأسية قدرها |أ| وحدة طول فى اتجاه :
- $\overrightarrow{وص}$ (أى لأعلى) عندما أ > ٠ .
- $\overrightarrow{وص'}$ (أى لأسفل) عندما أ < ٠ .

ثانيًا الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة

الدالـة الأساسية





رأس المنحنى (٣ ، ٠) رأس المنحنى (٠ ، ٠) رأس المنحنى (−٢ ، ٠)

بصفة عامة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (س + أ) ، أ ∈ ح − {٠} هو نفس المنحنى ص = د (س)

بإزاحة أفقية قدرها |أ| وحدة طول فى اتجاه:
- و س→ (يمينًا) عندما أ < ٠ .
- و←س (يسارًا) عندما أ > ٠ .

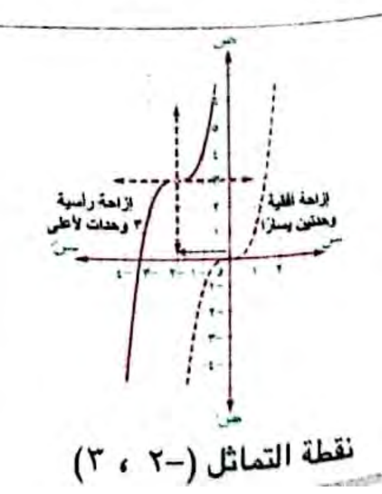
ثالثًا الإزاحة الأفقية متبوعة بالإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة

الدالـة الأساسية

ص = س^٣

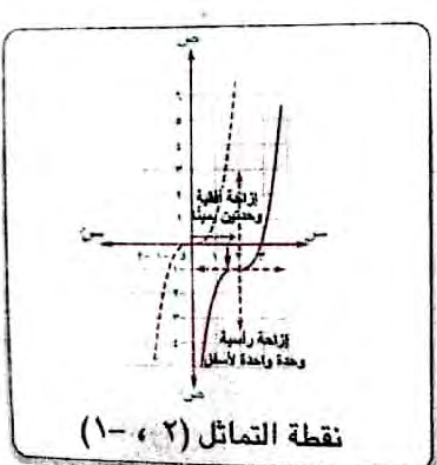
إزاحة أفقية وحدتين يسارًا ثم إزاحة رأسيه ٣ وحدات لأعلى: ص = (س + ٢)^٣ + ٣

إزاحة أفقية وحدتين يمينًا ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة لأسفل: ص = (س − ٢)^٣ − ١



نقطة التماثل (−٢ ، ٣)

نقطة التماثل (٠ ، ٠)



نقطة التماثل (٢ ، −١)



بصفة عامة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د (س + أ) + ب حيث أ ، ب ∈ ح - {٠} هو نفس المنحنى ص = د(س) بإزاحة أفقية مقدارها | أ | وحدة طول فى اتجاه و س← إذا كان أ > ٠ أو فى اتجاه و س′ إذا كان أ < ٠ ثم إزاحة رأسية مقدارها | ب | وحدة طول فى اتجاه و ص← إذا كان ب > ٠ أو فى اتجاه و ص′ إذا كان ب < ٠

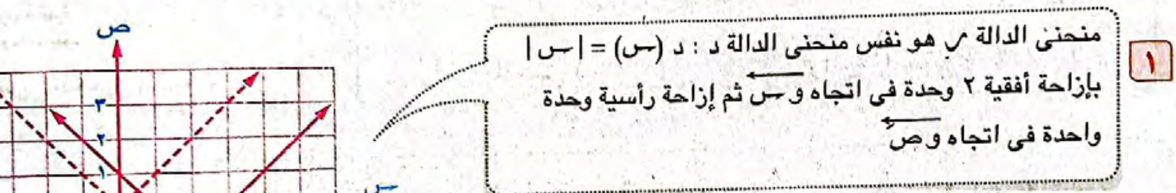
مثال ①

استخدم منحنيات الدوال الأساسية لرسم منحنيى الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ومن الرسم عين مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك :

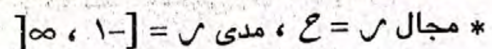
١ ر (س) = | س - ٢ | - ١

٢ ر (س) = (٢ - س)^2 + ١

الحل

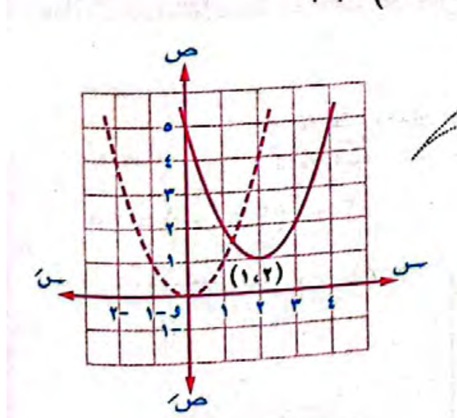


١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = | س | بإزاحة أفقية ٢ وحدة فى اتجاه و س← ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة فى اتجاه و ص′



* مجال ر = ح ، مدى ر = [-١ ، ∞[
* الدالة ر تناقصية فى]- ∞ ، ٢[وتزايدية فى]٢ ، ∞[
* الدالة ر ليست زوجية وليست فردية.

٢ ∵ (٢ - س)^2 = (س - ٢)^2 ∴ ر (س) = (س - ٢)^2 + ١



منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = س^2 بإزاحة أفقية ٢ وحدة فى اتجاه و س← ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة فى اتجاه و ص←

* مجال ر = ح ، مدى ر = [١ ، ∞[
* الدالة ر تناقصية فى]- ∞ ، ٢[وتزايدية فى]٢ ، ∞[
* الدالة ر ليست زوجية وليست فردية.

مثال ②

استخدم منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{1}{س}$ لتمثيل الدوال ر ، ع ، هـ حيث :

١ ر (س) = $\frac{1}{س - ٢}$ + ١ ٢ ع (س) = $\frac{1}{س}$ + ٣ ٣ هـ (س) = $\frac{٢س - ١}{س - ١}$

ومن الرسم حدد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها.



الحـــل

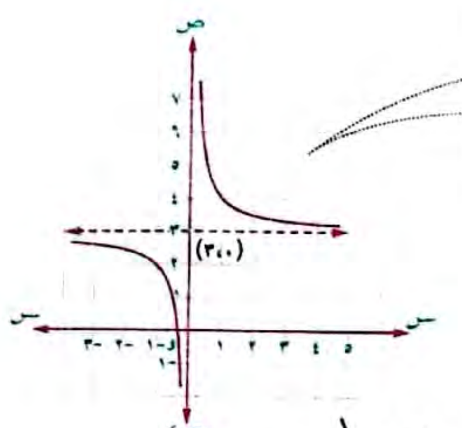
١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و س}}$ ثم إزاحة رأسية قدرها وحدة واحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و ص}}$

• مجال ر = ح − {٢} * مدى ر = ح − {١}

• الدالة تناقصية فى الفترة]− ∞ ، ٢[

وتناقصية أيضًا فى الفترة]٢ ، ∞[

٢ منحنى الدالة ع هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة رأسية مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و ص}}$



• مجال ع = ح − {٠}

• مدى ع = ح − {٣}

• الدالة تناقصية فى الفترة]− ∞ ، ٠[

وتناقصية أيضًا فى الفترة]٠ ، ∞[

٣ $هـ(س) = \frac{٢س - ١}{س - ١} = \frac{٢س - ٢ + ١}{س - ١} = \frac{٢(س - ١) + ١}{(س - ١)} = ٢ + \frac{١}{س - ١}$

منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و س}}$ ثم إزاحة رأسية ٢ وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و ص}}$

• مجال هـ = ح − {١}

• مدى هـ = ح − {٢}

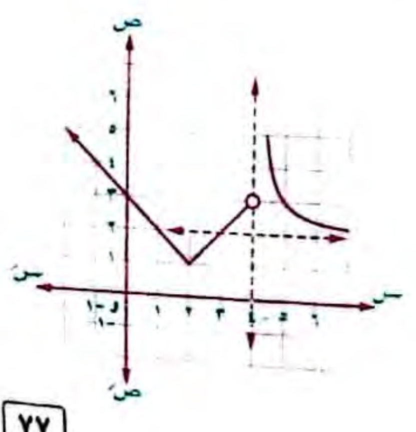
• الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ١[وتناقصية أيضًا فى]١ ، ∞[

مثال ٣

مثل بيانيًا الدالة د : $د(س) = \begin{cases} |س - ٢| + ١ & ، س < ٤ \\ \frac{١}{س - ٤} + ٢ & ، س > ٤ \end{cases}$ ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة

واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

الحـــل



• المجال = ح − {٤}

• المدى = [١ ، ∞[

• الدالة تناقصية فى كل من]− ∞ ، ٢[

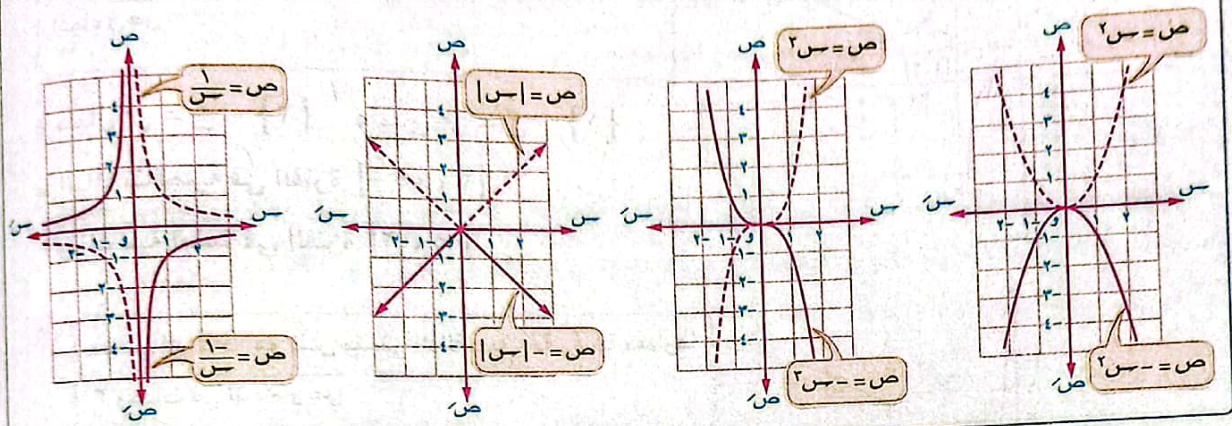
،]٤ ، ∞[وتزايدية فى]٢ ، ٤[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.



رابعًا انعكاس منحنى الدالة فى محور السينات

لأى دالة د يكون المنحنى ص = − د (س) هو نفس المنحنى ص = د (س) بالانعكاس فى محور السينات.



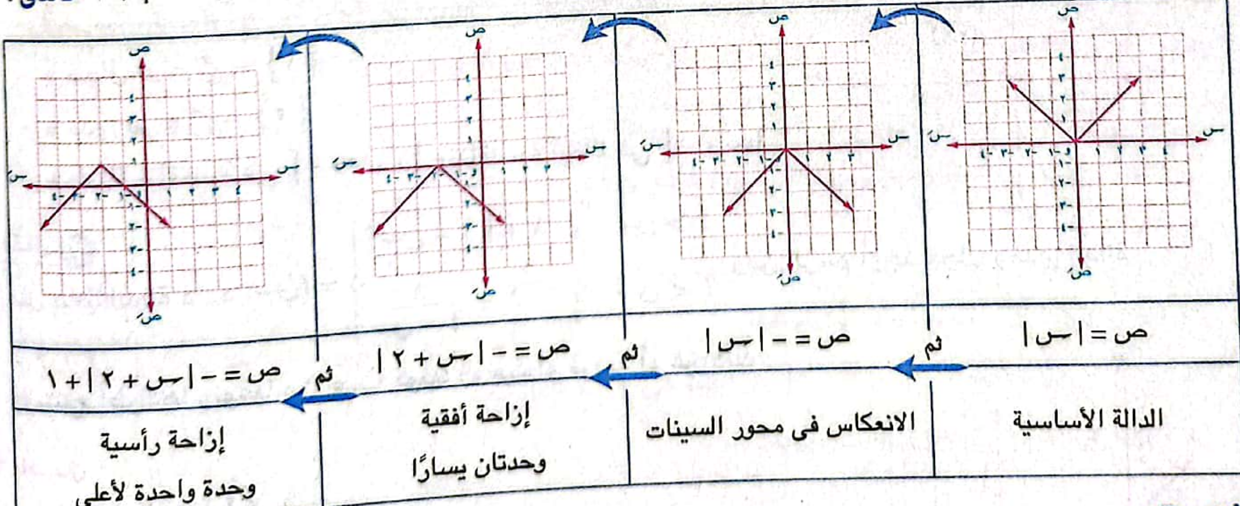
ملاحظة هامة

من المهم ترتيب إجراء التحويلات على المنحنى ص = د (س) للحصول منه على المنحنى ص = − د (س + أ) + ب كالتالى :

[١] انعكاس فى محور السينات. [٢] إزاحة أفقية. [٣] إزاحة رأسية.

فإذا عكس الترتيب بإجراء الإزاحة الرأسية قبل إجراء الانعكاس فى محور السينات فإننا نحصل على منحنى آخر غير المنحنى المطلوب.

فمثلًا : من منحنى الدالة الأساسية ص = |س| نحصل على منحنى الدالة ص = − |س + ٢| + ١ كالتالى :



ص = |س|	ثم ص = − |س|	ثم ص = − |س + ٢|	ثم ص = − |س + ٢| + ١
الدالة الأساسية	الانعكاس فى محور السينات	إزاحة أفقية وحدتان يسارًا	إزاحة رأسية وحدة واحدة لأعلى

مثال ٤

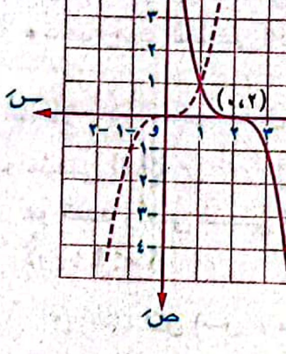
باستخدام منحنيات الدوال الأساسية ارسم منحنيات الدوال ر ، ع ، هـ حيث :

[١] ر (س) = − (س − ٢)٣ [٢] ع (س) = $\frac{١}{س − ٢}$ + ٣ [٣] هـ (س) = ٤ س − س٢ − ٣

ومن الرسم بين مدى كل دالة وابحث اطرادها وتماثلها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.



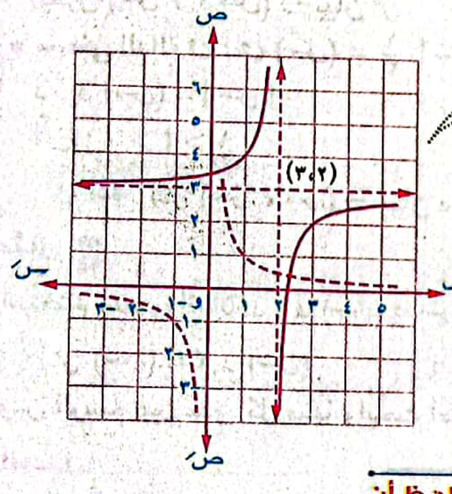
الحــل



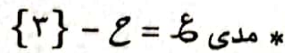
١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = $س^٣$ بالانعكاس في محور السينات ثم إزاحة أفقية ٢ وحدة في اتجاه و←س

* مدى ر = ح
* الدالة ر تناقصية على مجالها ح
* الدالة ر متماثلة حول النقطة (٢ ، ٠)
* الدالة ر ليست زوجية وليست فردية.

٢ ع (س) = $\frac{١}{-س + ٢}$ + ٣ = $\frac{١}{-(س - ٢)}$ + ٣ = $\frac{-١}{س - ٢}$ + ٣



منحنى الدالة ع هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ بالانعكاس في محور السينات متبوعًا بإزاحة أفقية وحدتين في اتجاه و←س ثم إزاحة رأسية ٣ وحدات في اتجاه و←ص

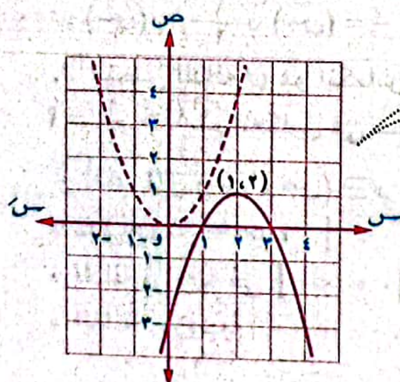


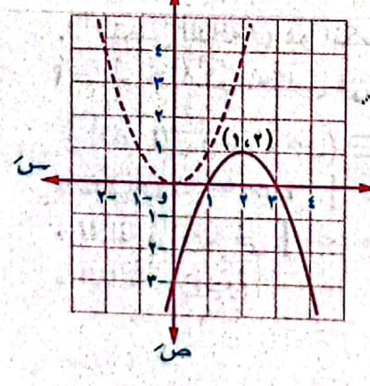
* مدى ع = ح - {٣}
* الدالة ع تزايدية في الفترة]- ∞ ، ٢[وتزايدية أيضًا في الفترة]٢ ، ∞[
* الدالة ع متماثلة حول النقطة (٢ ، ٣)
* الدالة ع ليست زوجية وليست فردية.

للاحظ أن

نقطة رأس المنحنى في الدالة هـ هي (٢ ، ١)
ويمكن الحصول عليها من القانون :
رأس المنحنى = $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$
وذلك للدوال التي قاعدتها على الصورة :
د (س) = أ $س^٢$ + ب س + جـ

٣ ∵ هـ (س) = - $س^٢$ + ٤ س - ٣
= - ($س^٢$ - ٤ س + ٣)
= - ($س^٢$ - ٤ س + ٤ - ١)
= - [$(س - ٢)^٢$ - ١]
= - $(س - ٢)^٢$ + ١





منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = $س^٢$ بالانعكاس في محور السينات متبوعًا بإزاحة أفقية وحدتين في اتجاه و←س ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة في اتجاه و←ص

* مدى هـ =]- ∞ ، ١]
* الدالة هـ متزايدة في الفترة]- ∞ ، ٢[ومتناقصة في]٢ ، ∞[
* الدالة هـ متماثلة حول المستقيم س = ٢
* الدالة هـ ليست زوجية وليست فردية.



خامسًا تمدد منحنى الدالة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = ا د (س) حيث ا ∈ ح*

• تمدد رأسى للمنحنى ص = د (س) إذا كان ا > ١ • انكماش رأسى للمنحنى ص = د (س) إذا كان ٠ < ا < ١

فمثلًا : فى الشكل المقابل :

* منحنى الدالة ر : ر (س) = ٢ | س |
هو تمدد رأسى لمنحنى الدالة د : د (س) = | س |
لأن : ا > ١

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ بيان د
يكون (س ، ٢ ص) ∈ بيان ر

* منحنى الدالة و : و (س) = $\frac{١}{٢}$ | س | هو انكماش رأسى لمنحنى الدالة
د : د (س) = | س |
لأن : ٠ < ا < ١

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ بيان د يكون (س ، $\frac{١}{٢}$ ص) ∈ بيان و

مثال ٥

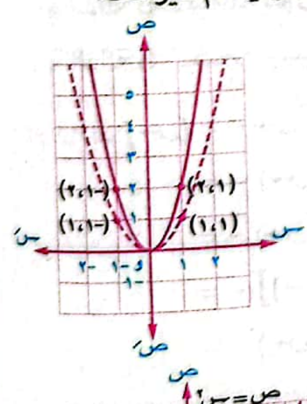
استخدم منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} فى رسم كل من المنحنيات الآتية :

١ ر (س) = ٢ د (س)   ٢ و (س) = − $\frac{١}{٢}$ د (س)   ٣ هـ (س) = ٢ د (س − ١) − ٣

ومن الرسم عين مدى كل منها وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

الحل

١ ر (س) = ٢ د (س) = ٢ س^{٢}

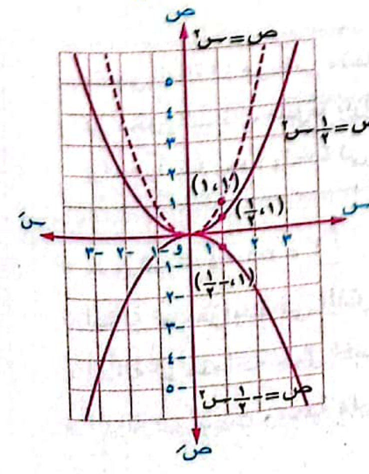


∴ منحنى الدالة ر هو تمدد رأسى لمنحنى الدالة د فيه ا = ٢ > ١

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ بيان د يكون (س ، ٢ ص) ∈ بيان ر

* مدى ر = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى الفترة]− ∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة ر زوجية.

٢ و (س) = − $\frac{١}{٢}$ د (س) = − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

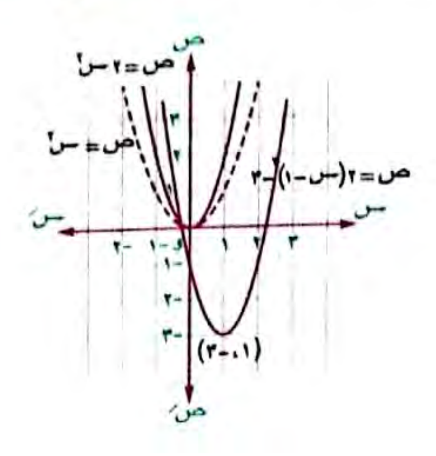


∴ منحنى الدالة و هو انكماش رأسى لمنحنى الدالة د فيه
ا = $\frac{١}{٢}$ < ١ ثم انعكاس فى محور السينات.

أى أنه لكل (س ، ص) ∈ د يكون (س ، − $\frac{١}{٢}$ ص) ∈ و

* مدى و =]− ∞ ، ٠]
* الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠[وتناقصية فى]٠ ، ∞[
* الدالة و زوجية.





٣ هـ (س) = ٢ د (س − ١) − ٣ = ٢ (س − ١)٢ − ٣

∴ منحنى الدالة هـ هو تمدد رأسى للدالة د فيه أ = ٢ > ١

ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه و س←

يليها إزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص′←

* مدى هـ = [−٣ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ١[وتزايدية فى]١ ، ∞[

* الدالة هـ ليست زوجية وليست فردية.

ملاحظتان

لأى دالة د كثيرة حدود :

١ المنحنى ص = | د (س) | أى ص = { د (س) ، د (س) ≥ ٠ ؛ − د (س) ، د (س) < ٠ }

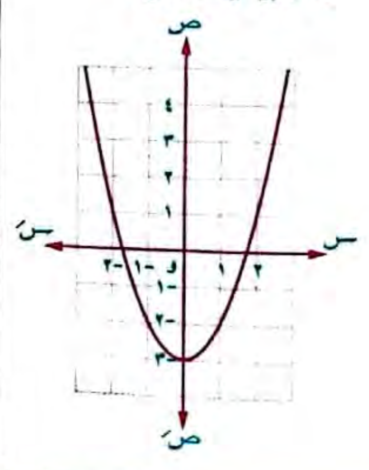
يمثله بيانيًا المنحنى ص = د (س) مع استبدال الجزء من المنحنى أسفل محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات.

٢ المنحنى ص = − | د (س) | أى ص = { − د (س) ، د (س) ≥ ٠ ؛ د (س) ، د (س) < ٠ }

يمثله بيانيًا المنحنى ص = د (س) مع استبدال الجزء من المنحنى أعلى محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات.

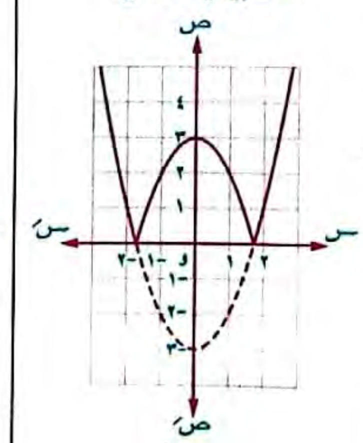
فمثلًا : ص = س٢ − ٣

تمثل بيانيًا كالتالى :



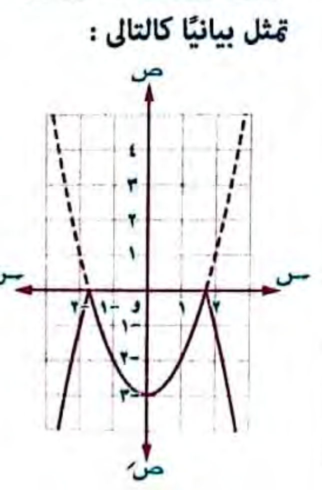
ص = | س٢ − ٣ |

تمثل بيانيًا كالتالى :



ص = − | س٢ − ٣ |

تمثل بيانيًا كالتالى :



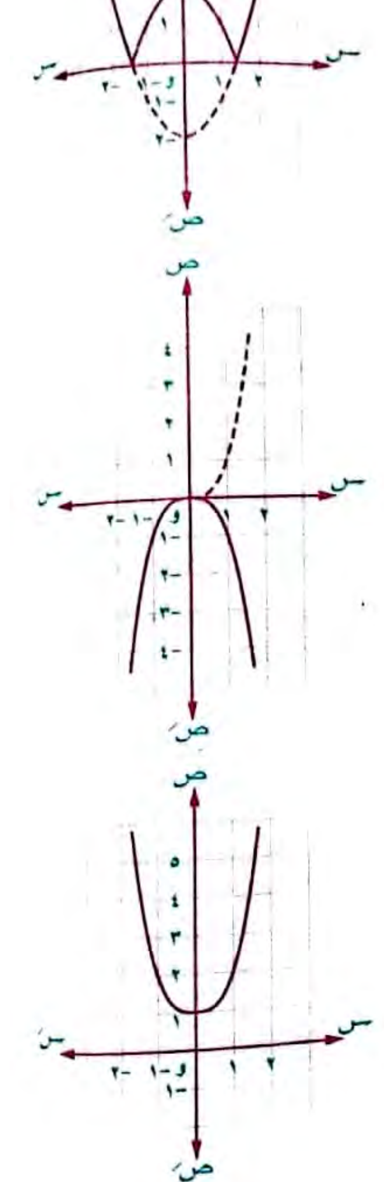


مثال ٦

مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مداها وعين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك :

[١] د (س) = | س^٢ – ٢ | [٢] د (س) = – | س^٣ | [٣] د (س) = | س^٣ | + ١

الحل



[١] بفرض أن : ر (س) = س^٢ – ٢

منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة ر مع استبدال الجزء من المنحنى أسفل محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات.

* مدى د = [٠ ، ∞[* الدالة د زوجية.

[٢] بفرض أن : ر (س) = س^٣

منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة ر مع استبدال الجزء من المنحنى أعلى محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات.

* مدى د =]– ∞ ، ٠]
* الدالة د زوجية.

[٣] بفرض أن : ر (س) = س^٣

∴ د (س) = | ر (س) | + ١

منحنى الدالة د هو نفس منحنى الدالة ر مع استبدال الجزء من المنحنى أسفل محور السينات بصورته بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحته رأسيًا فى اتجاه و ص وحدة واحدة.

* مدى د = [١ ، ∞[* الدالة د زوجية.

مثال ٧

مثل بيانيًا كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها وتماثلها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

[١] د (س) = س | س | + ٢ [٢] د (س) = س^٢ | س | – ٣

[٣] د (س) = $\sqrt{س^٢ – ٦ س + ٩}$



الحل

[1] $د(س) = \begin{cases} س(س) + ٢ &، س \geq ٠ \\ س(-س) + ٢ &، س < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} س^٢ + ٢ &، س \geq ٠ \\ -س^٢ + ٢ &، س < ٠ \end{cases}$

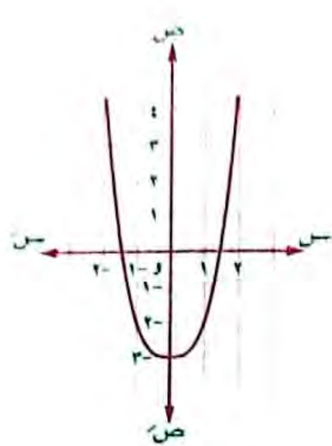
* مجال د = ح ، مدى د = ح
* الدالة تزايدية على مجالها ح
* الدالة متماثلة حول النقطة (٠ ، ٢)
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.



[2] $د(س) = \begin{cases} س^٢(س) - ٣ &، س \geq ٠ \\ س^٢(-س) - ٣ &، س < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} س^٣ - ٣ &، س \geq ٠ \\ -س^٣ - ٣ &، س < ٠ \end{cases}$

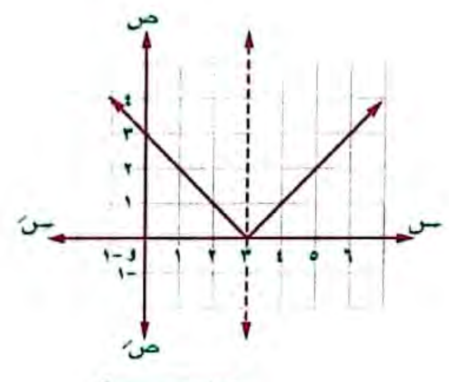
* مجال د = ح ، مدى د = [-٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة متماثلة حول محور الصادات * الدالة زوجية.



[3] $د(س) = \sqrt{(س - ٣)^٢} = |س - ٣|$

∴ الدالة د يمثلها بيانيًا المنحنى ص = | س | بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و س→

* مجال د = ح ، مدى د = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٣[وتزايدية فى]٣ ، ∞[
* الدالة متماثلة حول المستقيم س = ٣
* الدالة ليست فردية وليست زوجية.



لاحظ أن

$\sqrt{س^٢} = |س|$

معلومة إثرائية

إذا كانت : د (س) دالة حقيقية فإن :

صورة منحنى الدالة د (س) بالانعكاس		تكون منحنى الدالة
	فى محور الصادات	ص = د (-س)
	فى محور السينات	ص = - د (س)
	فى نقطة الأصل	ص = - د (-س)

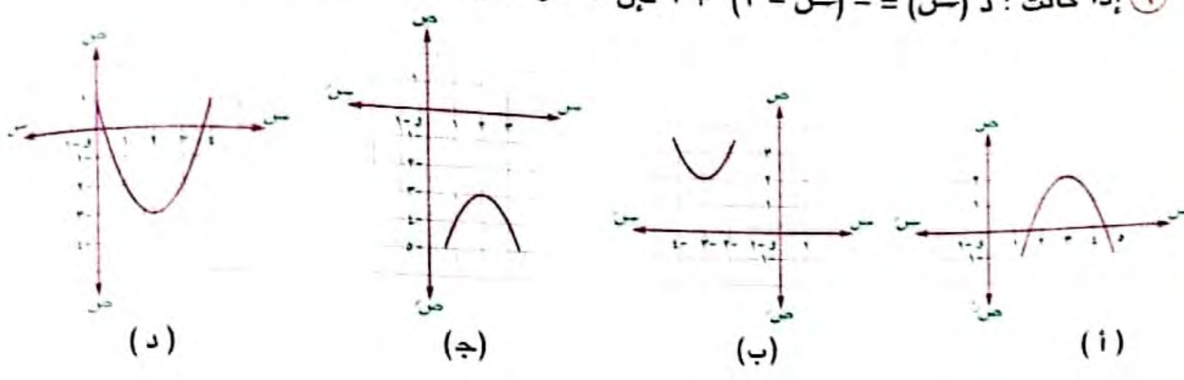


من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

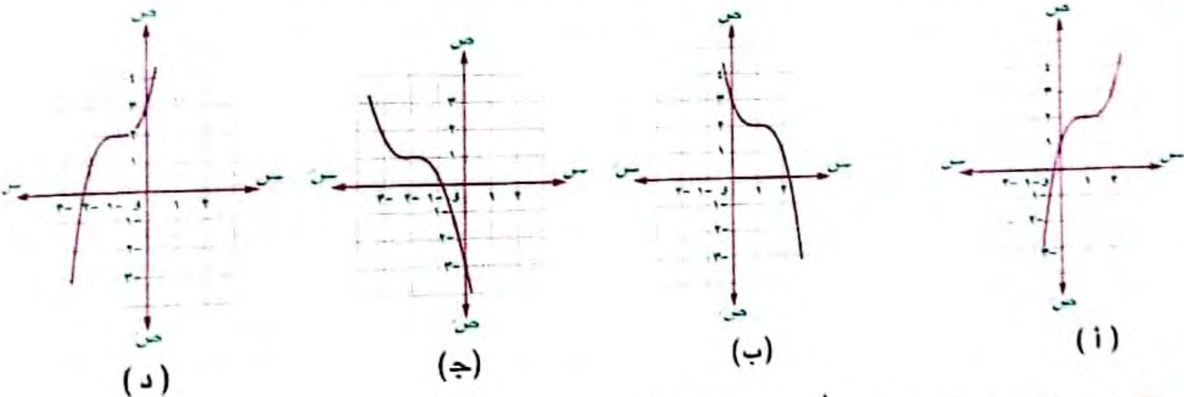
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = − (س − ٣)^{٢} + ٢ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



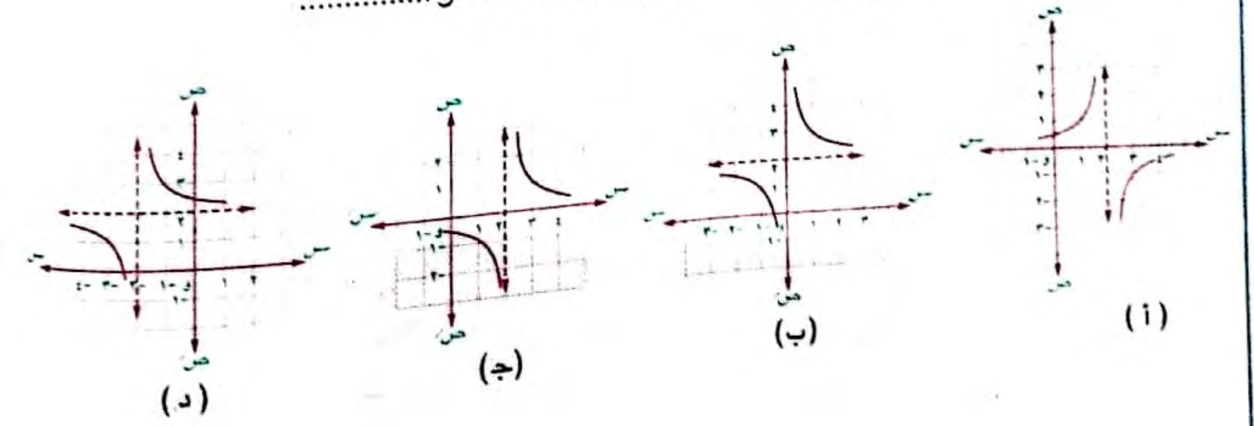
(أ) (ب) (جـ) (د)

② إذا كانت : د (س) = ٢ − (س − ١)^{٣} فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

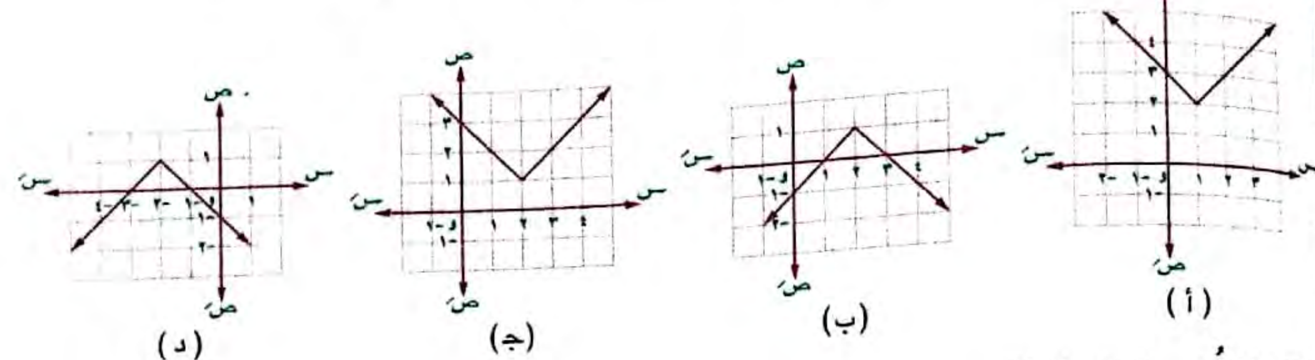
③ إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س − ٢}$ فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



(أ) (ب) (جـ) (د)



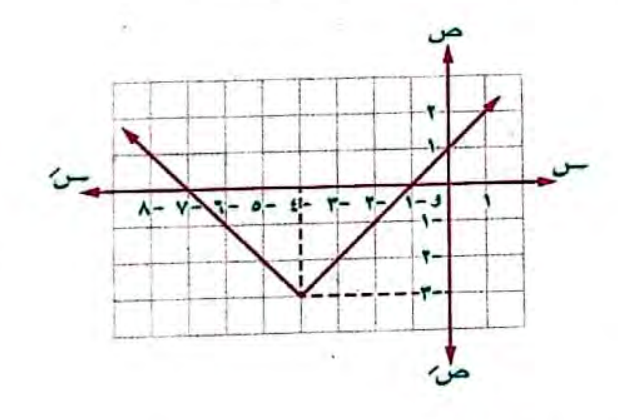
④ إذا كانت د : د (س) = ١ – | س – ٢ | فإن الشكل الذى يمثل الدالة د هو ....



⑤ إذا أُزيح منحنى الدالة ر : ر (س) = س^{٢} بمقدار وحدتين موجبتين فى اتجاه كل من المحورين فإنه يمثله الدالة د : ....

(أ) د (س) = (س + ٢)^{٢} + ٢
(ب) د (س) = (س + ٢)^{٢} – ٢
(جـ) د (س) = (س – ٢)^{٢} – ٢
(د) د (س) = (س – ٢)^{٢} + ٢

⑥ أى من قواعد الدوال الآتية تمثل المنحنى المرسوم فى الشكل المقابل ؟



(أ) د (س) = | س – ٤ | – ٣
(ب) د (س) = | س – ٤ | + ٣
(جـ) د (س) = | س + ٤ | – ٣
(د) د (س) = | س + ٤ | + ٣

⑦ أى من قواعد الدوال الآتية تمثل المنحنى المرسوم فى الشكل المقابل ؟

(أ) د (س) = (س – ١)^{٢} + ٢
(ب) د (س) = ١ – (س – ٢)^{٢}
(جـ) د (س) = ٢ – (س – ١)^{٢}
(د) د (س) = (س + ١)^{٢} – ٢

⑧ 📖 نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = (٢ – س)^{٢} + ٣ هى ....

(أ) (٢ ، ٣)   (ب) (٢ ، –٣)   (جـ) (–٢ ، ٣)   (د) (–٢ ، –٣)

⑨ نقطة تماثل الدالة د : د (س) = س^{٣} – ٢ هى ....

(أ) (٠ ، ٢)   (ب) (٠ ، –٢)   (جـ) (٢ ، ٠)   (د) (–٢ ، ٠)



(١٠) نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = ٣ - (س + ٢)^{٣} هو ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (٢ ، ٣) (جـ) (-٢ ، ٣) (د) (-٢ ، -٣)

(١١) نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٤ هى ....

(أ) (٣ ، -٤) (ب) (-٣ ، -٤) (جـ) (٣ ، ٤) (د) (-٣ ، ٤)

(١٢) نقطة تماثل الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س}$ هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (١ ، -١)

(١٣) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ فإن نقطة التماثل للدالة ر : ر (س) = د (س + ١) هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (-١ ، ٠) (د) (-١ ، ١)

(١٤) إذا كانت د (س) = $\frac{أ}{س - ب}$ + حـ حيث أ ، ب ، حـ ∈ ح نقطة تماثلها هى (٣ ، ٣)

فإن : $أ^{ب + حـ}$ = ...

(أ) $أ^{٩}$ (ب) ١ (جـ) $أ^{٦}$ (د) -١

(١٥) نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = |س + ٣| - ٢ هى ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (-٣ ، -٢) (جـ) (-٣ ، ٢) (د) (٣ ، -٢)

(١٦) منحنى الدالة د : د (س) = |س - ٢| متماثل حول المستقيم ....

(أ) س = ٢ (ب) س = -٢ (جـ) ص = ٢ (د) ص = -٢

(١٧) محور تماثل الدالة د : د (س) = س^{٢} - ١ هو المستقيم ....

(أ) س = ١ (ب) س = ٠ (جـ) ص = ١ (د) ص = ٠

(١٨) إذا كانت د (س) = $\frac{١}{|س|}$ فإن معادلة محور تماثل منحنى الدالة د هو ....

(أ) ص = ٠ (ب) س = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = -س

(١٩) الدالة د : د (س) = (س - ١)^{٢} + ٢ تكون متزايدة فى الفترة ....

(أ) ح (ب)]١ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ١[(د)]-١ ، ١[

(٢٠) الدالة د حيث د (س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ تناقصية فى الفترة ....

(أ)]-∞ ، ١] (ب)]-∞ ، ١[،]١ ، ∞[

(جـ) [١ ، ∞[(د)]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

(٢١) المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د : د (س) = |س + ٢| - ٢ ، محور السينات تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٤

(٢٢) مدى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س|}$ هو ....

(أ) ح - {٠} (ب)]٠ ، ∞[(جـ) [٠ ، ∞[(د) {٠}



(٢٣) مدى الدالة د (س) = ٣ − (٢ − س)^2 هو ....

(أ) $]-\infty , 2]$ (ب) $[2 , \infty[$ (ج) $]-\infty , 3]$ (د) $[3 , \infty[$

(٢٤) مدى الدالة د : د (س) = $\frac{2س^2 - 2س}{س - 1}$ يساوي ....

(أ) ح − {١} (ب) ح − {٢}

(ج) ح − {١ ، ٢} (د) ح − {٠ ، ١}

(٢٥) مدى الدالة د : د (س) = ٢ − $\frac{3}{س - 1}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح − {١} (ج) ح − {٢} (د) ح − {٣}

(٢٦) مدى الدالة د : د (س) = ٢ − | ٣ − ٢ س | هو ....

(أ) $]-\infty , 2]$ (ب) $[-2 , \infty[$ (ج) $]\frac{3}{2} , \infty[$ (د) $]-\infty , -2]$

(٢٧) مدى الدالة د حيث : د (س) = − | س^3 | هي ....

(أ) ح (ب) $[0 , \infty[$ (ج) $]-\infty , 0]$ (د) ح − {٠}

(٢٨) مدى الدالة د : د (س) = س − | س | هي ....

(أ) ح$^+$ (ب) ح$^-$ (ج) ح (د) $[0 , \infty[$

(٢٩) مدى الدالة د : د (س) = $\frac{|س|}{س}$ هو ....

(أ) $]0 , \infty[$ (ب) $]-\infty , 0[$ (ج) ح − {٠} (د) {١ ، −١}

(٣٠) مدى الدالة د : د (س) = $\begin{cases} -\frac{1}{س} & ، \quad س < -1 \\ |س| & ، \quad -1 \le س \le 1 \\ \frac{1}{س} & ، \quad س > 1 \end{cases}$ هو ....

(أ) $]0 , 1]$ (ب) $[0 , 1]$ (ج) $]0 , \infty[$ (د) ح − {٠}

(٣١) مدى الدالة د : د (س) = $\begin{cases} س - 1 & ، \quad س < 1 \\ 2 & ، \quad س > 1 \end{cases}$ هو ....

(أ) ح − $[0 , 1]$ (ب) ح − {١}

(ج) $]-\infty , 0[\cup \{2\}$ (د) $]-\infty , 0[\cap \{2\}$

(٣٢) منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{1}{س - 3}$ + ٤ لا يقطع الخط المستقيم الذي معادلته ....

(أ) س = −٣ (ب) س = ٣ (ج) ص = −٤ (د) ص = ٣

(٣٣) إذا كان المنحنى ص = د (س) يمثل دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها ٣ وحدات رأسيًا لأعلى هو المنحنى ر (س) = ...

(أ) د (س − ٣) (ب) د (س + ٣) (ج) د (س) + ٣ (د) د (س) − ٣

٣٤ إذا كان المنحنى ص = د (س) يمثل دالة حقيقية فإن صورته بإزاحة قدرها ٥ وحدات رأسيا لأسفل هو المنحنى ر (س) = ...

(أ) د (س − ٥) (ب) د (س + ٥) (جـ) د (س) + ٥ (د) د (س) − ٥

٣٥ منحنى ر (س) = س² + ٤ هو نفس منحنى د (س) = س² بإزاحة مقدارها ٤ وحدات في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{و س}}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{و ص}}$ (د) $\overrightarrow{\text{و ص}}$

٣٦ منحنى الدالة ر حيث : ر (س) = |س| − ٢ هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = |س| بإزاحة مقدارها وحدتان في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{و س}}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{و ص}}$ (د) $\overrightarrow{\text{و ص}}$

٣٧ إذا كانت : د دالة حقيقية مجالها [−٣ ، ٤] فإن مجال الدالة ر : ر (س) = د (س) + ٢ هو ....

(أ) [−٣ ، ٤] (ب) [−١ ، ٦] (جـ) [−٥ ، ٢] (د) ح

٣٨ منحنى الدالة ر : ر (س) = $\frac{١}{|س|}$ + ٢ هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س|}$ بإزاحة مقدارها وحدتين في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{و س}}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{و ص}}$ (د) $\overrightarrow{\text{و ص}}$

٣٩ منحنى ر (س) = |س + ٣| هو نفس منحنى د (س) = |س| بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{و س}}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{و ص}}$ (د) $\overrightarrow{\text{و ص}}$

٤٠ إذا كانت : ص = د (س) دالة حقيقية فإن صورتها بإزاحة قدرها ٤ وحدات جهة اليسار هي ر (س) = ...

(أ) د (س − ٤) (ب) د (س + ٤) (جـ) د (س) + ٤ (د) د (س) − ٤

٤١ إذا كانت : د دالة حقيقية مجالها [−٢ ، ٣] فإن مجال الدالة ر : ر (س) = د (س − ٢) هو ....

(أ) [−٢ ، ٣] (ب) [−٤ ، ١] (جـ) [٠ ، ٥] (د) ح

٤٢ بفرض أن د (س) = − س² ينتقل ٣ وحدات لليمين ووحدتان لأسفل وكان المنحنى الناتج هو ر (س) فإن : ر (٤) = ...

(أ) −٣ (ب) −١٦ (جـ) ١٦ (د) −٧

٤٣ نفرض أن المنحنى : د (س) = − س³ ينتقل ٤ وحدات لليسار ووحدتان لأعلى وكان المنحنى الناتج هو ر (س) فإن : ر (−٢) = ...

(أ) −٢١٨ (ب) ٢١٤ (جـ) ٦ (د) −٦



(٤٤) منحنى الدالة ر : ر (س) = س هو نفس منحنى الدالة د : د (س) = ... بالانعكاس على محور السينات.

(أ) س   (ب) − س   (جـ) س + ١   (د) − س + ١

(٤٥) إذا كانت د دالة كثيرة حدود مداها]− ∞ ، ٢] فإن مدى الدالة ر حيث ر (س) = |د (س)| هو ....

(أ)]− ∞ ، ٢]   (ب) [٢ ، ∞[(جـ)]٠ ، ∞[(د) [٠ ، ∞[

(٤٦) المنحنى ر (س) = ١ − |س| هو نفس المنحنى د (س) = |س| بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة مقدارها وحدة واحدة فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$ (ب) $\overleftarrow{\text{و س}'}$ (جـ) $\overleftarrow{\text{و ص}}$ (د) $\overleftarrow{\text{و ص}'}$

ثانيا الأسئلة المقالية

(١) استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٢} لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب معادلة محور تماثلها :

① ر (س) = س^{٢} − ٣
② ر (س) = ٢ − س^{٢}
③ ر (س) = − (س − ٣)^{٢}
④ ر (س) = (س + ٢)^{٢} − ٤
⑤ ر (س) = (س + $\frac{٣}{٢}$)^{٢} − $\frac{١}{٢}$
⑥ ر (س) = $\frac{-١}{٢}$ س^{٢}
⑦ ر (س) = س^{٢} + ٤ س + ٤
⑧ ر (س) = س^{٢} + ٤ س + ١

(٢) استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٣} لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب نقطة تماثلها :

① ر (س) = س^{٣} + ٤
② ر (س) = (س − ٣)^{٣}
③ ر (س) = (٢ − س)^{٣}
④ ر (س) = ٢ − (س − ١)^{٣}
⑤ ر (س) = (٣ − س)^{٣} + ١
⑥ ر (س) = ٢ س^{٣} − ١

(٣) استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = |س| لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك و اكتب معادلة محور تماثلها :

① ر (س) = |س| − ٣
② ر (س) = ٢ − |س|
③ ر (س) = − |س + ٥|
④ ر (س) = |٢ − س| + ١
⑤ ر (س) = ٤ − |س − ٢|
⑥ ر (س) = ٢ |س|
⑦ ر (س) = ٢ |س − ٧| + ٢
⑧ ر (س) = ٥ − ٢ |س + ٢|
⑨ ر (س) = ١ − |$\frac{١}{٢}$ س − ١|
⑩ ر (س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٨\,\text{س} + ١٦}$



٤ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{1}{س}$ لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداها وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب نقطة تماثلها :

① ر(س) = $\frac{1}{س} + 2$

② ر(س) = $\frac{-1}{س + 2}$

③ ر(س) = $\frac{1}{س - 2} + 3$

④ ر(س) = $\frac{1}{4 - س} - 3$

⑤ ر(س) = $\frac{س - 3}{س - 2}$

⑥ ر(س) = $\frac{2 س}{س + 1}$

⑦ ر(س) = $\frac{2 س - 5}{س - 2}$

⑧ ر(س) = $\frac{س - 1}{س^2 - 1}$

٥ اكتب قاعدة الدالة د الممثلة بيانيًا بكل من الأشكال الآتية :

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨





٦ إذا كانت د ، ر ، ق ، ه دوال حقيقية حيث د (س) = س^٢ ، ر (س) = س^٣

، ق (س) = | س | ، ه (س) = $\frac{١}{س}$ فمثل كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية موضحًا مجالها ومداها :

① د١ (س) = د (س + ١)

② د٢ (س) = د (س) - ١

③ د٣ (س) = ٢ - د (س - ١)

④ ر١ (س) = ر (س - ١)

⑤ ر٢ (س) = ر (س) - $\frac{١}{٢}$

⑥ ر٣ (س) = ر (س - ١) + ٢

⑦ ق١ (س) = ٢ ق (س)

⑧ ق٢ (س) = $\frac{١}{٢}$ ق (س) - ٣

⑨ ق٣ (س) = ٢ ق (س - ١)

⑩ ه١ (س) = ه (س - ٢)

⑪ ه٢ (س) = ه (س) - ١

⑫ ه٣ (س) = ٢ - ه (س + ١)

---

٧ ارسم منحنى الدالة د فى كل مما يأتى وعين مداها وابحث اطرادها :

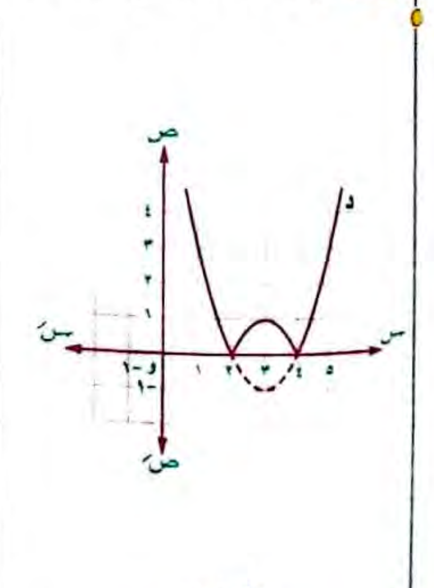
① د (س) = { س^٢ + ١ ، -٤ ≤ س < ٠ ؛ -س^٢ - ١ ، ٠ ≤ س ≤ ٤ }

② د (س) = { (س - ١)^٣ ، س ≥ ٠ ؛ -١ ، س < ٠ }

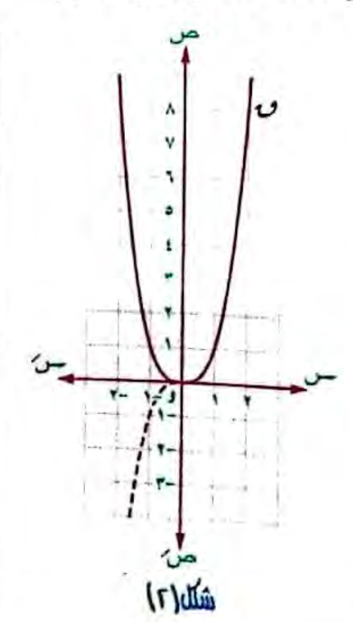
③ د (س) = { (س + ١)^٣ + ٢ ، س ≤ -١ ؛ $\frac{١}{س + ١}$ + ١ ، س > -١ }

---

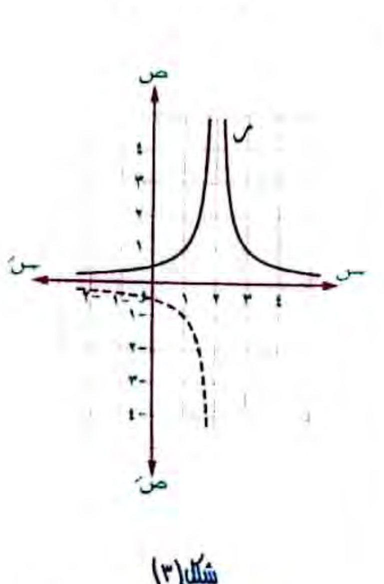
٨ تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د ، ق ، ر على الترتيب. اكتب قاعدة الدالة فى كل شكل :



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

9 إذا كانت : د (س) = $\frac{1}{س}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ر فى كل من الحالات الآتية :

(1) ر (س) = | د (س) |
(2) ر (س) = − | د (س) |
(3) ر (س) = 2 + | د (س) |
(4) ر (س) = | د (س − 2) |
(5) ر (س) = | د (س + 1) | − 2

10 ارسم منحنى الدالة د فى كل مما يأتى :

(1) د (س) = س | س |
(2) د (س) = س | س | − 1
(3) د (س) = | $س^3$ |
(4) د (س) = − | $س^3$ |
(5) د (س) = $\frac{س^4}{|س|}$
(6) د (س) = $س^2$ | س | + 2
(7) د (س) = $\frac{س^3}{|س|}$ − 3
(8) د (س) = (س − 2) | س |

11 ارسم منحنى الدالة د وحدد مداها وابحث اطرادها إذا كانت :

(1) د (س) = | 4 − $س^2$ |
(2) د (س) = | $س^2$ − 2 س − 3 | ، س ∈ [−1 ، 4]

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) إذا كانت د دالة كثيرة حدود وكانت د (س) = ٠ عندما س ∈ {−3 ، 1 ، ٠}
فإن المنحنى ر (س) = د (س − 3) يقطع محور السينات عندما س ∈ ....

(أ) {−3 ، 1 ، ٠}   (ب) {3 ، ٠ ، −2}   (جـ) {٠ ، 3 ، 4}   (د) {−6 ، 2 ، ٠}

(2) إذا كانت د : د (س) = (س − أ + 1)^2 + ب − 2 دالة تربيعية مداها = [1 ، ∞[، ومنحنى د يمر بالنقطة (3 ، 2)   فإن : أ = ...

(أ) ± 4   (ب) 3 أ، 5   (جـ) 3 أ، −5   (د) −3 أ، 5

(3) إذا كانت : ر (س) تناقصية فى]− ∞ ، ٠[، وتزايدية فى]٠ ، ∞[
فإن : د (س) = ر (س + 1) تكون متزايدة فى ....

(أ)]−1 ، ∞[(ب)]− ∞ ، −1[(جـ)]٠ ، ∞[(د)]− ∞ ، ٠[

(4) المنحنى : ص = 3 (س − 5)^2 + 7 تحت تأثير انتقال 3 وحدات فى الاتجاه الموجب للمحور السينى ووحدة فى الاتجاه السالب للمحور الصادى هو ....

(أ) ص = 3 (س + 8)^2 + 6
(ب) ص = 3 (س − 8)^2 − 6
(جـ) ص = 3 (س − 8)^2 + 6
(د) ص = 3 (س + 8)^2 − 6

(5) إذا كانت : د (س) = | س | + 2 فإن مدى الدالة (د ∘ د) = ...

(أ)]− ∞ ، 4]   (ب) [4 ، ∞[(جـ) [−4 ، 4]   (د) [٠ ، 4]



⑥ إذا كانت : ر (س) = $\frac{1}{2}$ س^2 − ٨ ، د (س) = | س | فإن مدى الدالة (د ∘ ر) ....

(أ) [−٨ ، ∞[(ب) [٠ ، ∞[(جـ) [٨ ، ∞[(د) ع

⑦ إذا كانت : د دالة فردية فإن : | د (س) | تكون ....

(أ) فردية.

(ب) زوجية.

(جـ) زوجية وفردية معًا.

(د) ليست زوجية وليست فردية.

⑧ إذا كانت د : د (س) = { س^3 + ٢ ، س > ٠ ؛ ر (س) ، س < ٠ } متماثلة حول نقطة الأصل فإن : ر ....

(أ) تناقصية. (ب) تزايدية. (جـ) ليست أحادية. (د) زوجية.

⑨ إذا كانت د : د (س) = { س^3 + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ ر (س) ، س < ٠ } متماثلة حول محور الصادات

فإن : ر (س) = ...

(أ) س^3 − ٢ (ب) س^3 + ٢ (جـ) − س^3 + ٢ (د) − س^3 − ٢

---

٢ ارسم منحنى الدالة د في كل مما يأتي ومن الرسم حدد المجال والمدى وابحث الاطراد وبيّن هل الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك :

① د (س) = س^3 + س^2 | س | + ٢

② د (س) = (| س | − ١)^3

③ د (س) = $\frac{| س + ١ |}{س^2 + ٣ س + ٢}$

④ د (س) = | س + ١ | − | س − ١ |



الدرس

6

حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

أولاً حــل معادلات القيمة المطلقة

توجد طريقتان لحل معادلات القيمة المطلقة (المقياس).

١ الطريقة البيانية :

وفيها نستخدم التمثيل البياني للدوال الحقيقية فى حل المعادلات مع ملاحظة أنه : لأى دالتين د ، ر تكون مجموعة حل المعادلة : د (س) = ر (س) هـى مجموعـة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيى الدالتين د ، ر

ففى الشكل المقابل :

إذا كان منحنيا الدالتين د ، ر يتقاطعان فى النقطتين

أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$)

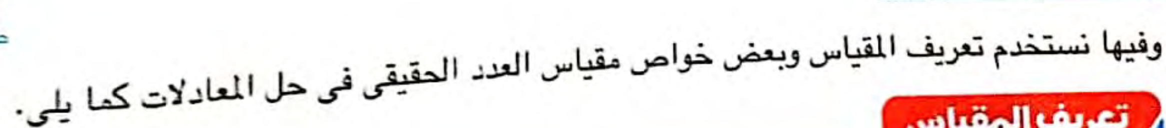
فإن مجموعة حل المعادلة :

د (س) = ر (س) فى ح هى {$س_١$ ، $س_٢$}



٢ الطريقة الجبرية :

وفيها نستخدم تعريف المقياس وبعض خواص مقياس العدد الحقيقى فى حل المعادلات كما يلى.



تعريف المقياس

إذا كانت : س ∈ ح ، أ ، ب عددين حقيقيين فإن :

$$|س| = \begin{cases} س & ، س \geq ٠ \\ -س & ، س < ٠ \end{cases}$$

ومنها

$$|س + أ| = \begin{cases} س + أ & ، س \geq -أ \\ -س - أ & ، س < -أ \end{cases} \quad ، \quad |أس + ب| = \begin{cases} أس + ب & ، س \geq -\frac{ب}{أ} \\ -أس - ب & ، س < -\frac{ب}{أ} \end{cases}$$



خواص مقياس العدد الحقيقى

١ $|أ| \geq 0$

٢ $|أ ب| = |أ| \times |ب|$

٣ $|أ + ب| \leq |أ| + |ب|$

أى أن مقياس مجموع عددين أصغر من أو يساوى مجموع مقياسيهما ويحدث التساوى إذا كان أ ، ب سالبين معًا أو موجبين معًا أو كليهما يساوى الصفر

فمثلًا : $|٤ + (-٧)| < |٤| + |-٧|$ ، $|-٤ + (-٧)| = |-٤| + |-٧|$

ملاحظات

١ لأى عدد حقيقى أ يكون $|أ| = |-أ|$ **فمثلًا :** $|٣| = |-٣|$

٢ $|أ - س| = |س - أ|$ **فمثلًا :** $|٢ - س| = |س - ٢|$

٣ $|س| = ح ، ح > 0 \Leftrightarrow س = \pm ح$

فمثلًا : إذا كان : $|س| = ٣$ فإن : $س = \pm ٣$

وإذا كان : $أ = \pm ٥$ فإن : $|أ| = ٥$

٤ إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين فإن : $|أ| = |ب| \Leftrightarrow أ = \pm ب$

٥ لأى عدد حقيقى أ يكون $(|أ|)^٢ = أ^٢$ **فمثلًا :** $(|-٢|)^٢ = ٤$ ، $(|-\frac{١}{٢}|)^٢ = \frac{١}{٤}$

٦ لأى عدد حقيقى أ يكون $\sqrt{أ^٢} = |أ|$ **فمثلًا :** $\sqrt{(٥)^٢} = |٥| = ٥$ ، $\sqrt{(-٣)^٢} = |-٣| = ٣$

٧ إذا كان : $|س| = س$ فإن : $س \in [0 ، \infty[$

٨ إذا كان : $|س| = -س$ فإن : $س \in]-\infty ، 0]$

١ حل المعادلة على الصورة : $|أ س + ب| = ح ، ح \in [0 ، \infty[$

«أى مقياس مقدار من الدرجة الأولى = عدد حقيقى غير سالب»

الحـل البيانـى

الاحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين

$د(س) = |أ س + ب|$

، $ر(س) = ح$

الحـل الجبـرى

① باستخدام تعريف المقياس.

② ما بداخل المقياس = ± العدد الحقيقى



ملاحظة

إذا كان |أ س + ب| = حـ ، حـ ∈]-∞ ، ٠[فإن مجموعة الحل فى ح = ∅

فمثلًا : مجموعة حل المعادلة : |٣ س - ٤| = -٥ فى ح هى ∅

مثال ①

أوجد بيانيًا ثم جبريًا مجموعة حل المعادلة : |س - ٢| = ٣

الحل

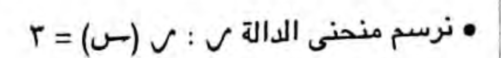
الحل البيانى : بوضع د (س) = |س - ٢| ، ر (س) = ٣

• نرسم منحنى الدالة

د : د (س) = |س - ٢|

وهو نفس المنحنى ص = |س|

بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س←



• نرسم منحنى الدالة ر : ر (س) = ٣

وهى دالة ثابتة يمثلها بيانيًا خط مستقيم يوازى محور السينات ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٣)

• نوجد نقطتى تقاطع المنحنيين وهما (-١ ، ٣) ، (٥ ، ٣)

∴ مجموعة الحل فى ح = {-١ ، ٥}

الحل الجبرى : أولًا : باستخدام تعريف دالة المقياس :

د (س) = |س - ٢| = { س - ٢ ، س - ٢ ≥ ٠ ؛ -س + ٢ ، س - ٢ < ٠ }

∴ د (س) = { س - ٢ ، س ≥ ٢ ؛ -س + ٢ ، س < ٢ }

عندما س ≥ ٢ : س - ٢ = ٣ ومنها س = ٥ ∈ [٢ ، ∞[

عندما س < ٢ : -س + ٢ = ٣ ومنها س = -١ ∈]-∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل فى ح = {-١ ، ٥}

ثانيًا : باستخدام الخاصية «ما بداخل المقياس = ± العدد الحقيقى»

∵ |س - ٢| = ٣ ∴ س - ٢ = ± ٣

∴ س - ٢ = ٣ ومنها س = ٥ أ، س - ٢ = -٣ ومنها س = -١

∴ مجموعة الحل = {٥ ، -١}



٢ حل المعادلة على الصورة : |أ س + ب| = |حـ س + ء|

«أى أن : مقياس مقدار من الدرجة الأولى فى س = مقياس مقدار آخر من الدرجة الأولى فى س»

الحـل البيانـى

الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين

د (س) = |أ س + ب|

، ر (س) = |حـ س + ء|

الحـل الجبـرى

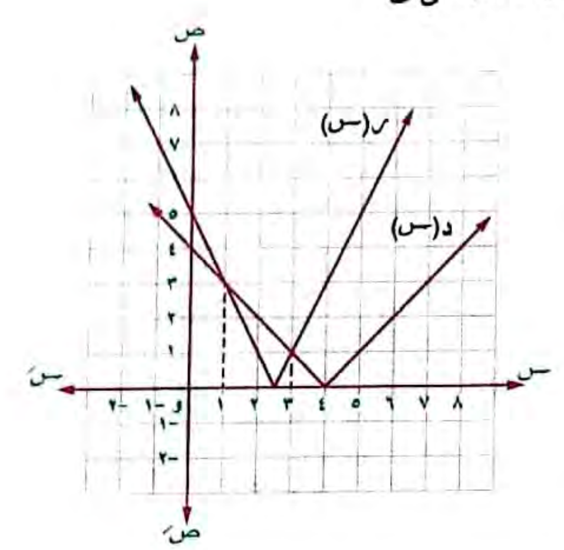
① أحد المقدارين = ± المقدار الآخر.

② بتربيع طرفى المعادلة.

مثال ٢

أوجد بيانيًا ثم جبريًا مجموعة حل المعادلة : |س − ٤| = |٢ س − ٥| فى ح

الحـل



بوضع د (س) = |س − ٤|

، ر (س) = |٢ س − ٥| = ٢ |س − $٢\frac{١}{٢}$|

الحل البيانى : الدالة د يمثلها بيانيًا المنحنى : ص = |س| بإزاحة أفقية ٤ وحدات فى اتجاه و س

، الدالة ر يمثلها بيانيًا المنحنى : ص = ٢ |س| بإزاحة أفقية $٢\frac{١}{٢}$ وحدة فى اتجاه و س

، ∵ المنحنيين يتقاطعان فى النقطتين (١ ، ٣) ، (٣ ، ١)

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٣}

الحل الجبرى : **أولاً** : باستخدام الخاصية : أحد المقدارين = ± المقدار الآخر

∵ |س − ٤| = |٢ س − ٥| ∴ س − ٤ = ± (٢ س − ٥) (من خواص المقياس)

∴ س − ٤ = ٢ س − ٥ ومنها س = ١

أ، س − ٤ = −٢ س + ٥ ∴ ٣ س = ٩ ومنها س = ٣

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٣}

ثانيًا : بتربيع طرفى المعادلة :

∵ $(س - ٤)^٢ = (٢ س - ٥)^٢$ ∴ $س^٢ - ٨ س + ١٦ = ٤ س^٢ - ٢٠ س + ٢٥$

∴ $٣ س^٢ - ١٢ س + ٩ = ٠$ ∴ $س^٢ - ٤ س + ٣ = ٠$

∴ (س − ٣) (س − ١) = ٠ ∴ س = ٣ أ، س = ١

∴ مجموعة الحل = {٣ ، ١}



٣ حل المعادلة على الصورة : |أ س + ب| = حـ س + ء

«أى أن : مقياس مقدار من الدرجة الأولى فى س = مقدار من الدرجة الأولى فى س»

الحل البيانى

الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين

د (س) = |أ س + ب|

، ر (س) = حـ س + ء

الحل الجبرى

نستخدم إعادة تعريف المقياس فنحصل على المعادلتين

أ س + ب = حـ س + ء عند س ≥ $\frac{-ب}{أ}$

، −أ س − ب = حـ س + ء عند س < $\frac{-ب}{أ}$

مثال ٣

أوجد بيانيًا ثم جبريًا مجموعة الحل فى ح لكل من المعادلات الآتية :

١ |س − ٢| = س + ٤

٢ |س + ٣| − $\frac{1}{2}$ س = ٣

٣ |س − ٣| = ٣ − س

الحل

١ بوضع د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = س + ٤

الحل البيانى :

∵ الدالة د يمثلها بيانيًا المنحنى ص = |س|

بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$

، الدالة ر يمثلها بيانيًا المنحنى

ص = س بإزاحة رأسية

٤ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{و ص}$

∴ المنحنيان يتقاطعان فى نقطة واحدة (−١ ، ٣)

∴ مجموعة الحل = {−١}

الحل الجبرى : د (س) = |س − ٢| = { س − ٢ ، س ≥ ٢ ؛ −س + ٢ ، س < ٢ }

• عندما س ≥ ٢ : س − ٢ = س + ٤ ومنها −٢ = ٤ (غير ممكن) ∴ لا يوجد حل

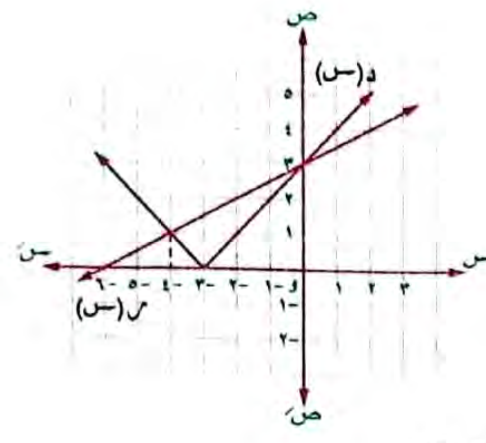
• عندما س < ٢ : −س + ٢ = س + ٤ ومنها س = −١ ∈]−∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل = {−١}



٢ |س + ٣| = $\frac{١}{٢}$ س + ٣ بوضع د (س) = |س + ٣| ، ر (س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٣

الحل البيانى :



د يمثلها المنحنى ص = |س| بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و س← ، ر يمثلها

المنحنى ص = س مع انكماش رأسى فيه : أ = $\frac{١}{٢}$

وإزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص←

(أى مستقيم ميله = $\frac{١}{٢}$ ويمر بالنقطة (٠ ، ٣))

∴ المنحنيان يتقاطعان فى (٠ ، ٣) ، (−٤ ، ١)

∴ مجموعة الحل = {٠ ، −٤}

الحل الجبرى : د (س) = |س + ٣| = { س + ٣ ، س ≥ −٣ ؛ −س − ٣ ، س < −٣ }

عندما س ≥ −٣ : س + ٣ = $\frac{١}{٢}$ س + ٣ ومنها س = ٠ ∈ [−٣ ، ∞[

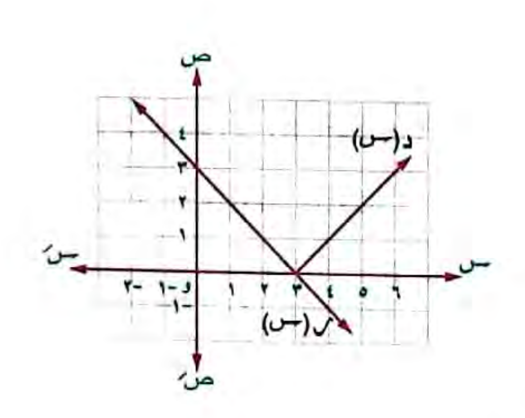
عندما س < −٣ : −س − ٣ = $\frac{١}{٢}$ س + ٣ ومنها س = −٤ ∈]−∞ ، −٣[

∴ مجموعة الحل = {٠ ، −٤}

٣ بفرض أن : د (س) = |س − ٣| ، ر (س) = ٣ − س = −س + ٣



الحل البيانى :



د يمثلها بيانيًا المنحنى ص = |س| بإزاحة أفقية ٣ وحدات فى اتجاه و س← ، ر يمثلها بيانيًا

المنحنى ص = س بالانعكاس فى محور السينات

ثم إزاحة رأسية ٣ وحدات فى اتجاه و ص←

∴ المنحنيان يتقاطعان فى عدد لا نهائى من النقط

(س ، ص) بحيث إن : س ∈]−∞ ، ٣]

∴ مجموعة الحل =]−∞ ، ٣]

الحل الجبرى : د (س) = |س − ٣| = { س − ٣ ، س ≥ ٣ ؛ −س + ٣ ، س < ٣ }

عندما س ≥ ٣ : ∴ س − ٣ = ٣ − س ∴ ٢س = ٦

∴ س = ٣ ∈ [٣ ، ∞[

عندما س < ٣ : ∴ −س + ٣ = ٣ − س

وهذه العلاقة تتحقق لجميع قيم س ∈]−∞ ، ٣[

∴ مجموعة الحل = {٣} ∪]−∞ ، ٣[=]−∞ ، ٣]



مثال ٤

أوجد جبريًا مجموعة الحل في ح لكل من المعادلات الآتية :

١ $٣|س - ٩| - |٢ - س| = ١٠$

٢ $\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤} + س = ١٠$

٣ $س^٢ - ٣|س| - ٢٨ = ٠$

الحل

١ ∵ $٣|س - ٩| - |٢ - س| = ١٠$

∴ $٣|س - ٣| - |س - ٣| = ١٠$

(لاحظ أن : $|س - ٣| = |٣ - س|$)

∴ $٢|س - ٣| = ١٠$ ∴ $|س - ٣| = ٥$ ∴ $س - ٣ = ±٥$

∴ $س - ٣ = ٥$ ومنها $س = ٨$

أ، $س - ٣ = -٥$ ومنها $س = -٢$

∴ مجموعة الحل = $\{٨ ، -٢\}$

٢ ∵ $\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤} + س = ١٠$ ∴ $\sqrt{(س - ٢)^٢} = ١٠ - س$

∴ $|س - ٢| = ١٠ - س$

، ∵ $|س - ٢| = \begin{cases} س - ٢ ، & س \geq ٢ \\ -س + ٢ ، & س < ٢ \end{cases}$

عندما $س \geq ٢$: $س - ٢ = ١٠ - س$ ومنها $س = ٦ \in [٢ ، \infty[$

، عندما $س < ٢$: $-س + ٢ = ١٠ - س$

∴ $٢ = ١٠$ (وهذا مستحيل)

∴ مجموعة الحل = $\{٦\}$

٣ ∵ $|س| = \begin{cases} س ، & س \geq ٠ \\ -س ، & س < ٠ \end{cases}$

∴ $س^٢ - ٣|س| - ٢٨ = \begin{cases} س^٢ - ٣س - ٢٨ ، & س \geq ٠ \\ س^٢ + ٣س - ٢٨ ، & س < ٠ \end{cases}$

، عندما $س \geq ٠$: $س^٢ - ٣س - ٢٨ = ٠$

∴ $(س - ٧)(س + ٤) = ٠$ ومنها $س = ٧ \in [٠ ، \infty[$ أ، $س = -٤ \notin [٠ ، \infty[$

، عندما $س < ٠$: $س^٢ + ٣س - ٢٨ = ٠$

∴ $(س + ٧)(س - ٤) = ٠$

أ، $س = ٤ \notin]-\infty ، ٠[$ ومنها $س = -٧ \in]-\infty ، ٠[$

∴ مجموعة الحل = $\{٧ ، -٧\}$



حل آخر: ∵ $|س|^2 = |س^2| = س^2$

∴ $|س|^2 - 3|س| - 28 = 0$ ∴ $(|س| - 7)(|س| + 4) = 0$

∴ $|س| = 7$ ومنها $س = \pm 7$ أو $|س| = -4$ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = $\{7 ، -7\}$

مثال 5

أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين بيانيًا في ح:

1 $|س - 2| + |س - 1| = 3$ 2 $|س - 3| = 3 - |س|$

الحل

1 $|س - 2| = -|س - 1| + 3$

بوضع $د(س) = |س - 2|$

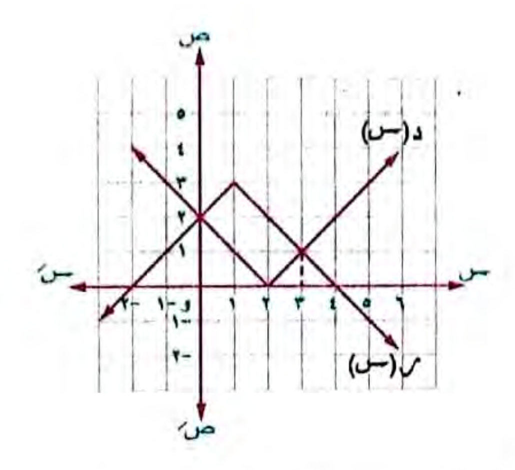
، $ر(س) = -|س - 1| + 3$

∵ د يمثلها المنحنى $ص = |س|$

بإزاحة أفقية وحدتين في اتجاه $\overleftarrow{وس}$

، ر يمثلها المنحنى $ص = |س|$

بالانعكاس في محور السينات ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة في اتجاه $\overleftarrow{وس}$ وإزاحة رأسية 3 وحدات في اتجاه $\overleftarrow{وص}$



∴ المنحنيان يتقاطعان في $(0 ، 2)$ ، $(3 ، 1)$ ∴ مجموعة الحل = $\{0 ، 3\}$

2 بوضع $د(س) = |س - 3|$ ، $ر(س) = 3 - |س|$

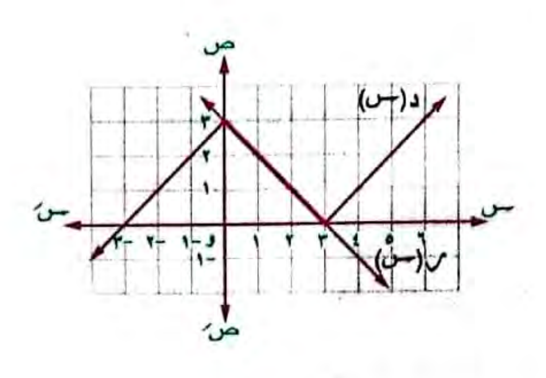
∴ د يمثلها المنحنى $ص = |س|$

بإزاحة أفقية 3 وحدات في اتجاه $\overleftarrow{وس}$

، ر يمثلها صورة المنحنى $ص = |س|$

بالانعكاس في محور السينات ثم إزاحة

رأسية 3 وحدات في اتجاه $\overleftarrow{وص}$



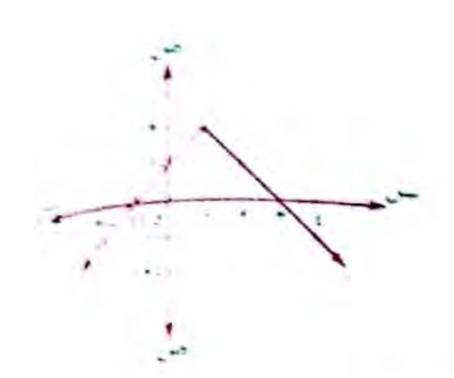
∴ المنحنيان يتقاطعان في عدد لا نهائي من النقط (س ، ص) بحيث $س \in [0 ، 3]$

∴ مجموعة الحل = $[0 ، 3]$



مثال ٦

ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = ٢ − | س − ١ |
ومن الرسم استنتج مجموعة الحل للمعادلة : د (س) = ٠



الحــل

∵ د (س) = − | س − ١ | + ٢

∴ د يمثلها بيانيًا صورة المنحنى ص = | س | بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة أفقية وحدة واحدة فى اتجاه و س ثم إزاحة رأسية وحدتان فى اتجاه و ص

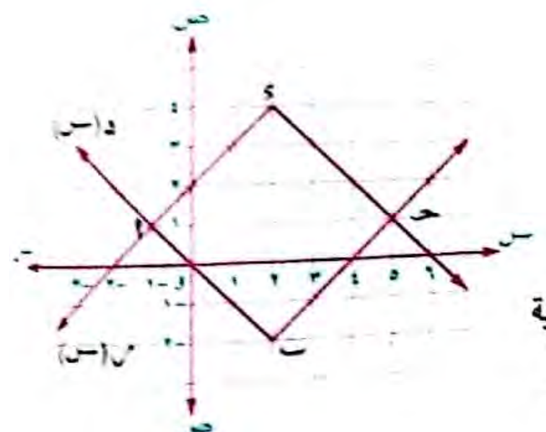
∴ مجموعة الحل للمعادلة : د (س) = ٠

هى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع الخط البيانى للدالة د مع محور السينات أى مع المستقيم ص = ٠ فنجدها ٣ ، −١ ∴ مجموعة الحل للمعادلة = {٣ ، −١}

مثال ٧

أوجد بالوحدات المربعة المساحة المحصورة بين المنحنيين د ، ر حيث :

د (س) = | س − ٢ | − ٢ ، ر (س) = ٤ − | س − ٢ |



الحــل

د يمثلها المنحنى ص = | س | بإزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س وإزاحة رأسية وحدتين فى اتجاه و ص ، ر يمثلها صورة المنحنى ص = | س | بالانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة أفقية وحدتين فى اتجاه و س وإزاحة رأسية ٤ وحدات فى اتجاه و ص

من الرسم :

المساحة المحصورة بين منحنيى الدالتين د ، ر

هى سطح مربع رؤوسه النقط أ (−١ ، ١) ، ب (٢ ، −٢) ، حـ (٥ ، ١) ، ء (٢ ، ٤)

وطول قطره أ حـ = ٥ − (−١) = ٦ وحدة طول

∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المربع أ ب حـ ء = $\frac{١}{٢}$ (أ حـ)^{٢}

= $\frac{١}{٢}$ × ٣٦ = ١٨ وحدة مربعة.

لاحظ أن

القطرين أ حـ ، ب ء ينصف كل منهما الآخر ومتعامدان ومتساويان فى الطول

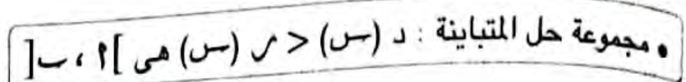
∴ الشكل يمثل مربعًا.



ثانيًا حل متباينات القيمة المطلقة

١ الحل البيانى لمتباينات القيمة المطلقة

فى الشكل المقابل : لأى دالتين د ، ر :



• مجموعة حل المتباينة : د (س) < ر (س) هى]أ ، ب[

وهى مجموعة قيم س التى يكون عندها منحنى الدالة د أسفل منحنى الدالة ر

• مجموعة حل المتباينة : د (س) > ر (س) هى]- ∞ ، أ[∪]ب ، ∞[= ح - [أ ، ب]

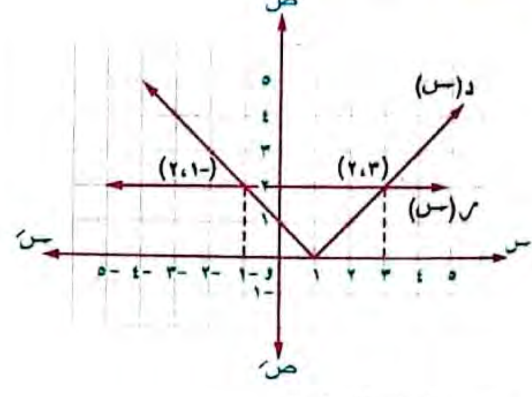
وهى مجموعة قيم س التى يكون عندها منحنى الدالة د أعلى منحنى الدالة ر

لاحظ من الشكل أن : مجموعة حل المعادلة د (س) = ر (س) هى {أ ، ب} ولذلك فإن :

• مجموعة حل المتباينة : د (س) ≤ ر (س) هى [أ ، ب]

• مجموعة حل المتباينة : د (س) ≥ ر (س) هى]- ∞ ، أ] ∪ [ب ، ∞[= ح -]أ ، ب[

فمثلًا فى : الشكل ①



مجموعة حل المتباينة :

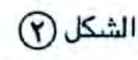
د (س) < ر (س) هى]-١ ، ٣[

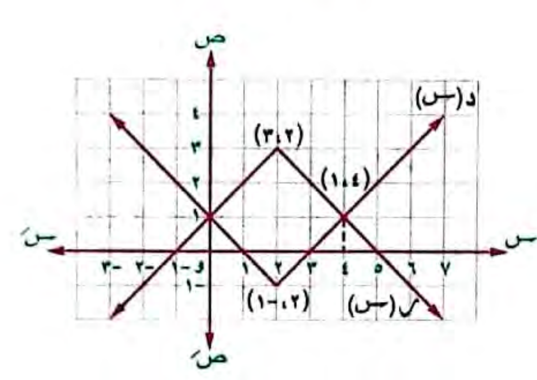
مجموعة حل المتباينة :

د (س) > ر (س) هى ح - [-١ ، ٣]

مجموعة حل المعادلة :

د (س) = ر (س) هى {-١ ، ٣}


الشكل ②



مجموعة حل المتباينة :

د (س) < ر (س) هى]٠ ، ٤[

مجموعة حل المتباينة :

د (س) > ر (س) هى ح - [٠ ، ٤]

مجموعة حل المعادلة :

د (س) = ر (س) هى {٠ ، ٤}



مثال ٨

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

١ |س + ٣| < ٢

٢ |٢س − ٨| ≤ ٦

٣ |س − ٣| < ½ س

٤ |س − ٢| ≤ ٣ − |س − ٣|

الحل

١ بوضع د (س) = |س + ٣| ، ر (س) = ٢

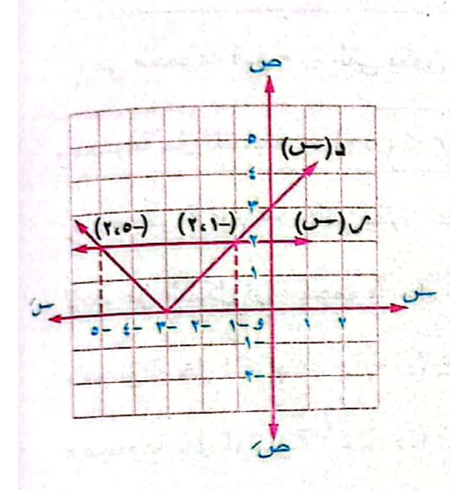
من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر

فى الشكل المقابل ينتج أن :

د (س) < ر (س) أى |س + ٣| < ٢

فى الفترة]−٥ ، −١[

∴ مجموعة حل المتباينة =]−٥ ، −١[



٢ ∵ |٢ (س − ٤)| ≤ ٦

∴ ٢ |س − ٤| ≤ ٦

∴ |س − ٤| ≤ ٣

بوضع د (س) = |س − ٤| ، ر (س) = ٣

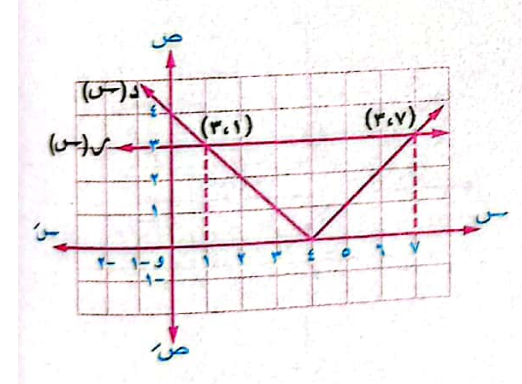
من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر

فى الشكل المقابل ينتج أن :

د (س) ≤ ر (س)

أى |س − ٤| ≤ ٣ فى الفترة [١ ، ٧]

∴ مجموعة حل المتباينة = [١ ، ٧]



٣ بوضع د (س) = |س − ٣| ، ر (س) = ½ س

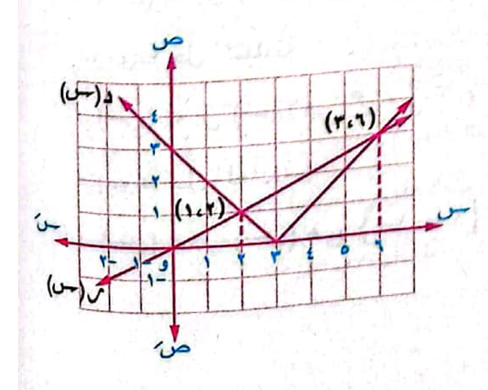
من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر

فى الشكل المقابل ينتج أن : د (س) < ر (س)

أى |س − ٣| < ½ س فى الفترة

]−∞ ، ٢] ∪ [٦ ، ∞[= ح − [٢ ، ٦]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − [٢ ، ٦]



٤ بوضع د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = ٣ − |س − ٣| = − |س − ٣| + ٣

من التمثيل البيانى للدالتين د ، ر

فى الشكل المقابل ينتج أن : د (س) ≤ ر (س) أى :

|س − ٢| ≤ ٣ − |س − ٣| فى الفترة

]−∞ ، ١] ∪ [٤ ، ∞[= ح −]١ ، ٤[

∴ مجموعة حل المتباينة = ح −]١ ، ٤[

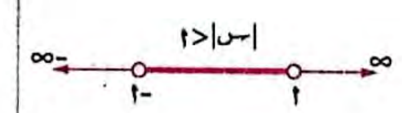
٢ الحل الجبرى لمتباينات القيمة المطلقة



• لكل أ ∈ ح⁺

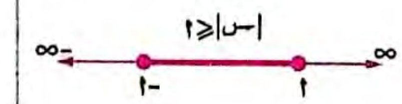
١ إذا كان : |س| < أ فإن : − أ < س < أ

أى أن س ∈]− أ ، أ[



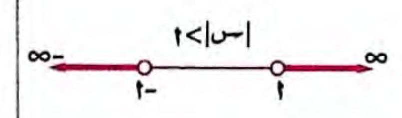
٢ إذا كان : |س| ≤ أ فإن : − أ ≤ س ≤ أ

أى أن س ∈ [− أ ، أ]



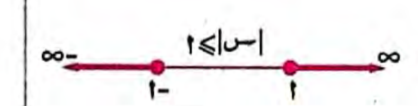
٣ إذا كان : |س| > أ فإن : س > أ أو س < − أ

أى أن س ∈ ح − [− أ ، أ]



٤ إذا كان : |س| ≥ أ فإن : س ≥ أ أو س ≤ − أ

أى أن س ∈ ح −]− أ ، أ[



• لكل أ ∈ ح⁻

١ مجموعة حل المتباينة : |س| < أ ، |س| ≤ أ فى ح تساوى ∅

٢ مجموعة حل المتباينة : |س| > أ ، |س| ≥ أ فى ح تساوى ح

مثال ١

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

١ |٢س − ٥| < ١

٢ |س + ٢| > ٣

٣ $\sqrt{٤س^٢ + ١٢س + ٩} \leq ١$

٤ $\frac{١}{|٣س - ١|} \geq ٥$

٥ |٢س − ٥| + |٥ − ٢س| < ١٤



الحل

١ ∵ |٢س − ٥| < ١

∴ −١ + ٥ < ٢س < ١ + ٥

∴ ٢ < س < ٣

∴ −١ < ٢س − ٥ < ١

∴ ٤ < ٢س < ٦ بالقسمة على ٢

∴ مجموعة الحل =]٢ ، ٣[

٢ ∵ |س + ٢| > ٣

∴ س + ٢ > ٣ أو س + ٢ < −٣

∴ س > ١ | ∴ س < −٥

∴ مجموعة الحل = ح − [−٥ ، ١]

لاحظ أنه

عند حل المتباينة : |س + ٢| > ٣

يمكن أن نحل أولًا المتباينة

|س + ٢| ≤ ٣ كالتالى

∴ −٣ ≤ س + ٢ ≤ ٣

∴ −٥ ≤ س ≤ ١ ∴ م.ح = [−٥ ، ١]

∴ م.ح المتباينة المطلوبة |س + ٢| > ٣

هى ح − [−٥ ، ١]

٣ ∵ √(٤س^٢ + ١٢س + ٩) ≤ ١

∴ √((٢س + ٣)^٢) ≤ ١

∴ |٢س + ٣| ≤ ١ ∴ −١ ≤ ٢س + ٣ ≤ ١

∴ −٤ ≤ ٢س ≤ −٢ ∴ −٢ ≤ س ≤ −١

∴ مجموعة الحل = [−٢ ، −١]

٤ ∵ ١ / |٣س − ١| ≥ ٥

∴ |٣س − ١| ≤ ١/٥

∴ −١/٥ ≤ ٣س − ١ ≤ ١/٥

∴ ٤/٥ ≤ ٣س ≤ ٦/٥

∴ ٤/١٥ ≤ س ≤ ٢/٥

، ∵ |٣س − ١| = ٠ عندما س = ١/٣

∴ مجموعة الحل = [٤/١٥ ، ٢/٥] − {١/٣}

لاحظ أنه

- إذا كان أ ، ب ∈ ح^+ ، أ > ب فإن ١/أ < ١/ب
- عند إيجاد مجموعة حل المتباينة يجب استبعاد مجموعة أصفار المقام من مجموعة الحل.

٥ ∵ |٢س − ٥| + |٥ − ٢س| < ١٤

∴ |٢س − ٥| + |٢س − ٥| < ١٤

∴ ٢|٢س − ٥| < ١٤ وبالقسمة على ٢

∴ |٢س − ٥| < ٧

∴ −٧ < ٢س − ٥ < ٧

∴ −٢ < ٢س < ١٢

∴ −١ < س < ٦

∴ مجموعة الحل =]−١ ، ٦[



ثالثا تطبيقات على خواص معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

مثال ١٠

عين مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = $\frac{٢ س}{|س| - ٣}$

٢ د (س) = $\frac{س^٢}{|س - ١| + ٢}$

٣ د (س) = $\sqrt{٤ - |س|}$

٤ د (س) = $\sqrt{|س| - ٢}$

٥ د (س) = $\frac{٢ س}{\sqrt{|س - ٣| - ٢}}$

٦ د (س) = $\frac{س^٢}{\sqrt{٣ - |س + ٢|}}$

الحل

١ نوجد أصفار المقام : |س| - ٣ = ٠ ∴ |س| = ٣

∴ س = ± ٣ ∴ المجال = ح - {٣ ، -٣}

٢ نوجد أصفار المقام : |س - ١| + ٢ = ٠ ∴ |س - ١| = -٢

، ∵ -٢ < صفر وهذا يتعارض مع تعريف القيمة المطلقة

∴ لا يوجد أصفار للمقام ∴ المجال = ح

٣ تكون الدالة د معرفة بشرط : ٤ - |س| ≥ ٠ ∴ |س| ≤ ٤

∴ -٤ ≤ س ≤ ٤ ∴ المجال = [-٤ ، ٤]

٤ تكون الدالة د معرفة بشرط : |س| - ٢ ≥ ٠ ∴ |س| ≥ ٢

∴ س ≥ ٢ أ، س ≤ -٢

∴ المجال = ح -]-٢ ، ٢[

٥ تكون الدالة د معرفة بشرط : |س - ٣| - ٢ > ٠ ∴ |س - ٣| > ٢

∴ س - ٣ > ٢ أ، س - ٣ < -٢

∴ س > ٥ | س < ١

∴ المجال = ح - [١ ، ٥]

٦ تكون الدالة د معرفة بشرط : ٣ - |س + ٢| > ٠ ∴ |س + ٢| < ٣

∴ -٣ < س + ٢ < ٣ ∴ -٥ < س < ١

∴ المجال =]-٥ ، ١[



مثال ١١

اكتب متباينة القيمة المطلقة التى تعبر عن :

١ درجة طالب فى أحد الاختبارات تتراوح من ٧٠ إلى ٩٠ درجة

٢ العمق الذى تعيش فيه بعض الأسماك تحت سطح الماء فى حوض سمك ارتفاعه الداخلى ٤٠ سم

الحل

١ بفرض أن درجة الطالب = س درجة

∴ ٧٠ ≤ س ≤ ٩٠

(بإضافة -٨٠ إلى أطراف المتباينة)

∴ ٧٠ - ٨٠ ≤ س - ٨٠ ≤ ٩٠ - ٨٠

∴ -١٠ ≤ س - ٨٠ ≤ ١٠

∴ متباينة القيمة المطلقة هى |س - ٨٠| ≤ ١٠

لاحظ أن

٨٠ هو الوسط الحسابى للعددين ٧٠ ، ٩٠

٢ بفرض أن العمق الذى تعيش فيه هذه الأسماك = س سم

∴ ٠ < س < ٤٠ (بإضافة -٢٠ إلى أطراف المتباينة)

∴ ٠ - ٢٠ < س - ٢٠ < ٤٠ - ٢٠

∴ -٢٠ < س - ٢٠ < ٢٠

∴ متباينة القيمة المطلقة هى |س - ٢٠| < ٢٠

لاحظ أن

٢٠ هو الوسط الحسابى للعددين ٠ ، ٤٠

مثال ١٢

ابحث نوع كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١ د (س) = $\frac{\text{جتا س}}{|\text{س}| - ٣}$

٢ د (س) = $\frac{|\text{س} + ٢| - |\text{س} - ٢|}{|\text{س} + ٢| + |\text{س} - ٢|}$

الحل

١ ∵ د (-س) = $\frac{\text{جتا}(-\text{س})}{|-\text{س}| - ٣}$ = $\frac{\text{جتا س}}{|\text{س}| - ٣}$ = د (س)

∴ الدالة د زوجية.

٢ ∵ د (-س) = $\frac{|٢ - \text{س}| - |\text{س} + ٢|}{|\text{س} + ٢| + |\text{س} - ٢|}$

= $\frac{-(|٢ + \text{س}| - |٢ - \text{س}|)}{|٢ + \text{س}| + |٢ - \text{س}|}$ = - د (س)

∴ الدالة د فردية.

لاحظ أن

|س| = |-س|





على حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المعادلة : | س − ٢ | = ٣ هى ....

(أ) {٢ ، ٣} (ب) {−١ ، ٥} (جـ) [−١ ، ٥] (د) {٥ ، −٥}

(٢) مجموعة حل المعادلة | ٥ س − ١ | + ٤ = ١ فى ح هى ....

(أ) {$\frac{-٤}{٥}$} (ب) {$\frac{-٤}{٥}$ ، $\frac{٦}{٥}$} (جـ) ∅ (د) {$\frac{٦}{٥}$}

(٣) مجموعة حل المعادلة : | س − ٣ | = | ٣ − س | فى ح هى ....

(أ) {٣} (ب) {٣ ، −٣} (جـ) ح (د) ∅

(٤) مجموعة حل المعادلة : | ٢ س − ٤ | = | س + ١ | هى ....

(أ) {١ ، ٥} (ب) {٥ ، −١} (جـ) {١ ، −٥} (د) {−٥ ، −١}

(٥) مجموعة حل المعادلة : | ٢ س − ١ | = س + ٢ هى ....

(أ) {٣} (ب) {٣ ، $\frac{١}{٣}$} (جـ) {٣ ، $\frac{-١}{٣}$} (د) ∅

(٦) مجموعة حل المعادلة : | س − ٢ | = س − ٢ هى ....

(أ) ∅ (ب) {٢} (جـ) [٢ ، ∞[(د) ح

(٧) مجموعة حل المعادلة : $\frac{١}{|س - ٣|}$ = $\frac{١}{٢}$ هى .... حيث س ≠ ٣

(أ) {٥} (ب) {١} (جـ) {٥ ، ١} (د) ∅

(٨) مجموعة حل المعادلة : | س | + س = ٠ هى ....

(أ) {٠} (ب)]−∞ ، ٠] (جـ)]−∞ ، ٠[(د) ∅

(٩) مجموعة حل المعادلة : $\frac{|س|}{س}$ = ١ فى ح هى ....

(أ) {٠} (ب) ح⁺ (جـ) ح⁻ (د)]٠ ، ∞[

(١٠) مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{س^٢}$ − ٣ س = ٨ هى ....

(أ) ∅ (ب) {−٢ ، −٤} (جـ) {−٤} (د) {−٢}



(١١) مجموعة حل المعادلة : $س^٢ = ٢ - |س|$ هي ....

(أ) {١ ، -١} (ب) {٢ ، -٢} (جـ) {١ ، -٢} (د) {-١ ، ٢}

(١٢) إذا كانت مجموعة حل المعادلة : |س - أ| = ب هي {٥ ، ٩} فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (-٢ ، ٧) (ب) (٧ ، ٢) (جـ) (٢ ، ٧) (د) (-٧ ، ٢)

(١٣) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س^٢}$ + |س| فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٢ فى ح ....

(أ) {٢ ، -٢} (ب) {١ ، -١} (جـ) {٢ ، ٠} (د) {-١ ، ٠}

(١٤) إذا كان : د (س) = |س - ٢| + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س + ٢) = ٣ هي ....

(أ) {١ ، ٣} (ب) ح (جـ) ∅ (د) {-١ ، -٣}

(١٥) إذا كان : د (س) = |س - ٢| + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س + ٢) = ٦ هي ....

(أ) {٠ ، ٤} (ب) {٢ ، -٢} (جـ) {٢ ، ٤} (د) {-٢ ، -٤}

(١٦) مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{٤س^٢ - ١٢س + ٩}$ = ٥ هي ....

(أ) {٤} (ب) {-١} (جـ) {٤ ، -١} (د) ح

(١٧) أى مما يأتى لا ينتمى لمجموعة حل المعادلة |س + ٢| + |س - ١| = ٣

(أ) -٢ (ب) صفر (جـ) -٣ (د) ١

(١٨) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٢}{|س| - ٢}$ هو ....

(أ) ح - {٢} (ب) ح - {-٢} (جـ) ح (د) ح - {٢ ، -٢}

(١٩) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س| + ٣}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٣ ، -٣} (جـ) ح - {٣ ، -٣} (د) ح - {٣}

(٢٠) إذا كان مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س}{|س| + أ}$ هو ح - {-٢ ، ٢} فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ± ٢ (د) صفر

(٢١) الدالة د : د (س) = $\frac{س طاس}{|س|}$ من حيث نوعها تكون ....

(أ) فردية. (ب) زوجية.

(جـ) ليست فردية وليست زوجية. (د) أحادية.

(٢٢) العبارة الخطأ فيما يلى هى ....

(أ) |س ص| = |س| × |ص| (ب) |س| = |-س|

(جـ) |س + ص| = |س| + |ص| (د) $\sqrt{س^٢}$ = |س|



(٢٣) إذا كان : أ > ٠ ، ب < ٠ فإن أى مما يأتى يكون دائمًا سالبًا ؟

(أ) |أ ب|　(ب) أ |ب|　(جـ) |أ| ب　(د) أ + |ب|

(٢٤) إذا كان : $\frac{أ}{|أ|} = -١$ ، $\frac{ب}{|ب|} = ١$ فإن كل العبارات الآتية خطأ ما عدا ....

(أ) أ × ب > ٠　(ب) أ - ب > ٠　(جـ) أ - ب = ٠　(د) أ^{٢} + ب > ٠

(٢٥) إذا كان : أ > ٠ > ب فإن : |أ| + |ب| + |ب - أ| - |أ - ب| = ...

(أ) ٢ أ　(ب) ٢ ب　(جـ) أ - ب　(د) ب - أ

(٢٦) عدد نقط تقاطع المنحنيين : ص = |س + ٢| ، ص = ٢ - |س| هو ....

(أ) صفر　(ب) ١　(جـ) ٢　(د) عدد لا نهائى.

(٢٧) مجموعة حل المتباينة : |س| > -١ هى ....

(أ)]٠ ، ∞[　(ب) ح　(جـ) ∅　(د) ح - {٠}

(٢٨) مجموعة حل المتباينة : $\frac{١}{|س|} \geq ١$ هى ....

(أ) [-١ ، ١]　(ب)]-١ ، ١[　(جـ) [-١ ، ١] - {٠}　(د)]-١ ، ١[- {٠}

(٢٩) مجموعة حل المتباينة : |٣ - س| > ٠ هى ....

(أ)]-٣ ، ٣[　(ب) ح - [-٣ ، ٣]　(جـ) ح - {٣}　(د) ح

(٣٠) مجموعة حل المتباينة : $\frac{١}{|س - ٢|} \geq \frac{١}{٢}$ هى ....

(أ)]٠ ، ٤[- {٢}　(ب) [٠ ، ٤] - {٢}　(جـ) [٠ ، ٤]　(د)]٠ ، ٤[

(٣١) مجموعة حل المتباينة : |س + ٣| ≤ ٠ هى ....

(أ) ∅　(ب)]-∞ ، -٣]　(جـ) [-٣ ، ∞[　(د) {-٣}

(٣٢) إذا كان : |س| < أ ، أ ∈ ح$^{+}$ فإن : س ∈ ....

(أ) ح - [-أ ، أ]　(ب) [-أ ، أ]　(جـ) ح -]-أ ، أ[　(د)]-أ ، أ[

(٣٣) مجموعة حل المتباينة : |س - ٢| ≥ -٤ فى ح هى ....

(أ)]-٢ ، ٦[　(ب) [-٢ ، ٦]　(جـ) ح　(د) ∅

(٣٤) مجموعة حل المتباينة : |٢ س - ٥| ≤ ٩ فى ح هى ....

(أ)]-∞ ، ٧[　(ب) [-٢ ، ٧]　(جـ) ح -]-٢ ، ٧[　(د) ح - [-٢ ، ٧]

(٣٥) مجموعة حل المتباينة : |٤ - ٦ س| ≥ ١٤ فى ح هى ....

(أ)]$-\frac{٥}{٣}$ ، ٣[　(ب) [$-\frac{٥}{٣}$ ، ٣]　(جـ) ح -]$-\frac{٥}{٣}$ ، ٣[　(د) ح - [$-\frac{٥}{٣}$ ، ٣]



(٣٦) إذا كانت مجموعة حل المتباينة : |س − أ| ≥ ب هى الفترة [−٢ ، ٨] فإن (أ ، ب) = ...

(أ) (٥ ، ٣) (ب) (٣ ، ٥) (جـ) (−٣ ، ٥) (د) (−٥ ، ٣)

(٣٧) إذا كانت : س ∈ [−١ ، ٤] فإن : |٢ س − ٣| ≤ ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) −٥

(٣٨) مجموعة حل المتباينة : √(س² − ٢ س + ١) ≥ ٤ هى ....

(أ) [−٣ ، ٥] (ب) ح −]−٣ ، ٥[(جـ)]−٣ ، ٥[(د) ح − [−٣ ، ٥]

(٣٩) مجموعة حل المتباينة : √(٤ س² − ١٢ س + ٩) ≤ ٩ هى ....

(أ) [−٦ ، ١٢] (ب) [−٣ ، ٦] (جـ) ح − [−٣ ، ٦] (د) ح −]−٣ ، ٦[

(٤٠) مجموعة حل المتباينة : |٢ س − ٣| + |٦ − ٤ س| ≤ ٢١ هى ....

(أ) [−٢ ، ٥] (ب) ح −]−٢ ، ٥[(جـ)]−٢ ، ٥[(د) {−٢ ، ٥}

(٤١) مجموعة حل المتباينة : √((س + ٢)²) + |٢ س + ٤| > ٦ فى ح هى ....

(أ) [−٤ ، ٠] (ب) ح − [−٤ ، ٠] (جـ)]−٤ ، ٠[(د) ح −]−٤ ، ٠[

(٤٢) إذا كان : ١ < س < ٢ فإن : √(س² − ٢ س + ١) + √(س² − ٤ س + ٤) = ...

(أ) ٢ س − ٣ (ب) ٢ س − ١ (جـ) ١ (د) ٣

(٤٣) متباينة القيمة المطلقة التى تعبر عن أن درجة الطالب فى أحد الاختبارات (س) تتراوح من ٧٠ إلى ٩٠ درجة هى ....

(أ) |س| ≤ ٩٠ (ب) |س| ≥ ٧٠ (جـ) |س − ٨٠| ≤ ١٠ (د) |س − ٧٠| ≤ ٩٠

(٤٤) عدد الحلول التى تنتمى لمجموعة الأعداد الصحيحة للمتباينة |س − ٢| ≤ ٥ هى ....

(أ) صفر (ب) ٧ (جـ) ٩ (د) ١١

(٤٥) مجموعة حل المتباينة : ٠ < |س − ٢| < ٥ هى ....

(أ)]٢ ، ٧[(ب)]−٣ ، ٧[(جـ)]−٣ ، ٧[− {٢} (د)]−٥ ، ٥[

(٤٦) مجال الدالة د : د(س) = √(√(س²) − ١) هو ....

(أ) [−١ ، ١] (ب)]−١ ، ١[(جـ) ح − [−١ ، ١] (د) ح −]−١ ، ١[

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على حل معادلات القيمة المطلقة

١ أوجد جبريًا فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) ٤ |س| − ٢٠ = ٠ . «{٥ ، −٥}»

(٢) |٣ − ٢ س| = ٧ «{٥ ، −٢}»

(٣) ٣ − |س + ٢| = ٢ «{−١ ، −٣}»

(٤) ٢ |س| = ٣ − |س| «{١ ، −١}»

(٥) |س − ٢| = ٣ س − ٤ «{$\frac{٣}{٢}$}»

(٦) |س + ٢| − س + ١ = ٠ . «∅»



⑦ |س + ٢| + س − ٢ = ٠ . «{٠}»

⑧ ٥ س − ٢ |س| = ٢١ «{٧}»

⑨ |س + ٥| = |س − ٣| «{−١}»

⑩ |٢ س − ٦| = |س − ٣| «{٣}»

⑪ |س − ١| − ٢ |٢ − س| = ٠ . «{٣ ، ٥/٣}»

⑫ س² − ٥ |س| + ٦ = ٠ . «{٢ ، −٢ ، ٣ ، −٣}»

⑬ √س² − ٢ س = ٦ «{−٢}»

⑭ √(س² − ٤ س + ٤) = ٤ «{−٢ ، ٦}»

⑮ |س| + س = ٠ . «]−∞ ، ٠]»

⑯ |س + ٣| + ٢ س = ٠ . «{−١}»

⑰ √(س² − ٦ س + ٩) + ٢ س = ٩ «{٤}»

⑱ |س − ٣|² − |س − ٣| = صفر «{٣ ، ٢ ، ٤}»

⑲ ٥ |٣ − س| − ٢ √(س² − ٦ س + ٩) = ١٢ «{٧ ، −١}»

⑳ |س² − ١| = |س − ١| «{١ ، ٠ ، −٢}»

㉑ |س + ١||س − ١| = ٢٦ «{٣√٣ ، −٣√٣}»

㉒ |س + ١|² − ٣ |س + ١| − ١٠ = ٠ . «{٤ ، −٦}»

㉓ (س − ٥)² = |٢ س − ١٠| «{٥ ، ٧ ، ٣}»

㉔ س |س| − س = ٠ . «{٠ ، ١ ، −١}»

㉕ س |٥ − س| = ٦ «{٢ ، ٣ ، ٦}»

㉖ |س² + س − ١٠| = ١٠ «{٠ ، −١ ، −٥ ، ٤}»

㉗ (٤ س − ٨) / |س − ٢| = س «{٤ ، −٤}»

㉘ س² |س| = ٨ س «{−٢ ، ٠ ، ٢}»

---

٢ أوجد بيانيًا في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية ، وحقق الناتج جبريًا :

① |س| − ٤ = ٠ «{٤ ، −٤}»

② |س| + ٢ = ٠ «∅»

③ ٢ − |س + ٢| = ٠ «{٠ ، −٤}»

④ √(س² − ٤ س + ٤) = ٣ «{٥ ، −١}»

⑤ |س + ٣| + س = ٥ «{١}»

⑥ |س − ٢| = ٣ س − ٤ «{١ ١/٢}»

⑦ |٢ س + ٤| = ١ − س «{−١ ، −٥}»

⑧ |٢ س + ٥| = س − ٤ «∅»

⑨ |س + ٢| = |س − ٣| «{١/٢}»

⑩ |س − ٢| + |س − ١| = صفر «∅»

⑪ |س − ٣| = |٢ س + ١| «{−٤ ، ٢/٣}»

⑫ |س − ٤| = ٤ − س «]−∞ ، ٤]»

⑬ |س + ٢| = س + ٢ «[−٢ ، ∞[»

⑭ |س − ٣| − |س + ٢| = ٥ «]−∞ ، −٢]»

⑮ |س − ٣| = ٤ − |س + ١| «[−١ ، ٣]»

⑯ |س + ٢| = س² + ٢ «{٠ ، ١}»

٣ أثبت أن الدالة د حيث د(س) = $\frac{١٢}{|س| + ٢}$ زوجية ، ثم أوجد جبريًا مجموعة حل المعادلة د(س) = ٢ «{-٤ ، ٤}».

٤ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د(س) = |٢ س + ٥| - ٣ وعين مدى الدالة وادرس اطرادها ومن الرسم استنتج مجموعة حل المعادلة : |٢ س + ٥| - ٣ = ٠ وحقق ذلك جبريًا. «{-١ ، -٤}».

٥ ارسم منحنى الدالة د : د(س) = ١ - |٢ س| واستنتج من الرسم مدى الدالة واطرادها ، وأثبت أنها زوجية ، ثم من الرسم أو بأى طريقة أخرى أوجد مجموعة حل المعادلة : ١ - |٢ س| = -٣ «{-٢ ، ٢}».

٦ أثبت أن الدالة د : د(س) = $\frac{١ - |س|}{|س|}$ زوجية ثم ارسم منحنى د ثم أوجد بيانيًا أو جبريًا مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ ، وتحقق من صحة الناتج. «{-١ ، ١}».

٧ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د(س) = |س - ١| + س + ١ موضحًا مدى الدالة ودارسًا الاطراد ثم أوجد مجموعة حل المعادلة : د(س) = ٣ «{$\frac{٣}{٢}$}».

٨ ارسم فى شكل واحد الدالتين د ، ر حيث د(س) = $س^٢$ |س| ، ر(س) = ٢ - |س| ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ر(س) «{-١ ، ١}».

تمارين على حل متباينات القيمة المطلقة

٩ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية جبريًا :

(١) |س - ٣| ≤ ٥ «[-٢ ، ٨]».

(٢) |س - ٣| ≥ ٥ «ح -]-٢ ، ٨[».

(٣) |٢ س + ٥| > ٣ «ح - [-٤ ، -١]».

(٤) |٣ - س| < ٧ «]-٤ ، ١٠[».

(٥) |$\frac{س - ٣}{٤}$| ≤ ١ «[-١ ، ٧]».

(٦) |٢ س + ٢| + ٥ < ٤ «∅».

(٧) $\frac{١}{|٣ س|}$ ≥ ٥ «[-$\frac{١}{١٥}$ ، $\frac{١}{١٥}$] - {٠}».

(٨) $\frac{١}{|٢ س - ٣|}$ > ٢ «]$\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٧}{٤}$[- {$\frac{٣}{٢}$}».

(٩) |٢ س - ٣| + ٣ > ٧ «ح - [-$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$]».

(١٠) $\sqrt{س^٢ - ٢ س + ١}$ ≥ ٤ «ح -]-٣ ، ٥[».

(١١) $\sqrt{٤ س^٢ - ١٢ س + ٩}$ ≤ ٩ «[-٣ ، ٦]».

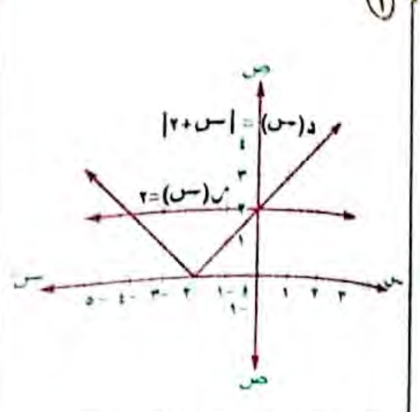
(١٢) |س - ٢| + |٢ - س| < ٦ «]-١ ، ٥[».

(١٣) $\sqrt{(س + ٢)^٢}$ + |٢ س + ٤| ≥ ٦ «ح -]-٤ ، ٠[».



١٠ باستخدام الأشكال البيانية الآتية :

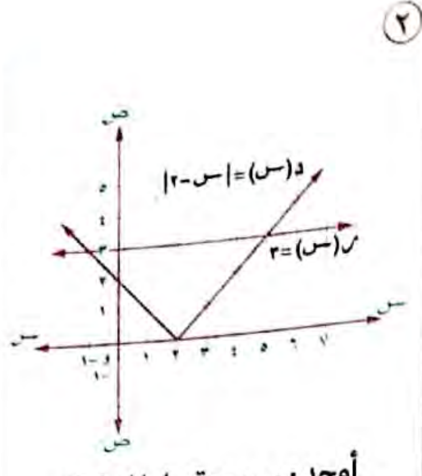
①



أوجد : مجموعة حل المتباينة

د (س) > ر (س) فى ح

②



أوجد : مجموعة حل المتباينة

د (س) > ر (س) فى ح

③

ر(س) = ٤

د(س) = |٢س+٦|

أوجد : مجموعة حل المتباينة

د (س) ≥ ر (س) فى ح

---

١١ أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية بيانيًا ثم حقق الناتج جبريًا :

① |س − ١| < ٢

② |٢س − ٥| ≥ ٢

③ $\sqrt{٤س^٢ − ١٢س + ٩}$ > ٥

④ |س + ٣| < − س

⑤ |س − ٢| < − $\frac{١}{٣}$ س + ٦

⑥ |س − ٣| + |س − ٤| > ٥

---

١٢ اكتب على صورة متباينة القيمة المطلقة كلًا مما يأتى :

① −٤ ≤ س ≤ ٤

② ٠ < س < ٦

③ س ≤ −٢ أ، س ≥ ٢

④ س ∈ ح − [−٢ ، ٦]

---

١٣ اكتب متباينة القيمة المطلقة التى تعبر عن :

① درجة طالب فى اختبار ما تقع بين ٦٠ إلى ١٠٠ درجة

② درجة حرارة مقيسة بالترمومتر الطبى تقع بين ٣٥° C ، ٤٢° C

③ توجد الطحالب الخضراء فى المحيطات على عمق يصل إلى ٣٠ مترًا.

تمارين متنوعة

١٤ أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

① د (س) = $\frac{٢}{|س| − ١}$

② د (س) = $\frac{٣}{|س| + ١}$

③ د (س) = $\frac{٣س}{|س − ٢| − ٥}$

④ د (س) = $\sqrt{٥ − |س|}$

⑤ د (س) = $\sqrt{|س| − ٥}$

⑥ د (س) = $\frac{١}{\sqrt{٥ − |س|}}$





15 ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① د (س) = س |س|

② د (س) = س^{٢} |س| − ١

③ د (س) = $\frac{|س - ١| + |س + ١|}{|س - ١| - |س + ١|}$

④ د (س) = $\frac{س^{٢} \text{ حتا } ٢ س}{٥ + |٢ س|}$

⑤ د (س) = ٢ |س| طا س + ٢ س |طا س|

⑥ د (س) = $\sqrt{|س| + س}$

16 أوجد بالوحدات المربعة المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين د ، ر حيث :

① د (س) = |س + ٣| + ٢ ، ر (س) = ٤

② د (س) = − |س − ٢| + ٣ ، ر (س) = صفر

③ د (س) = |س − ٢| − ١ ، ر (س) = ٥ − |س − ٢|

17 أثبت أن الدالة د حيث د (س) = $\frac{|س| + ١}{|س|}$ زوجية ، وارسم منحنى د ،

ثم أوجد بيانيًا وجبريًا مجموعة حل المعادلة د (س) = ٢ س − ٢ ، وتحقق من صحة الحل.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجموعة حل المعادلة : |س + ١|^{٢} + |٢ س + ٣| = ٠ في ح هي ....

(أ) {−١ ، $\frac{-٣}{٢}$} (ب) ح (جـ) {١ ، $\frac{٣}{٢}$} (د) ∅

② مجموعة حل المعادلة : |س^{٢} − ٤ س + ٣| = |س − ٣| في ح هي ....

(أ) {٠ ، ٢} (ب) {٢ ، ٣} (جـ) {٠ ، ٣} (د) {٠ ، ٢ ، ٣}

③ أصغر قيمة للمقدار : $\frac{|س| + |ص|}{|س + ص|}$ هي ....

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

④ إذا كان : $٢^{س} = ٦١$ فإن : |س − ٦| + |س − ٥| = ...

(أ) −١١ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ١١

⑤ إذا كان : أ^{٢} ب > ٠ ، $\frac{أ}{ب}$ > ٠ فإن : $\sqrt{أ^{٢}} + \sqrt{ب^{٢}} - (ب - أ) = $ ....

(أ) ٢ أ (ب) −٢ ب (جـ) −٢ أ + ٢ ب (د) صفر



⑥ إذا كان : −٤ ≤ س ≤ ٦ وكان أ ≤ | ٤ س − ٨ | ≤ ب فإن : أ + ب = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٠ (جـ) ١٨ (د) ١٦

⑦ حاصل ضرب جذرى المعادلة : س^{٢} − ٣ | س | − ١٠ = ٠ يساوى ....

(أ) −٢٥ (ب) −١٠ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

⑧ عدد قيم س الصحيحة التى تحقق أن : ٣ < | س | < ٨ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

⑨ إذا كانت د (س) = | ٢ س − ٥ | ، ر (س) = | س + ١ |

فإن مجموعة حل المعادلة : (ر ○ د) (س) = ٣ فى ح هى ....

(أ) {٢ ، −٤} (ب) {$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$} (جـ) {٣ ، ٧} (د) {$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٢}$}

---

٢ أوجد جبريًا فى ح مجموعة حل كل مما يأتى :

① (س + ١) (| س | − ١) + $\frac{١}{٢}$ = صفر «{ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، −١ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، −١ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ }»

② || ٢ س + ٣ | − ٨ | = ٥ «{−٨ ، ٥ ، ٠ ، −٣}»

③ $\frac{٢}{|س|}$ + | س | = ٣ «{٢ ، −٢ ، ١ ، −١}»

④ $\sqrt{(س - \frac{١}{س})^{٢} + ٤}$ = ٢ «{١ ، −١}»

⑤ | س^{٢} − ٣ | + $\frac{٢}{|س^{٢} - ٣|}$ = ٣ «{± ٢ ، ± $\sqrt{٢}$ ، ± $\sqrt{٥}$ ، ± ١}»

⑥ | ٤ − س | + | س − ٢ | = ١٠ «{٨ ، −٢}»

⑦ (| ٢ س − ٣ | − ٥) (| ٢ س − ٣ | + ٥) > ١١ «ح −]$\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٢}$[»





على الوحدة الأولى

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ الربط بالميكانيكا :

إذا كانت سرعة دراجة بخارية ع (ن) بالسنتيمتر/ثانية تعطى بالدالة ع حيث :

ع (ن) = { ٨ ن ، ٠ ≤ ن ≤ ١٠ ؛ ٨٠ ، ١٠ < ن < ٢٠٠ ؛ -٤ ن + ٨٨٠ ، ٢٠٠ ≤ ن < ٢٢٠ } حيث ن الزمن بالثانية

أوجد : ① ع (١٠) ② ع (١٥٠) ③ ع (٢١٠)

---

٢ الربط بالهندسة : إذا كان ح محيط مربع طول ضلعه ل اكتب محيط المربع كدالة فى طول ضلعه ح (ل)

ثم أوجد : ① ح (٣) ② ح $\left(\frac{١٥}{٤}\right)$

---

٣ الربط بالهندسة : إذا كانت م مساحة دائرة طول نصف قطرها نق. اكتب المساحة كدالة فى طول نصف القطر م (نق)

ثم أوجد : ① م $\left(\frac{١}{٢}\right)$ ② م (٥)

---

٤ الربط بالصناعة : يعمل سعيد فى مصنع لإنتاج المصابيح الموفرة للطاقة ، فإذا كان يتقاضى ٨ جنيهات أجرًا عن كل ساعة عمل بالإضافة إلى ٠,٢ جنيهًا عن كل مصباح ينتج يوميًا.

① اكتب قاعدة الدالة د التى تعبر عن أجر سعيد إذا كان يعمل ٧ ساعات يوميًا.

② هل الدالة د أحادية ؟ فسر إجابتك.

---

٥ الربط بالتجارة : يدفع تاجر غلال ٥٠ جنيهًا عن كل طن يدخل أو يخرج من مستودعه كأجر تحميل أو تنزيل ، اكتب الدالة التى تمثل تكاليف التحميل أو التنزيل ومثلها بيانيًا.

---

٦ الربط بالميكانيكا : يقطع جسم مسافة ف مترًا فى ٣ دقائق. إذا تحرك الجسم بسرعة ثابتة مقدارها ٣٠ مترًا / دقيقة ، بين أن سرعة الجسم ع تتغير عكسيًا بتغير الزمن (ن) لقطع هذه المسافة ، واكتب الدالة التى تمثل السرعة والزمن ومثلها بيانيًا ثم أوجد زمن قطع هذه المسافة إذا تحرك الجسم بسرعة ٤٥ مترًا / دقيقة.



7 **الربط بالصناعة :** صممت بوابة حديدية ارتفاع جانبيها ٣ أمتار وقوسها على شكل جزء من منحنى الدالة د : د (س) = أ (س − ٢)^{٢} + ٤ كما فى الشكل المقابل.

أوجد : ① قيمة أ

② أقصى ارتفاع للبوابة.

③ عرض البوابة.

« − $\frac{١}{٤}$ ، ٤ أمتار ، ٤ أمتار »

---

8 **الربط بالهندسة :** إذا علمت أن مساحة الشكل المحصور بين منحنى الدالة التربيعية والقطعة المستقيمة الأفقية المرسومة بين أى نقطتين عليه والموضحة فى الشكل المقابل تعطى بالعلاقة م = $\frac{٢}{٣}$ ل ع

① أوجد مساحة الشكل المحصور بين محور السينات ومنحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} − ٦ س + ٥ بالوحدات المربعة.

② ارسم على نفس الشبكة البيانية منحنيى الدالتين د ، ر حيث ر (س) = | س − ٣ | − ٢ ثم أوجد مساحة الجزء المحصور بينهما بالوحدات المربعة.

« $\frac{٣٢}{٣}$ ، $\frac{٢٠}{٣}$ وحدة مربعة »

---

9 **تخطيط المدن :**

قطعة أرض محصورة بين منحنيى الدالتين د ، ر حيث : د (س) = | س − ٣ | − ٢ ، ر (س) = ٣ ، احسب مساحتها بالوحدات المربعة وإذا كان طول الوحدة ٨ أمتار احسب مساحة الأرض بالأمتار المربعة.

« ١٦٠٠ م^{٢} »

---

10 **شبكات الطرق :** طريقان الأول يمثله منحنى الدالة د : د (س) = | س − ٥ | ، والثانى يمثله منحنى الدالة ر : ر (س) = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س ، إذا تقاطع الطريقان فى نقطتى أ ، ب أوجد المسافة بين أ ، ب لأقرب كيلو متر إذا كانت وحدة الأطوال تمثل مسافة قدرها ٥ كيلو مترات.

« ٣٦ كم »

---

11 **تطبيق حياتى على حل المتباينة :** تسمح إحدى شركات الغاز الطبيعى بتوظيف قارئ العداد إذا كان طوله يتراوح بين ١٧٨ سم ، ١٩٢ سم. عبر عن الأطوال الممكنة لمن يتقدم لشغل هذه الوظيفة بمتباينة القيمة المطلقة.

« | س − ١٨٥ | ≤ ٧ »



١٢ الربط بالميكانيكا : يتحرك جسم بسرعة منتظمة مقدارها ٨ سم/ث من الموضع أ إلى الموضع حـ مرورًا بالموضع ب دون توقف ، وكانت المسافة بين الجسم والموضع ب تحسب بالقاعدة ف (ن) = ٨ | ٥ - ن | حيث ن الزمن بالثوانى ، ف المسافة بالسنتيمترات.



(١) احسب المسافة بين الجسم والموضع ب بعد ثانيتين وبعد ٨ ثوان.

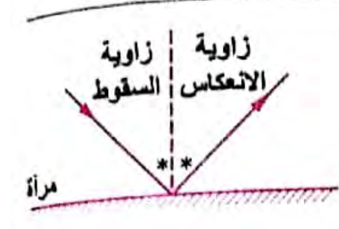
ماذا تلاحظ ؟ فسر إجابتك.

(٢) متى يكون الجسم على بعد ١٦ سم من الموضع ب ؟ فسر إجابتك.

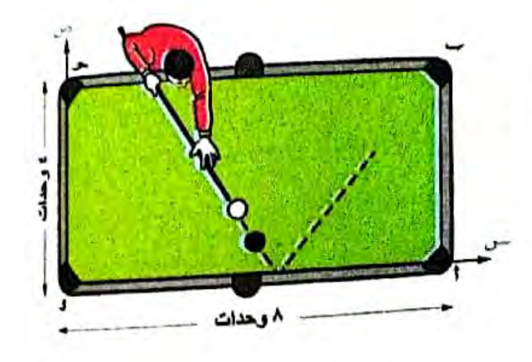
(٣) متى يكون الجسم على بعد يقل عن ٨ سم من الموضع ب ؟

«٢٤ سم ، ٢٤ سم ، ٣ ، ٧ ،]٤ ، ٦[»

١٣ تطبيق حياتى : إذا سقط شعاع الضوء على سطح عاكس فإن مساره يخضع لدالة المقياس فيكون قياس زاوية السقوط مساويًا لقياس زاوية الانعكاس ، كذلك مسار كرة البلياردو قبل وبعد تصادمها مع حافة الطاولة فى بعض الحالات.



* يوضح الشكل المقابل :



تصويب لاعب البلياردو على الكرة السوداء ، باعتبار $\overleftrightarrow{وس}$ ، $\overleftrightarrow{وص}$ محورى الإحداثيات المتعامدة ، وأن مسار الكرة يتبع منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{٤}{٣}$ | س - ٥ |

هل تسقط الكرة السوداء فى الجيب ب ؟

فسر إجابتك رياضيًا.



الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها







الدرس

1

الأسس الكسرية والمعادلات الأسية

الجذر النوني

المعادلة : $س^{ن} = أ$ حيث $أ \in ح$ ، $ن \in ص^{+}$ لها ن من الجذور

ونستعرض فيما يلى بعض الحالات :

١ إذا كان : ن عددًا زوجيًا ، أ > ٠

فإن المعادلة $س^{ن} = أ$ لها جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية (عندما ن > ٢) ويرمز للجذرين الحقيقيين بالرمزين $\sqrt[ن]{أ}$ ، $-\sqrt[ن]{أ}$ ويسمى الجذر النونى الذى له نفس إشارة أ بالجذر النونى الأساسى للعدد أ

فمثلًا : المعادلة $س^{٦} = ٦٤$ لها جذران حقيقيان هما $\sqrt[٦]{٦٤} = ٢$ ، $-\sqrt[٦]{٦٤} = -٢$

وتوجد أربعة جذور أخرى مركبة غير حقيقية (حاول إيجادهم بالتحليل)

٢ إذا كان : ن عددًا زوجيًا ، أ < ٠

فإن المعادلة $س^{ن} = أ$ ليس لها جذور حقيقية (جذورها أعداد مركبة غير حقيقية)

فمثلًا : عند حل المعادلة $س^{٢} = -١٦$

فإن $س = \pm\sqrt{-١٦} = \pm ٤ ت$ (أعداد مركبة غير حقيقية)

٣ إذا كان : ن عددًا فرديًا ، $أ \in ح - \{٠\}$

فإن المعادلة $س^{ن} = أ$ لها جذر حقيقى وحيد هو $\sqrt[ن]{أ}$ وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية

فمثلًا : المعادلة $س^{٣} = -٢٧$ لها جذر حقيقى وحيد هو $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$

ويوجد جذران مركبان غير حقيقيين (حاول إيجادهما بالتحليل)





٤ إذا كان : $ن \in ص^+$ ، أ = صفر فإن المعادلة $س^ن$ = صفر لها حل حقيقى وحيد هو س = ٠
(عدد جذور المعادلة يساوى ن وكل منها يساوى صفر عندما ن > ١)

فمثلاً : المعادلة $س^٣ = ٠$ لها ثلاثة جذور حقيقية متساوية وكل منها يساوى صفر

ملاحظـــة

$\sqrt[ن]{أ^ن} = |أ|$ إذا كان ن عددًا زوجيًا ، $\sqrt[ن]{أ^ن} = أ$ إذا كان ن عددًا فرديًا

فمثلاً : $\sqrt[٤]{(-٤)^٤} = |-٤| = ٤$ ، $\sqrt[٣]{(-٣)^٣} = -٣$

خواص الجذور النونية

إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين ، $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ح$ فإن :

١ $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$

٢ $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ حيث ب ≠ ٠ . **لاحظ أن :** $\sqrt[ن]{أ \pm ب} \neq \sqrt[ن]{أ} \pm \sqrt[ن]{ب}$

فمثلاً : $\sqrt[٣]{٢٧ ب^{١٥}} = \sqrt[٣]{٢٧} \times \sqrt[٣]{ب^{١٥}} = ٣ ب^٥$ ، $\sqrt[٤]{٨١ س^٤ ص^٨} = \sqrt[٤]{٨١} \times \sqrt[٤]{س^٤} \times \sqrt[٤]{ص^٨} = ٣ |س| ص^٢$

الأسس الكسرية

نفرض أن : $أ^م$ تمثل الجذر التربيعى الأساسى للعدد أ

∴ $أ^م = \sqrt{أ}$ وبتربيع الطرفين ∴ $(أ^م)^٢ = أ$ ∴ $أ^{٢م} = أ$

∴ ٢ م = ١ ∴ $م = \frac{١}{٢}$

أى أن : $أ^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{أ}$ **وبالمثل :** $أ^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{أ}$ ، $أ^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{أ}$

تعريف

١ إذا كان : $ن \in ص^+ - \{١\}$ ، $أ \in ح$ فإن : $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

مع ملاحظة أن : إذا كان : ن عدد زوجى ، أ < ٠ فإن : $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ} \notin ح$

فمثلاً : $٩^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٩} = ٣ \in ح$ ، $(\frac{-١}{٨})^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{\frac{-١}{٨}} = \frac{-١}{٢} \in ح$

بينما : $(-١٦)^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{-١٦} \notin ح$

٢ إذا كان م ، ن عددين صحيحين ليس بينهما عامل مشترك ، ن > ١ ، $\sqrt[ن]{أ} \in ح$

فإن : $أ^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{أ})^م = \sqrt[ن]{أ^م}$

فمثلاً : $(٨)^{\frac{٢}{٣}} = (\sqrt[٣]{٨})^٢ = ٢^٢ = ٤$ ، $(٨١)^{-\frac{٣}{٤}} = (\sqrt[٤]{٨١})^{-٣} = ٣^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$



قوانين الأسس

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين ، م ، ن عددين نسبيين ومع مراعاة استثناء الحالات التى يكون فيها المقام = صفر ، والحالات التى يكون فيها الأساس = صفر ، الأس = صفر معًا وأن تكون جميع التعبيرات المستخدمة معرفة فإن :

١) $أ^{صفر} = ١$

٢) $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$

٣) $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

٤) $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$

٥) $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

٦) $(أ ب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$

٧) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{-ن} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{ن} = \frac{ب^{ن}}{أ^{ن}}$

ملاحظات

١) إذا كان : $أ \in ح^{-}$ فإن :

- $أ^{ن} > ٠$ إذا كان ن عددًا صحيحًا زوجيًا
- $أ^{ن} < ٠$ إذا كان ن عددًا صحيحًا فرديًا

فمثلًا : $(-٤)^{٢} = ١٦ > ٠$ بينما $(-٤)^{٣} = -٦٤ < ٠$

٢) • إذا كان : $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن : $س = أ^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد فردى

• إذا كان : $س^{\frac{م}{ن}} = أ$ فإن : $س = \pm أ^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد زوجى

بشرط أن يكون م ، ن عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك (أى $\frac{م}{ن}$ عدد نسبى فى أبسط صورة) وإذا كان أحدهما زوجيًا فيجب أن يكون $أ \geq ٠$.

٣) **خطأ شائع :** * $(-٣٢)^{\frac{٢}{١٠}} = \sqrt[١٠]{(-٣٢)^{٢}} = ٢$ (حل خطأ)

* $(-٣٢)^{\frac{٢}{١٠}} = \left(\sqrt[١٠]{-٣٢}\right)^{٢}$ = غير معرف فى ح (حل خطأ)

وذلك لأن الأس $\frac{٢}{١٠}$ ليس فى أبسط صورة ويجب اختصاره أولًا $\left[\frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}\right]$

$\therefore (-٣٢)^{\frac{٢}{١٠}} = (-٣٢)^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$ (الحل الصحيح)

مثال ١

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١) $\sqrt[٥]{أ^{٣}} \times \sqrt{أ^{٣}}$

٢) $\left(\sqrt[٥]{س}\right)^{٢} \times \sqrt{س^{٢}}$

٣) $\left(\sqrt[٣]{أ^{-٥}}\right)^{٢} \times \left(\sqrt[٤]{أ^{٣}}\right)^{٢}$

الحل

١) $\sqrt[٥]{أ^{٣}} \times \sqrt{أ^{٣}} = أ^{\frac{٣}{٥}} \times أ^{\frac{٣}{٢}} = أ^{\frac{٣}{٥} + \frac{٣}{٢}} = أ^{\frac{٢١}{١٠}} = أ^{٢} \times أ^{\frac{١}{١٠}} = أ^{٢} \sqrt[١٠]{أ}$



$$(\sqrt[5]{س})^{2} \times \sqrt[3]{س^{2}} = س^{\frac{2}{5}} \times س^{\frac{2}{3}} = س^{\frac{2}{5}+\frac{2}{3}} = س^{\frac{16}{15}} = س \times س^{\frac{1}{15}} = س\sqrt[15]{س}$$

$$(\sqrt[3]{أ^{-5}})^{2} \times (\sqrt[4]{أ^{3}})^{3} = (أ^{-\frac{5}{3}})^{2} \times (أ^{\frac{3}{4}})^{3} = أ^{-\frac{10}{3}} \times أ^{\frac{9}{4}} = أ^{-\frac{13}{12}} = \frac{1}{أ^{\frac{13}{12}}} = \frac{1}{|أ| \times أ^{\frac{1}{12}}} = \frac{1}{|أ|\sqrt[12]{أ}}$$

مثال ٢

ضع فى أبسط صورة : $\dfrac{\sqrt[4]{8} \times \sqrt[8]{0{,}001} \times 125}{\sqrt[4]{(15)^{3}} \times \sqrt[8]{4^{5}} \times (36)^{-\frac{3}{8}}}$

الحل

المقدار $= \dfrac{\sqrt[4]{2^{3}} \times \sqrt[8]{(10)^{-3}} \times 5^{3}}{\sqrt[4]{(15)^{3}} \times \sqrt[8]{4^{5}} \times (36)^{-\frac{3}{8}}} = \dfrac{2^{\frac{3}{4}} \times (10)^{-\frac{1}{4}} \times 5^{3}}{(15)^{\frac{3}{4}} \times 4^{\frac{5}{8}} \times (36)^{-\frac{3}{8}}}$

$= \dfrac{2^{\frac{3}{4}} \times (2 \times 5)^{-\frac{1}{4}} \times 5^{3}}{(3 \times 5)^{\frac{3}{4}} \times (2^{2})^{\frac{5}{8}} \times (2^{2} \times 3^{2})^{-\frac{3}{8}}} = \dfrac{2^{\frac{3}{4}} \times 2^{-\frac{1}{4}} \times 5^{-\frac{1}{4}} \times 5^{3}}{3^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{5}{4}} \times 2^{-\frac{3}{4}} \times 3^{-\frac{3}{4}}}$

$= 2^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}} \times 3^{-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}} \times 5^{-\frac{1}{4}+3-\frac{3}{4}} = 2^{0} \times 3^{0} \times 5^{2}$

$= 1 \times 1 \times 25 = 25$

مثال ٣

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

١ $3س^{5} = -96$

٢ $س^{6} = -64$

٣ $(س - 2)^{4} = 81$

٤ $س^{\frac{3}{4}} = 27$

٥ $\sqrt[5]{س^{2}} = 1$

٦ $\sqrt[4]{(3س + 2)^{3}} = 8$

٧ $س^{\frac{4}{3}} - 5 \times س^{\frac{2}{3}} + 4 = 0$

٨ $(س^{2} - 4س - 13)^{\frac{3}{5}} = 8$

الحل

لاحظ أن المطلوب إيجاد مجموعة الحل فى ح أى إيجاد الجذور الحقيقية فقط.

١ ∵ $3س^{5} = -96$ ∴ $س^{5} = -32$

∴ $س = \sqrt[5]{-32} = -2$ ∴ م.ح $= \{-2\}$

٢ $س^{6} = -64$ ∵ $-64 < 0$ ، ٦ عدد زوجى ∴ م.ح $= \varnothing$

٣ ∵ $(س - 2)^{4} = 81$ ∴ $س - 2 = \sqrt[4]{81} = 3$ أو $س - 2 = -\sqrt[4]{81} = -3$

∴ $س = 3 + 2 = 5$ أو $س = -3 + 2 = -1$ ∴ م.ح $= \{5 ، -1\}$

٤ ∵ $س^{\frac{3}{4}} = 27$ ∴ $س = 27^{\frac{4}{3}} = (3^{3})^{\frac{4}{3}} = 3^{4}$

∴ $س = 81$ ∴ م.ح $= \{81\}$



٥ ∵ $\sqrt[5]{س^{2}} = 1$ ∴ $س^{\frac{2}{5}} = 1$

∴ $س = \pm 1^{\frac{5}{2}}$ ∴ $س = \pm 1$ ∴ م.ح = $\{1 ، -1\}$

٦ ∵ $\sqrt[4]{(3س + 2)^{3}} = 8$ ∴ $(3س + 2)^{\frac{3}{4}} = 8$ ∴ $3س + 2 = 8^{\frac{4}{3}}$

∴ $3س + 2 = (2^{3})^{\frac{4}{3}}$ ∴ $3س + 2 = 16$

∴ $س = \frac{14}{3}$ ∴ م.ح = $\{\frac{14}{3}\}$

٧ ∵ $س^{\frac{4}{3}} - 5 \times س^{\frac{2}{3}} + 4 = 0$ ∴ $(س^{\frac{2}{3}} - 1)(س^{\frac{2}{3}} - 4) = 0$

∴ $س^{\frac{2}{3}} = 1$ ومنها $س = \pm 1^{\frac{3}{2}} = \pm 1$

أ، $س^{\frac{2}{3}} = 4$ ومنها $س = \pm 4^{\frac{3}{2}} = \pm (2^{2})^{\frac{3}{2}} = \pm 2^{3} = \pm 8$

∴ م.ح = $\{1 ، -1 ، 8 ، -8\}$

حل آخر : نفرض $س^{\frac{2}{3}} = ك$ ∴ $ك^{2} - 5ك + 4 = 0$

∴ $(ك - 4)(ك - 1) = 0$ ∴ $ك = 4$ ∴ $س^{\frac{2}{3}} = 4$

∴ $س = \pm\sqrt{4^{3}} = \pm 8$ أ، $ك = 1$ ∴ $س^{\frac{2}{3}} = 1$

∴ $س = \pm\sqrt{1^{3}} = \pm 1$ ∴ م.ح = $\{1 ، -1 ، 8 ، -8\}$

٨ $س^{2} - 4س - 13 = 8^{\frac{5}{3}} = 32$ ∴ $س^{2} - 4س - 45 = 0$

∴ $(س - 9)(س + 5) = 0$ ∴ $س = 9$ أ، $س = -5$

∴ م.ح = $\{9 ، -5\}$

المعادلة الأسية

هى معادلة تتضمن متغيرًا (مجهولاً) فى الأس مثل ($2^{س+1} = 8$)

قوانين المعادلة الأسية

لكل م ، ن $\in$ ص ، أ ، ب $\in$ ع − {−١ ، ٠ ، ١} نجد أن :

١ إذا كان : $أ^{ن} = 1$ فإن : ن = صفر

٢ إذا كان : $أ^{م} = أ^{ن}$ فإن : م = ن

٣ إذا كان : $أ^{ن} = ب^{ن}$

- وكان ن عددًا فرديًا فإن أ = ب
- وكان ن عددًا زوجيًا فإن أ = ± ب
- وكان أ ≠ ب فإن ن = صفر



مثال ٤

أوجد قيمة س التى تحقق كلاً من المعادلات الآتية :

[١] $٢^{س + ٥} = ٨$ [٢] $٣^{س^٢ - ٤} = ١$ [٣] $٤^{س + ٢} = س^{س + ٢}$

[٤] $٤^{س - ٣} = ٣^{٢س - ٦}$ [٥] $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{|س - ٥|} = \left(٣\frac{٣}{٨}\right)^{-٢}$

الحل

[١] ∵ $٢^{س + ٥} = ٨$ ∴ $٢^{س + ٥} = ٢^٣$

∴ س + ٥ = ٣ ∴ س = −٢

[٢] ∵ $٣^{س^٢ - ٤} = ١$ ∴ $س^٢ - ٤ = ٠$

∴ س = ± ٢

[٣] ∵ $٤^{س + ٢} = س^{س + ٢}$ ∴ إما س = ± ٤

أ، س + ٢ = ٠ ومنها س = −٢ ∴ س ∈ {−٢ ، ٤ ، −٤}

[٤] ∵ $٤^{س - ٣} = ٣^{٢س - ٦}$ ∴ $٤^{س - ٣} = ٣^{٢(س - ٣)}$

∴ $٤^{س - ٣} = ٩^{س - ٣}$ ∵ ٤ ≠ ٩ ∴ س − ٣ = ٠ ومنها س = ٣

[٥] ∵ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{|س - ٥|} = \left(\frac{٢٧}{٨}\right)^{-٢}$ ∴ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{|س - ٥|} = \left(\left(\frac{٣}{٢}\right)^٣\right)^{-٢}$

∴ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{|س - ٥|} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{-٦} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^٦$ ∴ |س − ٥| = ٦

∴ س − ٥ = ± ٦

∴ إما س − ٥ = ٦ أ، س − ٥ = −٦

ومنها س = ١١ | ومنها س = −١

مثال ٥

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

[١] $٢^س \times \sqrt[٣]{٤} = \left(\sqrt[٣]{١٦}\right)^{-١}$ [٢] $٤^{س^٢ - ١} = ٨^{-س}$ [٣] $\frac{٣^{٣س} + ٣^{٢س} + ٣^س}{٣^{٢س} + ٣^س + ١} = \frac{١}{٩}$

الحل

[١] ∵ $٢^س \times ٤^{\frac{١}{٣}} = (١٦)^{-\frac{١}{٣}}$ ∴ $٢^س \times (٢^٢)^{\frac{١}{٣}} = (٢^٤)^{-\frac{١}{٣}}$

∴ $٢^س \times ٢^{\frac{٢}{٣}} = ٢^{-\frac{٤}{٣}}$ ∴ $٢^{س + \frac{٢}{٣}} = ٢^{-\frac{٤}{٣}}$

∴ $س + \frac{٢}{٣} = -\frac{٤}{٣}$ ∴ س = −٢ ∴ مجموعة الحل = {−٢}



[٢] ∵ $٤^{س^٢-١} = ٨^{-س}$ ∴ $(٢^٢)^{س^٢-١} = (٢^٣)^{-س}$

∴ $٢^{٢س^٢-٢} = ٢^{-٣س}$ ∴ $٢س^٢ - ٢ = -٣س$

∴ $٢س^٢ + ٣س - ٢ = ٠$ ∴ $(٢س - ١)(س + ٢) = ٠$

∴ $٢س - ١ = ٠$ ومنها $٢س = ١$ ∴ $س = \frac{١}{٢}$

أو $س + ٢ = ٠$ ∴ $س = -٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٢} ، -٢\}$

[٣] ∵ $\frac{٣^{٢س} + ٣^{٢س} + ٣^{س}}{٣^{٢س} + ٣^{س} + ١} = \frac{١}{٩}$ ∴ $\frac{٣^{س}(٣^{٢س} + ٣^{س} + ١)}{٣^{٢س} + ٣^{س} + ١} = ٣^{-٢}$

∴ $٣^{س} = ٣^{-٢}$ ∴ $س = -٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{-٢\}$

مثال ⑥

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

[١] $٢^{س+١} + ٢^{س-١} = ٥$ [٢] $٥^{س} + \frac{١٢٥}{٥^{س}} = ٣٠$

الحل

[١] بأخذ $٢^{س-١}$ عامل مشترك ∴ $٢^{س-١}(٢^٢ + ١) = ٥$

∴ $٢^{س-١}(٤ + ١) = ٥$ ∴ $٢^{س-١} = ١$

∴ $س - ١ =$ صفر ∴ $س = ١$ ∴ مجموعة الحل = $\{١\}$

حل آخر : $٢^{س+١} + ٢^{س-١} = ٥$ ∴ $٢^{س} × ٢ + ٢^{س} × ٢^{-١} = ٥$

∴ $٢^{س}\left[٢ + \frac{١}{٢}\right] = ٥$ ∴ $٢^{س} × \frac{٥}{٢} = ٥$

∴ $٢^{س} = ٢$ ∴ $س = ١$ ∴ مجموعة الحل = $\{١\}$

[٢] بضرب الطرفين × $٥^{س}$ ∴ $٥^{٢س} + ١٢٥ = ٣٠ × ٥^{س}$

∴ $٥^{٢س} - ٣٠ × ٥^{س} + ١٢٥ = ٠$

وبالتحليل : ∴ $(٥^{س} - ٥)(٥^{س} - ٢٥) = ٠$

∴ إما $٥^{س} - ٥ =$ صفر أو $٥^{س} - ٢٥ = ٠$

∴ $٥^{س} = ٥$ | ∴ $٥^{س} = ٥^٢$

∴ $س = ١$ | ∴ $س = ٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{١ ، ٢\}$

حل آخر :

بوضع $٥^{س} = ص$ ∴ $ص + \frac{١٢٥}{ص} = ٣٠$ وبضرب الطرفين فى ص

∴ $ص^٢ - ٣٠ص + ١٢٥ = ٠$ ∴ $(ص - ٥)(ص - ٢٥) = ٠$

∴ $ص = ٥$ أو $ص = ٢٥$ ∴ $٥^{س} = ٥$ ∴ $س = ١$

أو $٥^{س} = ٥^٢$ ∴ $س = ٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{١ ، ٢\}$





تمارين 7 على الأسس الكسرية والمعادلات الأسية



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $أ^{م} \times أ^{م} =$ ....

(أ) $أ^{م^{٢}}$ (ب) $أ^{٢م}$ (جـ) $٢ أ^{م}$ (د) $م أ^{٢}$

② $\sqrt[٥]{أ^{٣}} \times \sqrt{أ^{٣}} =$ ....

(أ) $\sqrt[٧]{أ^{٣}}$ (ب) $\sqrt[٧]{أ^{٦}}$ (جـ) $\sqrt[٥]{أ^{١٤}}$ (د) $أ^{٢} \sqrt[١٠]{أ}$

③ إذا كان : $٢^{س+١} = ٨$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

④ $٣^{س+٥} = \frac{١}{٢٧}$ فإن : س = ...

(أ) −٣ (ب) ٨ (جـ) −٨ (د) ٣

⑤ إذا كان : $٥^{س-١} = ٤^{س-١}$ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) −١ (د) صفر

⑥ مجموعة حل المعادلة : $٥^{س^{٢}-٤} = ٧^{س^{٢}-٤}$ هي ....

(أ) {٢} (ب) {−٢} (جـ) {٢ ، −٢} (د) {صفر}

⑦ إذا كانت : $٧^{س+١} = ٣^{٢س+٢}$ فإن : $٥^{س+١} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٥

⑧ إذا كان : $\left(\frac{١}{٢}\right)^{أ^{٢}-أ-٢} = ١$ حيث أ > صفر فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) ٣

⑨ مجموعة حل المعادلة : $٧^{س^{٢}} = ٤٩^{س+٤}$ هو ....

(أ) {−٢} (ب) {−٢ ، ٤} (جـ) {−٢ ، ٣} (د) {٢ ، −٤}

⑩ إذا كان : $٣^{س} = ٢$ ، $٢^{ص} = ٩$ فإن : س ص = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) ١٨

⑪ إذا كان : $٥^{س} = ٢$ فإن : $٢٥^{س} =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ٦٢٥ (جـ) ٤ (د) ٢

⑫ إذا كان : $٢^{س} = ٥$ فإن : $٢^{س+٢} =$ ....

(أ) ١٥ (ب) ٤ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

⑬ إذا كان : $س^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$ فإن : س = ...

(أ) ٥١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢



(١٤) إذا كانت : $س^{\frac{2}{3}} = ٤$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ± ٤ (د) ± ٣٢

(١٥) إذا كان : ٤ $س^{٥}$ = ١٢٨ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ± ٢ (جـ) ٢ (د) −٢

(١٦) $(١٢٨)^{\frac{2}{7}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{1}{4}$ (د) ٤

(١٧) $\sqrt[4]{(١٦)^{-٣}}$ = ...

(أ) ٨ (ب) −٨ (جـ) $\frac{1}{8}$ (د) $-\frac{1}{8}$

(١٨) إذا كان : س ، ص ∈ ح فإن : $\sqrt{س^{٢} ص^{٦}}$ = ...

(أ) س $ص^{٣}$ (ب) |س $ص^{٣}$| (جـ) $\frac{1}{2}$ $س^{٢}$ $ص^{٦}$ (د) ± س $ص^{٣}$

(١٩) $\sqrt[4]{١٦ س^{٤} ص^{٨}}$ = ...

(أ) ٢ س $ص^{٢}$ (ب) ٢ |س| $ص^{٢}$ (جـ) ٢ س |ص|^{٢} (د) ٢ س |$ص^{٢}$|

(٢٠) إذا كان : $٢^{س - ١}$ = ٤٤ فإن : $٢^{س - ٢}$ = ...

(أ) ١٨ (ب) ٢٢ (جـ) ١٠ (د) ١٦

(٢١) إذا كان : $س^{\frac{5}{3}}$ = ٢ $ص^{\frac{4}{3}}$ = ٣٢ فإن : س + ص = ...

(أ) ١٦ (ب) صفر (جـ) ١٦ ، −١٦ (د) صفر ، ١٦

(٢٢) مجموعة حل المعادلة : $٣^{س + ١} + ٣^{س}$ = ١٢ في ح هي ....

(أ) {٠} (ب) {٣} (جـ) {١} (د) {١ ، ٠}

(٢٣) مجموعة حل المعادلة : $٣^{س} + ٣^{٢ - س}$ = ١٢ هي ....

(أ) {١ ، ٢} (ب) {٠ ، ٣} (جـ) {٣ ، ٤} (د) {−١ ، −٢}

(٢٤) مجموعة حل المعادلة : $\sqrt[3]{س^{٢}}$ − ٣ $\sqrt[3]{س}$ + ٢ = ٠ هي ....

(أ) {١ ، ٨} (ب) {٩ ، ٣} (جـ) {٨} (د) {١}

(٢٥) مجموعة حل المعادلة : $٩^{س}$ − ٣٠ × $٣^{س - ١}$ + ٩ = صفر هي ....

(أ) {٠ ، ١} (ب) {١ ، ٢} (جـ) {٠ ، ٢} (د) {٠ ، ٣}

(٢٦) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة $س^{ن}$ = أ حيث ن عدد فردي هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ن

(٢٧) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة : $س^{٦}$ = أ ، أ > ٠ هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٢٨) المعادلة : $س^{٢}$ = ٤ عدد جذورها يساوي ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤



(٢٩) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة : $س^٤ = -١٦$ هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٣٠) مجموعة الجذور الحقيقية للمعادلة : $(س - ٢)^٤ = ١٦$ هي ....

(أ) $\{٠\}$ (ب) $\{٤\}$ (جـ) $\{٨\}$ (د) $\{٠ ، ٤\}$

(٣١) مجموعة حل المعادلة : $(س - ٣)^{\frac{٥}{٣}} = ٣٢$ في ح هي ....

(أ) $\{٢\}$ (ب) $\{١١\}$ (جـ) $\{١١ ، -٥\}$ (د) $\{-١١ ، ١١\}$

(٣٢) إذا كانت : س ∈ ح* ، ن عدد صحيح زوجي فأي مما يأتي صحيح ؟

(أ) $س^ن > ٠$ (ب) $س^ن < ٠$ (جـ) $س^ن \leq ٠$ (د) $س^ن = ٠$

(٣٣) إذا كانت : $س \in ح^-$ ، ن عدد صحيح فردي فأي مما يأتي صحيح ؟

(أ) $س^ن > ٠$ (ب) $س^ن < ٠$ (جـ) $س^ن \geq ٠$ (د) $س^ن = ٠$

(٣٤) أي مما يأتي لا يساوي $(\sqrt[٥]{س^٤})$ ؟

(أ) $(\sqrt[٥]{س})^٤$ (ب) $\sqrt[٤]{س^٥}$ (جـ) $س^{\frac{٤}{٥}}$ (د) $(س^{\frac{١}{٥}})^٤$

(٣٥) إذا كانت : أ > ب > ٠ > حـ فإن : $\frac{\sqrt[٤]{ب^٤ حـ^٤} + \sqrt{(أ - حـ)^٢}}{\sqrt{أ^٢ ب^٢}} = ...$

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) $\frac{أ}{ب}$ (د) $\frac{-حـ}{٢}$

(٣٦) إذا كان : أ > ٠ > ب > حـ فأي من الأعداد الآتية لا ينتمي إلى ح ؟

(أ) $\sqrt[٣]{أ ب}$ (ب) $\sqrt[٤]{ب حـ}$ (جـ) $\sqrt[٥]{أ ب + حـ}$ (د) $\sqrt[٦]{أ حـ}$

(٣٧) إذا كان : $\sqrt{٢} \times \sqrt[٣]{٣} = \sqrt[٦]{س}$ فإن : س = ...

(أ) ٢٧ (ب) ٤٨ (جـ) ٧٢ (د) ١٠٨

(٣٨) $\sqrt{١٦٩ س^٢} = ...$

(أ) $٣^٤ س$ (ب) $٣^٨ س^٢$ (جـ) $٩^٤ س$ (د) $٩^٨ س^٢$

(٣٩) إذا كان : $٣^{س - ٢} = \sqrt[٤]{٢٧}$ فإن : س = ...

(أ) $\frac{١١}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ٦

(٤٠) إذا كان : $٣^{س + ٢} = ٦^{س - ١}$ فإن : $٢^س = ...$

(أ) ٥٤ (ب) ٢٧ (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) $\frac{١}{٣٦}$

(٤١) إذا كان : $٢^س = ٢٠$ ، ن > س > ن + ١ ، ن عدد صحيح فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٤٢) إذا كان : $٣^س > ٠$ فإن : ....

(أ) ٠ > س > ١ (ب) -١ > س > ٠

(جـ) س > -١ (د) لا توجد قيمة لـ س تحقق ذلك.





⁂ (٤٣) العدد $(٢^{٢٤} + ٢^{٢٣} + ٢^{٢٢})$ يقبل القسمة على ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(٤٤) إذا كان : $٣^{\text{أ}} = ٤^{\text{ب}}$ فإن : $٩^{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} + ١٦^{\frac{\text{ب}}{\text{أ}}} =$ ....

(أ) ٧ (ب) ١٢ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

(٤٥) إذا كان : $٢^{\text{أ}} = ٣$ ، $٣^{\text{ب}} = ٧$ ، $٧^{\text{ج}} = ١١$ فإن : $٢^{\text{أ}\text{ب}\text{ج}} =$ ....

(أ) ١١ (ب) ٢٧ (جـ) ٢١ (د) ٢٣١

(٤٦) إذا كان : $٢^{\text{س}} = \text{أ}$ ، $٣^{\text{س}} = \text{ب}$ ، $٥^{\text{س}} = \text{ج}$ فإن : $(٩٠)^{\text{س}} =$ ....

(أ) أ ب ج (ب) $\text{أ}^{٢}\text{ب}\text{ج}$ (جـ) $\text{أ}\text{ب}^{٢}\text{ج}$ (د) أ + ٢ ب + ج

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ اختصر لأبسط صورة :

(١) $\frac{(٢٧)^{-٣} \times (١٢)^{٢}}{١٦ \times (٨١)^{-٢}}$ « ٢٠ »

(٢) $\frac{٩^{٤\text{ن}+١} \times ٤^{٢-٢\text{ن}}}{٣^{٩\text{ن}+١} \times ٤٨^{١-\text{ن}}}$ « ١ »

(٣) $\frac{١٢٥ \times (١٥)^{\text{ن}-٣} \times (٢٥)^{\text{ن}+٢}}{(٧٥)^{\text{ن}} \times (٥)^{\text{ن}+٢}}$ « $\frac{١}{٢٧}$ »

(٤) $(١٨)^{\frac{١}{٢}} \times (١٢)^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{(٢٤)^{\frac{١}{٢}}}$ « ٣٦ »

٢ أثبت أن :

(١) $\frac{(٢٧)^{\text{ص}-\frac{١}{٣}} \times \sqrt[\text{ص}]{٧^{\text{ص}^{٢}+٢\text{ص}}}}{(٨١)^{\text{ص}-١} \times (٢١)^{٥-\text{ص}} \times (٤٩)^{\text{ص}-١}} = \frac{١}{٩}$

(٢) $\frac{(٣٤٣)^{٢\text{س}-\frac{١}{٣}} \times (٤)^{٣\text{س}+١}}{(١٩٦)^{٣\text{س}} \times ٤} = \frac{١}{٧}$

(٣) $\frac{١٢٥ \times \sqrt[٨]{٤^{٣}} \times ١٠^{-\frac{١}{٤}}}{٤^{\frac{٥}{٨}} \times \sqrt[٤]{٦^{-٣}} \times ١٥^{\frac{٣}{٤}}} = ٢٥$

(٤) $\frac{٣ \times ٢^{\text{س}+٢} + \sqrt{٤^{\text{س}+٢}}}{٢^{\text{س}+٣} - ٦ \times ٢^{\text{س}}} = ٨$

٣ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $\text{س}^{\frac{٧}{٢}} = ١٢٨$

(٢) $\text{س}^{-\frac{٥}{٢}} = \sqrt[٣]{٣٢}$

(٣) $\sqrt[٣]{(\text{س} - ١)^{٥}} = ٣٢$

(٤) $(٢\text{س} + ٣)^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$

(٥) $(\text{س} + ١)^{-\frac{٥}{٢}} = (٣٢)^{-\frac{١}{٢}}$

(٦) $(\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٩)^{\frac{٥}{٢}} = ٢٤٣$

(٧) $\left(\sqrt{\text{س}} + ٢\right)^{\frac{١}{٢}} = ٣$

(٨) $\text{س}^{\frac{٤}{٥}} - ٥\text{س}^{\frac{٢}{٥}} + ٤ = ٠$

(٩) $\text{س}^{\frac{٤}{٣}} - ١٠\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + ٩ = ٠$

(١٠) $\text{س} - ٣\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ٢ = ٠$

(١١) $\text{س} + ١٥ = ٨\sqrt{\text{س}}$

(١٢) $\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}} - \sqrt[٦]{\text{س}^{٥}} = ٦$

(١٣) $\sqrt[٥]{\text{س}^{٤}} - ٣\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}} = ٤$

(١٤) $\sqrt[٥]{\text{س}} - ٣ = -\frac{٢}{\sqrt[٥]{\text{س}}}$



٤ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $5^{2س-1} = \frac{1}{125}$ «{-١}»

② $5^{س+2} = س^{س+2}$ «{-٢ ، ٥}»

③ $2^{س^2-9} = 1$ «{٣ ، -٣}»

④ 📖 $(3\sqrt{3})^{|س-1|} = 27$ «{٣ ، -١}»

⑤ $3^{|2س-4|} = 9^{2س-2}$ «{$\frac{4}{3}$}»

⑥ $(\frac{3}{5})^{2س-1} = \frac{27}{125}$ «{٢}»

⑦ $5^{س-1} \times 7^{1-س} = \frac{25}{49}$ «{٣}»

⑧ $\frac{9^{س+1} \times 4^{س-1}}{36^{س}} = (\frac{3}{2})^{س}$ «{١}»

⑨ $\frac{12^{2س-2} \times 9^{س+1}}{18^{2س} \times 4^{2س-2}} = 9$ «{٢}»

⑩ $\frac{1}{27}(\sqrt{3})^{س+2} = 1$ «{٤}»

⑪ $(\sqrt{3})^{س^2-5س} = 1$ «{٠ ، ٥}»

⑫ $5^{س^2-5س} = 0{,}0016$ «{١ ، ٤}»

⑬ $5^{س^2} = 25^{س+4}$ «{-٢ ، ٤}»

⑭ 📖 $3^{س^2-42} = (\frac{1}{3})^{س}$ «{٦ ، -٧}»

⑮ $(\sqrt{7})^{|س+2|} = 49$ «{٢ ، -٦}»

⑯ $3^{2س-2} \times 7^{6-4س} = 1$ «{$\frac{1}{2}$}»

⑰ $\sqrt{9^{س} - 2 \times 3^{س+1} + 9} = 24$ «{٣}»

---

٥ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $5^{س+1} + 5^{س-1} = 26$ «{١}»

② 📖 $3^{س+3} - 3^{س+2} = 162$ «{٢}»

③ 📖 $7^{2-س} + 7^{-س} = 50$ «{٠}»

④ 📖 $5^{2س} + 25 = 26 \times 5^{س}$ «{٠ ، ٢}»

⑤ 📖 $2^{س} + 2^{5-س} = 12$ «{٢ ، ٣}»

⑥ 📖 $(\frac{1}{2})^{س+1} + (\frac{1}{2})^{س+3} + (\frac{1}{2})^{س+5} = 84$ «{-٧}»

⑦ $2^{2س+1} - 33 \times 2^{س} + 16 = 0$ «{-١ ، ٤}»

⑧ $5^{2س-2} - 6 \times 5^{س-1} + 5 = 0$ «{١ ، ٢}»

⑨ $9^{س^2-1} - 36 \times 3^{س^2-2} + 3 = 0$ «{١ ، -١ ، $\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{2}$}»

⑩ $10^{س} - 5^{س-1} \times 2^{س-2} = 950$ «{٣}»

٦

① 📖 إذا كان : $س^{\frac{3}{2}} = 3 ص^{\frac{3}{2}} = 27$ فأوجد قيمة : س + ص «١٢٦ ، ١٨»

② إذا كان : $س^{\frac{4}{3}} = 9 ص^{-\frac{2}{3}} = 81$ فأوجد قيمة : | ٢ س ص | «٢٠»

---

٧ 📖 اكتشف الخطأ :

① $-9 = (-9) = (-9)^{\frac{2}{2}} = \sqrt{(-9)^2} = \sqrt{81} = 9$

② إذا كان : $س^4 = 81$ فإن : $س = \sqrt[4]{81}$ ∴ س = ٣

---

٨ أوجد فى ح × ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $4^{س+ص} = 128$ ، $5^{س-2ص-3} = 1$ «{($\frac{10}{3}$ ، $\frac{1}{6}$)}»

«{(١ ، ٢)}»
«{(١ ، ٢) ، (٢ ، ١)}»

② $٣^{س} × ٥^{ص} = ٧٥$ ، $٣^{ص} × ٥^{س} = ٤٥$

③ $٣^{س} × ٣^{ص} = ٢٧$ ، $٣^{س} + ٣^{ص} = ١٢$

٩ تفكير إبداعى : أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : «{٢- ، ١}»

$٩^{س+١} - ٣^{س+٢} - ٣^{س} + ٣ = ٠$

١٠ تفكير إبداعى : إذا كان : $س^{٢} = ص^{٢}$ وكان : $س^{ن+١} = ص^{ن-١}$ فما قيمة ن ؟ «-١»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : س < صفر فإن : $\sqrt{س^{٢}} - \sqrt[٣]{س^{٣}} - \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} + ١ = ...$

(أ) س (ب) -س (جـ) صفر (د) -١

② إذا كان : $أ = \sqrt[٤]{\frac{\sqrt[٤]{٢}}{\sqrt{٧}}}$ فأى الأعداد الآتية عدد نسبى ؟

(أ) $أ^{١٢}$ (ب) $أ^{١٦}$ (جـ) $أ^{١٨}$ (د) $أ^{٢٤}$

③ مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{٢}{٣}} = س^{\frac{٣}{٢}}$ فى ح هى ....

(أ) {١} (ب) {-١ ، ١} (جـ) {٠ ، ١} (د) {٠ ، ١ ، -١}

④ $\sqrt[٥]{\frac{٢}{٢٧}} = \frac{..............}{٣}$

(أ) $\sqrt[٥]{٢}$ (ب) $\sqrt[٥]{٤}$ (جـ) $\sqrt[٥]{١٨}$ (د) $٣\sqrt{٥}$

⑤ العلاقة : $\sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م}$ صحيحة لجميع قيم ....

(أ) أ ∈ ح
(ب) ن حيث ن عدد زوجى موجب.
(جـ) $\sqrt[ن]{أ}$ ∈ ح ، ن ∈ $ص^{+}$ - {١}
(د) لا شىء مما سبق.

⑥ المعادلة : $س^{\frac{٢}{٣}} = أ$ يكون لها حل فى ح إذا كان ....

(أ) أ ∈ ح (ب) أ ∈ $ح^{+}$ (جـ) أ ∈ $ح^{-}$ (د) أ ∈ $ح^{+}$ ∪ {٠}

⑦ $\sqrt[ن]{أ} × \sqrt[م]{أ} = ...$

(أ) $\sqrt[نم]{أ}$ (ب) $\sqrt[ن+م]{أ}$ (جـ) $\sqrt[\frac{١}{ن}+\frac{١}{م}]{أ}$ (د) $\sqrt[نم]{أ^{م+ن}}$

٢ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $٥^{س-١} × س^{٢-س} = ٥$ «{٥ ، ٢}»

② $(س - ٣)^{(س-٥)} = ١$ «{٥ ، ٤}»

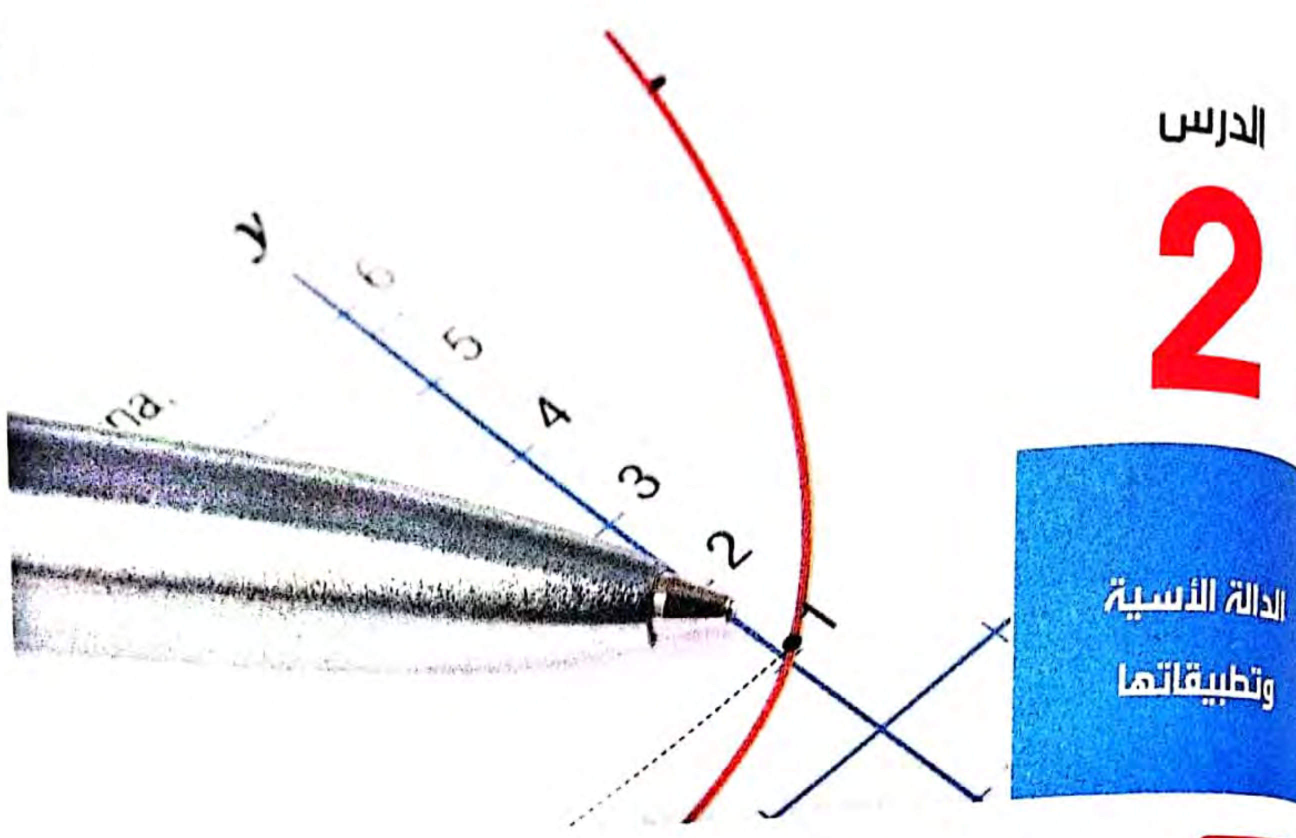
③ $(س - ٣)^{(س-٦)} = ١$ «{٦ ، ٤ ، ٢}»



الدرس

2

الدالة الأسية وتطبيقاتها



تعريف

إذا كان : $أ \in ح^+ - \{1\}$

فإن الدالة د : ح ⟵ $ح^+$ حيث د (س) = $أ^س$ تسمى دالة أسية أساسها أ

فمثلًا :

- د : د (س) = $3^س$ دالة أسية أساسها ٣ وأسها س
- د : د (س) = $\left(\frac{1}{2}\right)^{س+1}$ دالة أسية أساسها $\frac{1}{2}$ وأسها (س + ١)

ملاحظة

لاحظ الفرق بين الدالة الجبرية والدالة الأسية :

- فى الدالة الجبرية يكون المتغير المستقل س موجود كأساس فى قاعدة الدالة أما الأس فهو عدد حقيقى.

مثل : د : د (س) = $س^2 - 3س + 1$ أو د : د (س) = $(س - 3)^3$ أو ...

- فى الدالة الأسية يكون المتغير المستقل س موجود كأس فى قاعدة الدالة أما الأساس فهو عدد حقيقى موجب لا يساوى الواحد.

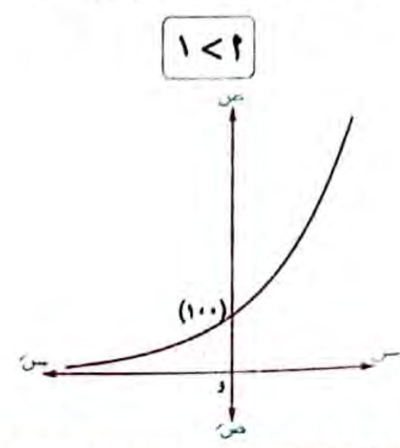
فمثلًا : د : د (س) = $3^س$ أو د : د (س) = $3^{س-1} + 2$ دوال أسية

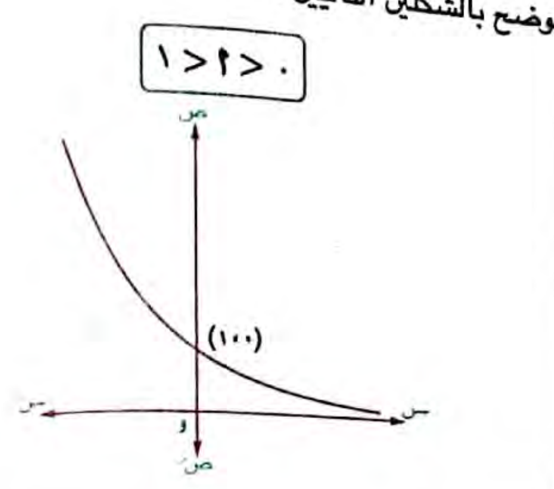
أما د : د (س) = $(-3)^س$ أو د : د (س) = $(1)^س$ ليست دوال أسية



التمثيل البيانى للدالة الأسية

الشكل العام لمنحنى الدالة د : د (س) = $أ^{س}$ كما هو موضح بالشكلين التاليين :





بعض خواص الدالة الأسية د : د (س) = $أ^{س}$

- مجالها ح
- مداها $ح^{+}$ ويقع منحناها بأكمله فوق محور السينات.
- الدالة تزايدية على مجالها ح إذا كان أ > ١ وتسمى دالة نمو أسى معامله أ ومنحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما قلت قيمة س
- الدالة تناقصية على مجالها ح إذا كان ٠ < أ < ١ وتسمى دالة تضاؤل أسى معامله أ ومنحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما زادت قيمة س
- منحنى الدالة الأسية يمر بالنقطة (٠ ، ١)
- د : د (س) = $أ^{س}$ هى دالة أحادية
- إذا كانت : د (س) = $أ^{س}$ فإن : د (−س) = $أ^{-س}$ = $\left(\frac{1}{أ}\right)^{س}$

ويكون المنحنى ص = $\left(\frac{1}{أ}\right)^{س}$ صورة المنحنى ص = $أ^{س}$ بالانعكاس فى محور الصادات

- $أ^{س}$ ⟵ ∞ عندما س ⟵ ∞ حيث أ > ١ ، $أ^{س}$ ⟵ ٠ عندما س ⟵ ∞ حيث ٠ < أ < ١

ص = $أ^{-س}$ ، ص = $أ^{س}$ ، (٠، ١)

مثال ①

ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ $ح^{+}$ ، د (س) = $٢^{س}$ متخذًا س ∈ [−٣ ، ٤]

ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل من :

[١] د (١،٥) ، د $\left(-\frac{1}{2}\right)$

[٢] قيمة س عندما د (س) = ١٠ .

الحـــل

نكون الجدول الآتى :

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
ص = $٢^{س}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤	٨	١٦



الحل

1 إيجاد قيمة د (١,٥) :

عند س = ١,٥ نرسم مستقيمًا يوازى محور الصادات ليقابل المنحنى فى نقطة ثم نقرأ قيمة ص المناظرة على محور الصادات فنجدها ٢,٨ تقريبًا.

∴ د (١,٥) ≃ ٢,٨

وبالمثل د $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ≃ ٠,٧

منحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما قلت قيمة س

لاحظ أن

د (س) = ٢^س دالة نمو أسى حيث أ > ١

2 إيجاد قيمة س عندما د (س) = ١٠ أى عندما ٢^س = ١٠

∴ عند ص = ١٠ نرسم مستقيمًا يوازى محور السينات يقابل المنحنى فى نقطة ثم نقرأ قيمة س المناظرة على محور السينات فنجدها ٣,٣ تقريبًا.

∴ عندما ٢^س = ١٠ تكون س ≃ ٣,٣

مثال 2

ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ ح⁺ ، د (س) = $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$ متخذًا س ∈ [-٤ ، ٣]

ومن الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل مما يأتى :

1 د (-٢,٥) 2 $\sqrt[4]{2}$ 3 س عندما $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$ = ٧

الحل

نكون الجدول الآتى :

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص = $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$	١٦	٨	٤	٢	١	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

• ومن الرسم نجد أن :

منحنى الدالة يقترب من محور السينات كلما زادت قيمة س

1 د (-٢,٥) ≃ ٥,٧

2 ∵ $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} = (2^{-1})^{-\frac{1}{4}}$

= $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}$ = د $\left(-\frac{1}{4}\right)$

∴ د $\left(-\frac{1}{4}\right)$ ≃ ١,٢

3 عندما $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$ = ٧

∴ س ≃ -٢,٨

لاحظ أن

د (س) = $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$ دالة تضاؤل أسى حيث ٠ < أ < ١

لاحظ أنه : فى مثال ١ ، مثال ٢ :

منحنى د : د (س) = ٢^س هو صورة منحنى الدالة د : د (س) = $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$ بالانعكاس فى محور الصادات.



بعض التحويلات الهندسية للدالة د : د (س) = أ^س

١ الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة الأسية :

إذا كانت : د (س) = أ^س فإن المنحنى : ص = د (س) + حـ أى : ص = أ^س + حـ

يمثله بيانيًا المنحنى : ص = أ^س بإزاحة رأسية مقدارها |حـ|

- فى اتجاه و ص إذا كان حـ > ٠ (إزاحة لأعلى)
- فى اتجاه و ص َ إذا كان حـ < ٠ (إزاحة لأسفل)

٢ الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة الأسية :

إذا كانت : د (س) = أ^س فإن المنحنى : ص = د (س + ب)

أى : ص = أ^(س+ب) يمثله بيانيًا المنحنى : ص = أ^س بإزاحة أفقية مقدارها |ب|

- فى اتجاه و س إذا كان ب < ٠ • فى اتجاه و س َ إذا كان ب > ٠

٣ انعكاس منحنى الدالة الأسية فى محور السينات :

إذا كانت : د (س) = أ^س فإن : منحنى الدالة ص = − د (س)

أى : ص = − أ^س هو صورة المنحنى : ص = أ^س بالانعكاس فِى محور السينات.

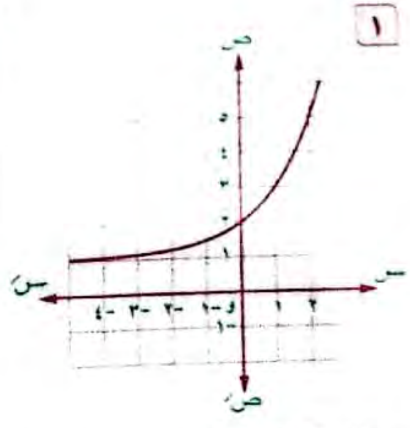
مثال ٣

مثل الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ثم أوجد المجال والمدى لكل منهم وبين أيًا منهم تزايدية وأيًا منهم تناقصية :

١ ص = ٢^س + ١ ٢ ص = ٣^س − ١ ٣ ص = − $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$

الحل

١

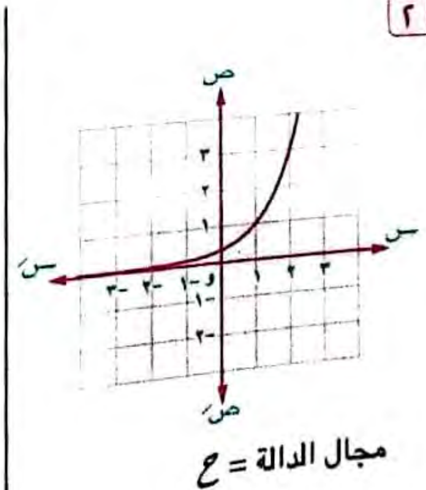


مجال الدالة = ح

، مدى الدالة =]١ ، ∞[

، الدالة تزايدية على مجالها

٢

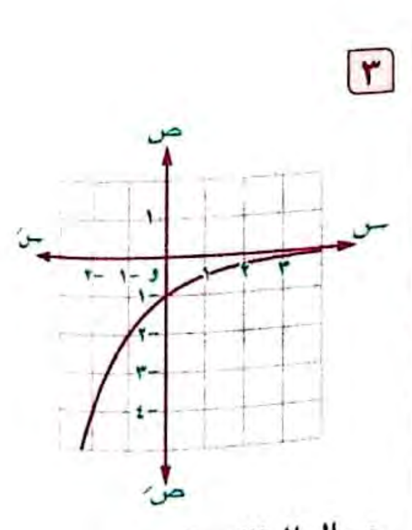


مجال الدالة = ح

، مدى الدالة =]−١ ، ∞[

، الدالة تزايدية على مجالها

٣



مجال الدالة = ح

، مدى الدالة =]− ∞ ، ٠[

، الدالة تزايدية على مجالها.

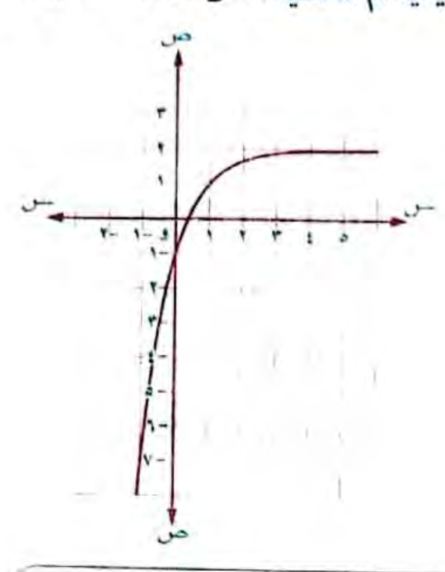




مثال ٤

مثل الدالة المعرفة بالقاعدة الآتية ثم أوجد المجال والمدى وبين هل الدالة تزايدية أم تناقصية : ص = −٣^(١ − س) + ٢

الحل



∴ ص = −٣^(١ − س) + ٢ = −٣^(−(س − ١)) + ٢

$= -\left(\frac{1}{3}\right)^{س - 1} + 2$

، المنحنى ص = $-\left(\frac{1}{3}\right)^{س - 1} + 2$

هو نفس المنحنى ص = $\left(\frac{1}{3}\right)^{س}$

بانعكاس فى محور السينات ثم إزاحة أفقية

وحدة واحدة فى اتجاه و س⟵

ثم إزاحة رأسية وحدتين فى اتجاه و ص⟵

المجال = ح

، المدى =]−∞ ، ٢[

، الدالة تزايدية على مجالها.

لاحظ أنه

يجب ترتيب إجراء التحويلات على المنحنى ص = $\left(\frac{1}{3}\right)^{س}$

للحصول على المنحنى ص = $-\left(\frac{1}{3}\right)^{س - 1} + 2$ كما يلى :

انعكاس فى محور السينات – إزاحة أفقية – إزاحة رأسية.

فإذا عكس الترتيب فإننا نحصل على منحنى آخر غير المنحنى المطلوب.

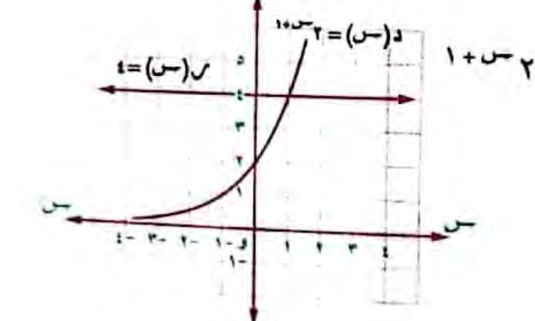
حل المعادلات الأسية بيانيًا

يعتمد الحل البيانى للمعادلات الأسية على فرض الطرف الأيمن للمعادلة على أنه دالة أسية د وفرض الطرف الأيسر للمعادلة على أنه أى دالة أخرى ر وبرسم الدالتين د ، ر فى شكل واحد وإيجاد الإحداثى السينى لنقطة (نقط) التقاطع نحصل على مجموعة الحل.

مثال ٥

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة : ٢^(س + ١) = ٤

الحل



نفرض أن الطرف الأيمن للمعادلة هو قاعدة الدالة د : د (س) = ٢^(س + ١)

والطرف الأيسر هو قاعدة الدالة ر : ر (س) = ٤

وبرسم الشكل البيانى للدالتين فى شكل واحد ومن الرسم :

∴ نقطة التقاطع هى (١ ، ٤) ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {١}

مثال ٦

أوجد بيانيًا فى ع مجموعة حل المعادلة : ٣^{س} = ٢ س + ١

الحـــل

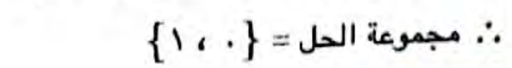
نفرض أن الطرف الأيمن للمعادلة هو قاعدة الدالة

د : د (س) = ٣^{س} والطرف الأيسر هو قاعدة الدالة

ر : ر (س) = ٢ س + ١

وبرسم الشكل البيانى للدالتين فى شكل واحد

ومن الرسم : الإحداثيان السينيان لنقطتى التقاطع هما ٠ ، ١



∴ مجموعة الحل = {٠ ، ١}

مثال ٧

إذا كانت د : ع ⟵ ع$^{+}$ ، د (س) = ٣^{س} فاثبت أن : $\frac{د (س + ٥) + د (س + ٣)}{د (س + ٣) + د (س + ١)}$ = د (٢)

الحـــل

∵ الطرف الأيمن = $\frac{٣^{س + ٥} + ٣^{س + ٣}}{٣^{س + ٣} + ٣^{س + ١}}$ = $\frac{٣^{س + ٣} (٣^{٢} + ١)}{٣^{س + ١} (٣^{٢} + ١)}$ = $\frac{٣^{س + ٣}}{٣^{س + ١}}$ = ٣^{٢}

، الطرف الأيسر = د (٢) = ٣^{٢} ∴ الطرفان متساويان.

حل آخر : الطرف الأيمن = $\frac{٣^{س + ٥} + ٣^{س + ٣}}{٣^{س + ٣} + ٣^{س + ١}}$ = $\frac{٣^{س} (٣^{٥} + ٣^{٣})}{٣^{س} (٣^{٣} + ٣)}$ = ٩ = ٣^{٢} = د (٢)

مثال ٨

إذا كانت د (س) = ٥^{س} أوجد قيمة س إذا كان : د (٢ س − ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{٢٦}{٢٥}$

الحـــل

∵ د (٢ س − ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{٢٦}{٢٥}$

∴ ٥$^{٢ س - ١}$ + ٥$^{٢ س + ١}$ = $\frac{٢٦}{٢٥}$ ∴ ٥$^{٢ س - ١}$ (١ + ٥^{٢}) = $\frac{٢٦}{٢٥}$

∴ ٥$^{٢ س - ١}$ × ٢٦ = $\frac{٢٦}{٢٥}$ ∴ ٥$^{٢ س - ١}$ = $\frac{١}{٢٥}$

∴ ٥$^{٢ س - ١}$ = ٥$^{-٢}$ ∴ ٢ س − ١ = −٢

∴ س = −$\frac{١}{٢}$

حل آخر : ∵ د (٢ س − ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{٢٦}{٢٥}$

∴ ٥$^{٢ س - ١}$ + ٥$^{٢ س + ١}$ = $\frac{٢٦}{٢٥}$ ∴ ٥$^{٢ س}$ (٥$^{-١}$ + ٥) = $\frac{٢٦}{٢٥}$

∴ ٥$^{٢ س}$ = ٥$^{-١}$ ∴ ٢ س = −١

∴ س = −$\frac{١}{٢}$



تطبيقات حياتية على النمو والتضاؤل الأسى

١ النمو الأسى

• الدالة د : د $(ن) = أ (١ + ر)^{ن}$ تستخدم لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية حيث أ القيمة الابتدائية ، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة ، ن الفترة الزمنية.

• ويمكن استنتاج هذه الدالة عند دراسة ظاهرة تزايد السكان على سبيل المثال : فإذا كان عدد سكان إحدى المدن فى أحد الأعوام أ وكان هذا العدد يتزايد سنويًا بنسبة مئوية ثابتة ر.

فإن عدد السكان بعد عام = أ + ر أ = أ (١ + ر)

، وبعد عامين = أ (١ + ر) + ر أ (١ + ر) = أ $(١ + ر)^{٢}$ وهكذا

فيكون عدد السكان بعد ن عام = أ $(١ + ر)^{ن}$

مثال ٩

اشترى وائل منزلًا بمبلغ ١٣٥٠٠٠٠ جنيه فإذا كان سعر المنزل يزداد بمعدل ٢,٥ ٪ كل سنة :

[١] اكتب دالة أسية تمثل سعر المنزل بعد ن سنة من شرائه.

[٢] قدِّر لأقرب جنيه سعر المنزل بعد مرور ٦ سنوات من شرائه.

الحل

أ = ١٣٥٠٠٠٠ ، $ر = \frac{٢,٥}{١٠٠} = ٠,٠٢٥$ ، ن = ٦

[١] دالة النمو الأسى د : د $(ن) = أ (١ + ر)^{ن}$ ∴ د $(ن) = ١٣٥٠٠٠٠ (١ + ٠,٠٢٥)^{ن}$

∴ د $(ن) = ١٣٥٠٠٠٠ (١,٠٢٥)^{ن}$

[٢] بالتعويض عن ن = ٦ ∴ د $(٦) = ١٣٥٠٠٠٠ (١,٠٢٥)^{٦} \approx ١٥٦٥٥٨٦$ جنيهًا

الربح المركب

* عند حساب الجملة (جـ) لمبلغ (أ) مستثمر فى أحد البنوك التى تعطى ربحًا سنويًا مركبًا (ر) كنسبة مئوية لعدد من السنوات (ن) بفترات تقسيم العائد السنوى إلى (س) فترة فإن جملة المبلغ تعطى بالعلاقة :

$$جـ = أ \left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$$



مثال ١٠

أودع رجل مبلغ ١٥٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ٧٪ أوجد جملة هذا المبلغ بعد مرور ١٠ سنوات فى كل من الحالات الآتية :

١ العائد سنوى. **٢** العائد ربع سنوى. **٣** العائد شهرى.

الحـل

$\because$ ح = أ $\left(1 + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$

١ $\because$ العائد سنوى أى أن عدد فترات التقسيم = ١ $\therefore$ س = ١

$\therefore$ ح = ١٥٠٠٠ $(1 + ٠,٠٧)^{١٠}$ ≈ ٢٩٥٠٧,٢٧ جنيه

٢ $\because$ العائد ربع سنوى أى أن عدد فترات التقسيم = ٤ $\therefore$ س = ٤

$\therefore$ ح = ١٥٠٠٠ $\left(1 + \frac{٠,٠٧}{٤}\right)^{١٠ \times ٤}$ ≈ ٣٠٠٢٣,٩٦ جنيه

٣ $\because$ العائد شهرى أى أن عدد فترات التقسيم = ١٢ $\therefore$ س = ١٢

$\therefore$ ح = ١٥٠٠٠ $\left(1 + \frac{٠,٠٧}{١٢}\right)^{١٠ \times ١٢}$ ≈ ٣٠١٤٤,٩٢ جنيه

٢ التضاؤل الأسى

الدالة د : د (ن) = أ (١ − ر)^{ن} تستخدم لتمثيل التضاؤل الأسى حيث أ القيمة الابتدائية ، ر النسبة المئوية للتضاؤل فى الفترة الزمنية الواحدة ، ن الفترة الزمنية.

مثال ١١

يتناقص عدد المرضى بفيروس الالتهاب الكبدى الوبائى ح بمعدل ١٥٪ سنويًا نتيجة اكتشاف علاج له فإذا كان عدد المرضى فى إحدى الدول ٨٠٠٠٠٠٠ مريض فاكتب دالة أسية تمثل عدد المرضى بعد ن سنة من اكتشاف العلاج ثم قدر عدد المرضى بعد ٨ سنوات.

الحـل

أ = ٨٠٠٠٠٠٠ ، ر = ٠,١٥ ، ن = ٨

الدالة الأسية د : د (ن) = ٨٠٠٠٠٠٠ (١ − ٠,١٥)^{ن} = ٨٠٠٠٠٠٠ (٠,٨٥)^{ن}

وعند ن = ٨ فإن عدد المرضى = ٨٠٠٠٠٠٠ (٠,٨٥)^{٨} ≈ ٢١٧٩٩٢٤ مريضًا





تمارين 8 على الدالة الأسية وتطبيقاتها




من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د : د (س) = $أ^{س}$ دالة أسية فإن : أ ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح^{+}$ (جـ) $ح^{-}$ (د) $ح^{+} - \{1\}$

② إذا كان : د (س) = $3^{س+2}$ فإن : د (−٢) = ...

(أ) ٣ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ١

③ إذا كان : د (س) = $4^{س-1}$ فإن : د (س + ١) = ...

(أ) $4^{س}$ (ب) $4^{س+1}$ (جـ) $4^{س+2}$ (د) $2^{س}$

④ إذا كانت : د (س) = $2^{س}$ فإن : د (−س) = ...

(أ) $-2^{س}$ (ب) $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$ (جـ) $2^{س+1}$ (د) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-س}$

⑤ إذا كانت : د (س) = $(5)^{-س}$ فإن : $\frac{د(س - 1)}{د(س + 1)}$ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{1}{5}$ (جـ) ٢٥ (د) $\frac{1}{25}$

⑥ إذا كانت : د (س − ١) = $2^{س+1}$ فإن : د (س) = ...

(أ) $2^{س}$ (ب) $2^{س-1}$ (جـ) $2^{س+2}$ (د) $2^{س-2}$

⑦ إذا كانت : د (س) = $أ^{س}$ فإن : د (س + ١) × د (س − ١) = د (..............)

(أ) ٢ س + ١ (ب) $أ^{2س}$ (جـ) ٢ س (د) ٢

⑧ إذا كان : د (س + ١) = $2^{س}$ وكان : د (أ) = ٨ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٥

⑨ إذا كانت : د (س) = $3^{س-2}$ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س − ١) = ٨١ هي ....

(أ) {٧} (ب) {٥} (جـ) {٤} (د) {٣}

⑩ إذا كان د (س) = $2^{س}$ فإن مجموعة حل المعادلة : د (٢ س) − د (س + ١) = صفر هي ....

(أ) {٠} (ب) {٠ ، ١} (جـ) {١} (د) {−١}



(١١) إذا كانت : د (س) = ٣^س فإن قيمة س التى تحقق المعادلة : د (س + ١) − د (س − ١) = ٢٤ هى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) صفر

(١٢) إذا كانت : د (س) = ٣^س فإن قيمة س التى تحقق العلاقة :

د (٢ س) − ٢٤ د (س − ١) − د (٢) = ٠ هى ....

(أ) ٢ ، $\frac{١}{٣}$ (ب) ٢ ، صفر (جـ) ٢ (د) ٢ ، −١

(١٣) تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

(١٤) تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تناقصية إذا كانت ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ < ٠ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) −١ < أ < ٠

(١٥) مدى الدالة د : د (س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ هو ....

(أ)]−∞ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠] (جـ)]٠ ، ∞[(د)]١ ، ∞[

(١٦) إذا كانت د (س) = ٢^−س فإن : د (س) تكون تناقصية عند س ∈ ....

(أ) ح (ب) ح^+ (جـ) ح^− (د) ∅

(١٧) أى من الدوال الآتية تكون متزايدة على مجالها ؟

(أ) د (س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ (ب) د (س) = ٣^−س

(جـ) د (س) = $(\frac{٢}{٣})^{س}$ (د) د (س) = ٥^س

(١٨) إذا كان : ىر(س) = $(\frac{-١}{٢})^{س+١}$ فأنها تعبر عن ....

(أ) دالة أسية أساسها $(\frac{-١}{٢})$ (ب) دالة أسية أسها (س + ١)

(جـ) ليست دالة أسية لأن الأساس < ٠ (د) (أ) ، (ب) معًا.

(١٩) إذا كانت د (س) = ٢^(س+١) وكانت النقطة (أ ، $\frac{١}{٢}$) ∈ بيان د فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) −٢

(٢٠) إذا كانت : $ص_١$ = ٢^س ، $ص_٢$ = ٣^س ، $ص_٣$ = ٤^س حيث س < ٠ .

فإن : ....

(أ) $ص_١$ > $ص_٢$ > $ص_٣$ (ب) $ص_١$ > $ص_٣$ > $ص_٢$

(جـ) $ص_٣$ > $ص_٢$ > $ص_١$ (د) $ص_٣$ > $ص_١$ > $ص_٢$

(٢١) إذا كان : د (س) = أ^س فإن : ....

(أ) د (س + ص) = د (س) + د (ص)
(ب) د (س − ص) = د (س) − د (ص)
(جـ) د (س + ص) = د (س) . د (ص)
(د) د (س ص) = د (س) . د (ص)

(٢٢) إذا تحرك منحنى الدالة د : د (س) = ٢^س وحدة واحدة لليسار
فإن الدالة الجديدة هى ر : ر (س) = ...

(أ) ٢^(س+١)
(ب) ٢^(س) − ١
(جـ) −٢^س
(د) −٢^(١−س)

(٢٣) منحنى الدالة د : د (س) = ٣^س هو صورة منحنى الدالة ر : ر (س) = −٣^س بالانعكاس فى ....

(أ) ص = ٠
(ب) س = ٠
(جـ) ص = س
(د) ص = − س

(٢٤) معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين د ، ر حيث د (س) = ٣^س ، ر (س) = $\left(\frac{1}{3}\right)$^س هى ....

(أ) ص = ٠
(ب) س = ٠
(جـ) ص = س
(د) ص = − س

(٢٥) منحنى الدالة د : د (س) = ٥^س يقطع محور الصادات فى النقطة ....

(أ) (١ ، ٠)
(ب) (٠ ، ١)
(جـ) (٥ ، ١)
(د) (١ ، ٥)

(٢٦) منحنى الدالة د : د (س) = ٢^(س+٢) يقطع محور الصادات فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ١)
(ب) (٠ ، ٢)
(جـ) (٠ ، ٤)
(د) (٠ ، ٨)

(٢٧) المستقيم ص = ٩ يقطع منحنى الدالة د : د (س) = ٣^س فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ١)
(ب) (٢ ، ٠)
(جـ) (٢ ، ٩)
(د) (١ ، ٩)

(٢٨) إذا كانت النقطة (أ ، ب) حيث أ ≠ ٠ تقع على منحنى الدالة ص = ٢^س فأى من النقط الآتية تقع على منحنى الدالة ص = $\left(\frac{1}{2}\right)$^س ؟

(أ) (أ ، ب)
(ب) (−أ ، ب)
(جـ) (أ ، −ب)
(د) (أ ، $\frac{1}{2}$ ب)

(٢٩) إذا كانت النقطة (أ ، ب) تقع على منحنى الدالة : ص = ٢^س فأى النقط الآتية تقع على منحنى الدالة ص = ٢^(س+٣) ؟

(أ) (أ ، ب)
(ب) (أ + ٣ ، ب)
(جـ) (أ ، ب + ٣)
(د) (أ ، ٨ ب)

(٣٠) الدالة الأسية د حيث د (س) = أ^س ، أ > ١ يقترب خطها البيانى من ....

(أ) محور السينات (الاتجاه الموجب)
(ب) محور السينات (الاتجاه السالب)
(جـ) محور الصادات (الاتجاه الموجب)
(د) محور الصادات (الاتجاه السالب)



(٣١) في الدالة الأسية د : د(س) = $أ^{س}$ ، أ > ١ تكون د(س) < ١ عندما س ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح^{+}$ (ج) $ح^{-}$ (د) ص

(٣٢) أى من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة نماء أسى ؟

(أ) د(س) = $٢^{-س}$ (ب) د(س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

(جـ) د(س) = $٣^{س}$ (د) د(س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

(٣٣) أى من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة تضاؤل أسى ؟

(أ) د(س) = $٢^{س}$ (ب) د(س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{-س}$

(جـ) د(س) = $٣^{س}$ (د) د(س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

(٣٤) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = $أ^{س}$

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٩

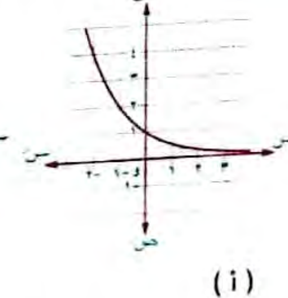
(٢،١٦)

(٣٥) في الدالة الأسية ر حيث ر(س) = $أ^{س}$ ، ٠ < أ < ١ تكون ٠ < $أ^{س}$ < ١

عندما س ∈ ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(جـ)]١ ، ∞[(د)]-∞ ، ١[

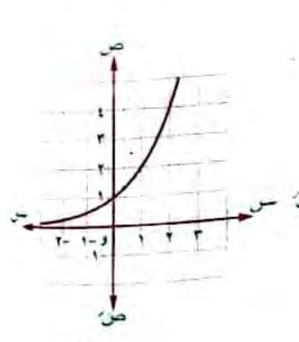
(٣٦) الدالة د حيث د(س) = $٢^{س}$ يمثلها الشكل البيانى ....



(أ)

(ب)

(جـ)

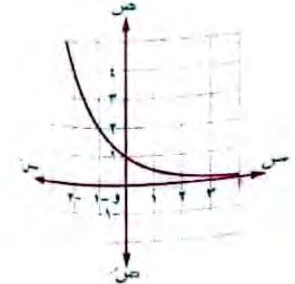


(د)

(٣٧) الشكل المقابل يمثل الدالة د حيث ....

(أ) د(س) = $٢^{س}$ + ١ (ب) د(س) = $٢^{-س}$

(جـ) د(س) = $٣^{س}$ (د) د(س) = $٢^{س}$






(٣٨) جملة مبلغ ٥٠٠٠ جنيه موضوع فى بنك يعطى فائدة مركبة سنوية قدرها ٥٪ لمدة ٧ سنوات ≃ .... جنيه.

(أ) ٦٧٥٠ (ب) ٧٠٣٥,٥ (جـ) ٥٣٥٠ (د) ٨٥٠٠

(٣٩) اشترى جلال سيارة بمبلغ ٢٠٠٠٠٠ جنيه فإذا كان سعر السيارة يتناقص بمعدل ٠.٤ ٪ كل سنة ، أى الدوال الآتية يعبر عن سعر السيارة بعد $ن$ سنة ؟

(أ) ص = ٢٠٠٠٠٠ × $(٠,٤)^{ن}$ (ب) ص = ٢٠٠٠٠٠ $(٠,٩٩٦)^{ن}$

(جـ) ص = ٢٠٠٠٠٠ × $(١,٤)^{ن}$ (د) ص = ٢٠٠٠٠٠ $(٠,٢)^{ن}$

ثانياً الأسئلة المقالية

(١) بين أيًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية دالة أسية ، ثم اكتب أسها وأساسها :

① د (س) = ٢ $س^{٢}$ ② د (س) = $\frac{٢}{٣}$ $(٥)^{س}$ ③ د (س) = $\frac{١}{س - ١}$

④ د (س) = ٣ $س^{٢}$ − ١ ⑤ د (س) = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س - ١}$ ⑥ د (س) = $(-٧)^{س}$

(٢) إذا كانت : د (س) = $٥^{س}$ فأوجد قيمة : $\frac{د (س + ٤) - د (س + ٣)}{د (س + ٥) - د (س + ٤)}$ «$\frac{١}{٥}$»

(٣) إذا كانت : د (س) = $٧^{س + ١}$
فأوجد قيمة س التى تحقق : د (٢ س − ١) + د (س − ٢) = ٥٠ «١»

(٤) إذا كانت : $د_{١}$ (س) = $٣^{س}$ ، $د_{٢}$ (س) = $٩^{س}$
فأوجد قيمة س التى تحقق : $د_{١}$ (٢ س − ١) + $د_{٢}$ (س + ١) = ٧٥٦ «٢»

(٥) إذا كانت د : ع ⟵ $ع^{+}$ حيث د (س) = $ص^{س}$ فأثبت أن : $\frac{د (س + ١) + د (س + ٢)}{د (س + ١) + د (س)}$ = ص

(٦) إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ فأثبت أن : $\frac{د (٢ س + ٢) + د (٢ س - ١)}{٥ د (٢ س) - ٧ د (٢ س - ١)} = \frac{٧}{٢}$

(٧) إذا كانت : د (س) = $٣^{٢ س - ١}$ فأثبت أن : $\frac{د (س + ١) \times د (س + ٢)}{د (س + ٣)}$ = د (س)

(٨) إذا كانت : د (س) = $٢^{س}$ فأثبت أن : $\frac{د (س + ١)}{د (س - ١)} + \frac{د (س - ١)}{د (س + ١)} = \frac{١٧}{٤}$

(٩) إذا كانت : د (س) = $٧^{س}$
أوجد قيمة س إذا كان : د (٢ س − ١) + د (٢ س + ١) = $\frac{٥٠}{٤٩}$ «$-\frac{١}{٢}$»



١٠ إذا كانت : د (س) = ٢^س ، $\frac{د (س + ١) - د (س)}{د (س) - د (س - ١)}$ = د (س - ٢) فأوجد قيمة : س «٣»

١١ إذا كانت : د (س) = ٣^-س فأوجد مجموعة حل المعادلة : $\frac{د (٢ س + ١)}{د (س - ١)}$ = ٧٢٩ «{-٨}»

١٢ إذا كانت : د (س) = ٣^س-١

فأوجد قيمة س التى تحقق : د (س + ٢) + د (٤ - س) = ٣٠ «٠ أ، ٢»

١٣ إذا كانت : د (س) = ٢^س

فأوجد مجموعة حل المعادلة : د (٢ س) - ٦ د (س) + د (٣) = ٠ «{١ ، ٢}»

١٤ إذا كانت : د (س) = ٣^س

أوجد مجموعة حل المعادلة : د (س) + د $\left(\frac{س}{٢}\right)$ = ١٢ «{٢}»

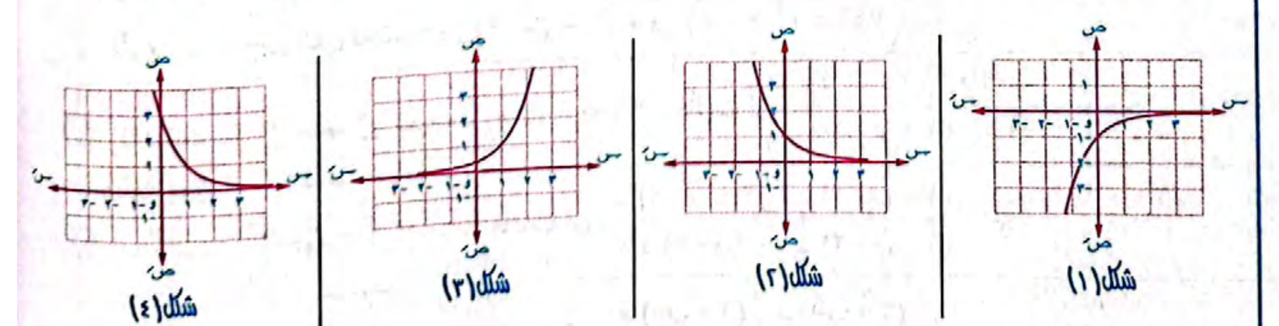
١٥ إذا كانت : د (س - ٢) = ٣^س

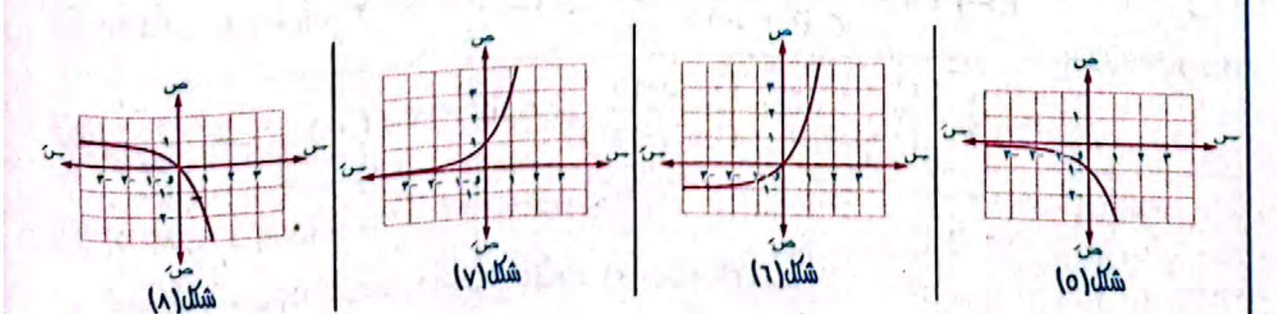
أوجد قيمة س التى تحقق أن : د (٣ س + ١) - د (٣ س - ١) = ٢٤ «صفر»

١٦ اختر الشكل البيانى المناسب لكل من قواعد الدوال الآتية :

① ص = ٣^س ② ص = ٣^-س ③ ص = -٣^س ④ ص = -٣^-س

⑤ ص = ٣^س - ١ ⑥ ص = ٣^س-١ ⑦ ص = ٣^١-س ⑧ ص = ١ - ٣^س







17 مثل الدالة د فى كل مما يأتى بيانيًا ، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها ، وبين أيًا منها تزايدية وأيًا منها تناقصية :

① د (س) = $٣^{س}$
② د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$
③ د (س) = $-٣ (٢)^{س}$
④ د (س) = $٢^{س+١} + ١$
⑤ د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س+٢} - ٢$
⑥ د (س) = $٢ \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س-١} + ١$
⑦ د (س) = $-\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢س} + \frac{٣}{٤}$

18 أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $٢^{س+٣} = ٤$
② $٢^{س} = ٨$
③ $٣^{س} = ٤ - س$
④ $٣^{س-٢} = ٣ - س$
⑤ $٢^{١-س} = س + ٥$
⑥ $٤^{س+١} = ٤ - س$
⑦ $٢^{س} = ٢س$
⑧ $٢^{س} = ٣^{س+١}$
⑨ $٢^{س+١} = ٣^{١-س}$

19 إذا كانت د : ح ⟵ $ح^{+}$ حيث د (س) = $٣^{س-١}$ ، فارسم منحنى الدالة لكل س ∈ [-٢ ، ٣]

ومن الرسم أوجد :

① د $\left(\frac{٣}{٢}\right)$
② قيمة س عندما $٣^{س-١} = ٧\frac{١}{٢}$

«١,٧ ، ٢,٨»

20 مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ١ - س^{٢} & \text{، عندما } س \le ٠ \\ \left(\frac{١}{٢}\right)^{س} & \text{، عندما } س > ٠ \end{cases}$

ومن الرسم استنتج مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها.

21 ارسم منحنى الدالة د : د (س) = $٢^{|س|}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

22 ارسم منحنى الدالة د : د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{|س|}$ ومن الرسم استنتج مدى الدالة واطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

23 إذا كانت : د (س) = $٥^{س}$ وكان د (١ + جاس) + د (-١ + جاس) = ٢٦

أوجد قيم س الحقيقية.

«س = $\frac{\pi}{٢} + ٢ ن \pi$ حيث ن ∈ ص»

24 تفكير إبداعى : إذا كانت د (س) = $٢^{س}$

فأثبت أن : المقدار $\frac{١}{د (س) + ١} + \frac{١}{د (-س) + ١}$ له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س



تطبيقات على النمو والتضاؤل الأسى

٢٥ الربط بالادخار : أودع زياد مبلغ ٨٠٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك بفائدة سنوية ١٠,٥ ٪ ، كم يصبح جملة رصيده بالجنيه بعد ١٠ سنوات ؟ «٢١٧١٢٦ جنيه»

٢٦ الربط بالسكان : إذا كان عدد سكان إحدى الدول فى نهاية عام ٢٠٠٠ هو ٤٣,٣ مليون نسمة وكان معدل الزيادة السكانية فى السنة يساوى ١,٥ ٪

(١) أوجد صيغة تمثل عدد سكان هذه الدولة بعد مرور $ن$ سنة من عام ٢٠٠٠

(٢) استخدم هذه الصيغة لإيجاد عدد السكان المتوقع لهذه الدولة عام ٢٠٢٠ «٥٨,٣ مليون نسمة»

٢٧ الربط بالرياضة : يتناقص عدد المشجعين لإحدى فرق كرة القدم بمعدل ٤٪ نتيجة خسارتها فى إحدى الدورات الرياضية، فإذا كان عدد المشجعين فى أول مباراة ٣٦٤٠٠ فاكتب دالة أسية تمثل عدد الحضور (ص) فى المباراة ($ن$) ، ثم قدر عدد المشجعين فى المباراة العاشرة. «٢٤٢٠٠ مشجع»

٢٨ الربط بالاستثمار : بلغ عدد الأبقار فى إحدى مزارع الماشية ٨٠ بقرة ، فإذا كان معدل التكاثر لهذه الأبقار يبلغ ١٨٪ سنويًا تقريبًا ، فأوجد عدد الأبقار فى المزرعة بعد ٤ سنوات. «١٥٥ بقرة»

٢٩ الربط بالسكان : بلغ تعداد سكان إحدى المحافظات فى جمهورية مصر العربية ٤,٦ مليون نسمة بمتوسط زيادة ٤٪ سنويًا.

(١) اكتب دالة أسية تمثل النمو المستقبلى بعد $ن$ سنة.

(٢) قدر عدد سكان هذه المحافظة بعد مرور ٥ سنوات من وقت التعداد. «٥,٦ مليون نسمة»

٣٠ الربط بالصناعة : يتناقص إنتاج منجم ذهب سنويًا بمقدار ٥٪ فإذا كان إنتاج المنجم فى السنة الأولى حوالى ٢٥٤ كجم قدر إنتاج المنجم فى السنة التاسعة. «١٦٠ كجم»

٣١ الربط بالأحياء : إذا كانت كمية البكتيريا الموجودة فى وقت ما ٢٠٠٠ بكتيريا وكانت البكتيريا تتزايد بمعدل ٧٪ فى الساعة. أوجد كمية البكتيريا الموجودة بعد مرور ١١ ساعة. «٤٢١٠ بكتيريا»

٣٢ أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة قدرها ٨٪ أوجد جملة المبلغ بعد مرور عشرة أعوام فى كل من الحالات الآتية :

(١) العائد سنوى. (٢) العائد ربع سنوى. (٣) العائد شهرى.

«١٠٧٩٤,٦٢ ، ١١٠٤٠,٢ ، ١١٠٩٨,٢ جنيه»





مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الدالة د : د (س) = (٢ أ)^س تكون متناقصة عندما أ ∋ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٢[(د)]٠ ، $\frac{١}{٢}$[

② إذا كانت الدالة د : د (س) = $\left(\frac{أ}{٣}\right)^{س}$ دالة أسية تزايدية فإن ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) أ > ٣ (د) أ < ٣

③ إذا كانت د : د (س) = (أ − ٢)^س دالة أسية فإن ....

(أ) أ ∋ ح^+ − {٢}

(ب) أ > ٢

(جـ) أ < ٢

(د) أ ∋]٢ ، ∞[− {٣}

④ أى المنحنيات الآتية يقطع محور السينات ؟

(أ) د (س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$ (ب) د (س) = ٢^س + ٣

(جـ) د (س) = ٣^س − ١ (د) د (س) = ٣^(س-١)

⑤ إذا قطع المستقيم ص = ٨ المنحنيين : ص = ٢^س ، ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ فى النقطتين أ ، ب على الترتيب

فإن : طول $\overline{أب}$ = ... وحدات طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

⑥ إذا انعكس منحنى الدالة د : د (س) = ٣^س حول محور الصادات ثم أُزيح ٥ وحدات لأعلى

فإن الدالة الجديدة هى ر : ر (س) = ...

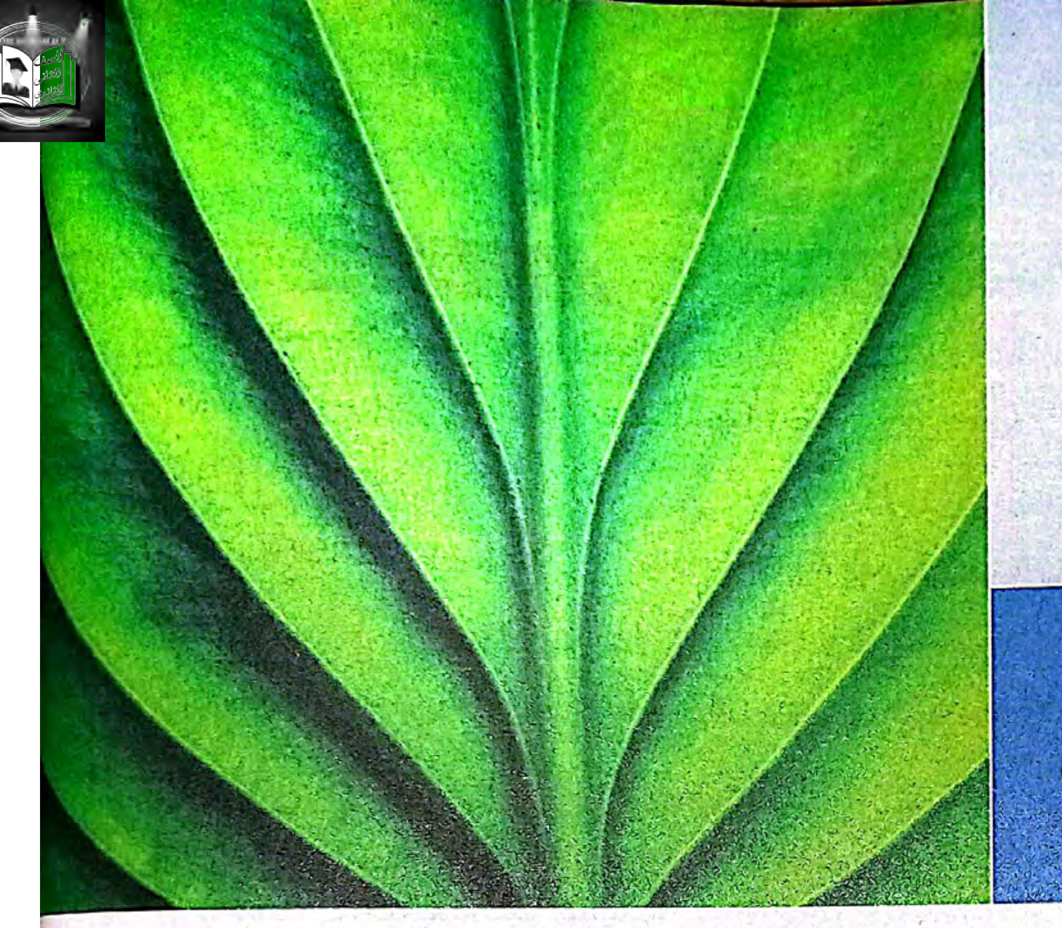
(أ) ٥ + ٣^(-س) (ب) −٣^س + ٥ (جـ) ٣^س − ٥ (د) ٣^(-س) − ٥

⑦ إذا كانت : د (س) = $\frac{٩^{س}}{٩^{س} + ٣}$ فإن : د (س) + د (١ − س) = ...

(أ) $\frac{٢}{٩^{س} + ٣}$ (ب) $\frac{٩^{س} + ٣}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ١

⑧ إذا كانت : د (س) = $\frac{٤^{س}}{٤^{س} + ٢}$ فإن : د $\left(\frac{١}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٢}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٣}{١١}\right)$ + ... + د $\left(\frac{١٠}{١١}\right)$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) $\frac{٦}{١١}$ (د) ١٠



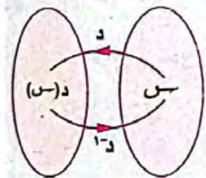
الدرس

3

الدالة العكسية

الدالة العكسية

* إذا كانت د دالة أحادية مجالها س ومداها ص (bijective function) فإن كل عنصر ص فى المدى يناظره عنصر وحيد س فى المجال ولذلك يمكن تعيين دالة عكسية من ص إلى س ويرمز لها بالرمز $د^{-1}$ بحيث : $د^{-1}$ (ص) = س



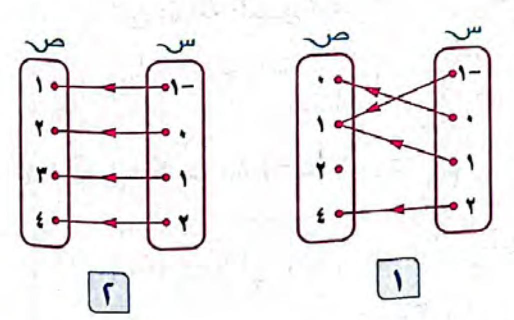
أى أنه إذا كان لكل (س ، ص) ∈ بيان د فإن : (ص ، س) ∈ بيان $د^{-1}$

، ص هى مدى د ومجال $د^{-1}$ ، س هى مجال د ومدى $د^{-1}$

مثال ①

بين أيًا من الدالتين الممثلتين بالمخططين السهميين المقابلين لها دالة عكسية

واكتب بيان د ، $د^{-1}$ إن وجدت :



الحل

١ لا يمكن إيجاد الدالة العكسية $د^{-1}$ للدالة د لأن الدالة د ليست أحادية

بيان د = {(-١ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٤)}

لاحظ : ارتباط العنصرين -١ ، ١ فى س بنفس العنصر ١ فى ص فإذا عكسنا الدالة فإنها تصبح علاقة بيانها = {(١ ، -١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٤ ، ٢)} وهى ليست دالة لأن العنصر ١ أصبح له صورتان هما -١ ، ١ ولذلك يجب أن تكون الدالة أحادية لكى نتمكن من إيجاد دالتها العكسية.



[٢] يمكن إيجاد الدالة العكسية $د^{-1}$ للدالة د لأن الدالة د أحادية ولكل (س ، ص) ∈ بيان د يوجد (ص ، س) ∈ بيان $د^{-1}$

بيان د = {(-١ ، ١) ، (٠ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٤)}

بيان $د^{-1}$ = {(١ ، -١) ، (٢ ، ٠) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ٢)}

مثال (٢)

إذا كانت الدالة د معرفة من المجموعة س = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} إلى المجموعة ص = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}
وكانت : د (س) = س + ٢

[١] أوجد بيان $د^{-1}$ [٢] استنتج قاعدة الدالة $د^{-1}$

الحل

[١] ∵ د (٢) = ٢ + ٢ = ٤ ، د (٣) = ٣ + ٢ = ٥ ، د (٤) = ٤ + ٢ = ٦ ، د (٥) = ٥ + ٢ = ٧

∴ بيان د = {(٢ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٦) ، (٥ ، ٧)}

∴ د دالة أحادية ، مدى د = ص

∴ بيان $د^{-1}$ = {(٤ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٦ ، ٤) ، (٧ ، ٥)}

[٢] بملاحظة الأزواج المرتبة فى بيان $د^{-1}$

نجد أن الإحداثى الصادى يقل عن الإحداثى السينى بمقدار ٢

أى أن : ص = س − ٢ ∴ $د^{-1}$ (س) = س − ٢

ملاحظة هامة

يمكن إيجاد قاعدة $د^{-1}$ مباشرةً بتبديل المتغيرين س ، ص ثم إيجاد ص بدلالة س

فى المثال السابق : ∵ د (س) = س + ٢ أى أن : ص = س + ٢ وبتبديل المتغيرين س ، ص

∴ س = ص + ٢ ومنها ص = س − ٢ ∴ $د^{-1}$ (س) = س − ٢

مثال (٣)

أوجد الدالة العكسية للدالة د : د (س) = ٣س − ٢ ومثل الدالة ومعكوسها بيانيًا فى شكل واحد.

الحل

• لإيجاد الدالة العكسية نقوم بتبديل المتغيرين ثم نوجد ص بدلالة س

∵ ص = ٣س − ٢

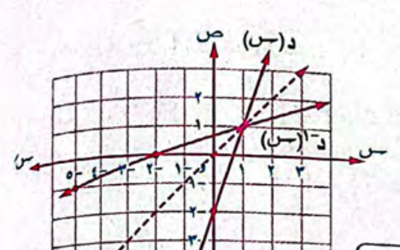
وبتبديل المتغيرين ∴ س = ٣ص − ٢



نوجد ص بدلالة س $\therefore$ ٣ ص = س + ٢

$\therefore$ ص = $\frac{١}{٣}$ (س + ٢) $\therefore$ د$^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٣}$ (س + ٢)

التمثيل البيانى :



• د (س) = ٣ س − ٢

س	١	٠	١−
د (س)	١	٢−	٥−

• د$^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٣}$ (س + ٢)

س	١	٢−	٥−
د$^{-١}$ (س)	١	٠	١−

ملاحظتان

١ لاحظ أن : د$^{-١}$ (س) $\neq$ $\frac{١}{\text{د (س)}}$ ففى المثال السابق

د$^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٣}$ (س + ٢) بينما $\frac{١}{\text{د (س)}}$ = $\frac{١}{٣\text{ س} - ٢}$

٢ فى المثال السابق نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية لها د$^{-١}$ متماثلتان بالنسبة للمستقيم ص = س

وبصفة عامة لأى دالة د إذا أمكن إيجاد دالتها العكسية د$^{-١}$

فإن الدالتين د ، د$^{-١}$ تكونان متماثلتين بالنسبة للمستقيم ص = س

أى أن : د ، د$^{-١}$ كل منهما صورة للأخرى بالانعكاس فى المستقيم ص = س

خواص الدالة العكسية

من خواص الدالة العكسية :

١ يقال إن د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى إذا كان (د ∘ ر) (س) = س ، (ر ∘ د) (س) = س

٢ مجال الدالة د = مدى الدالة العكسية د$^{-١}$ ، مدى الدالة د = مجال الدالة العكسية د$^{-١}$

مثال ٤

حقق أن كلًا من : د ، ر حيث د (س) = ٤ س + ٩ ، ر (س) = $\frac{\text{س} - ٩}{٤}$ دالة عكسية للأخرى.

الحل

$\because$ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = د $\left(\frac{\text{س} - ٩}{٤}\right)$ = ٤ $\left(\frac{\text{س} - ٩}{٤}\right)$ + ٩ = (س − ٩) + ٩ = س

، (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) = ر (٤ س + ٩) = $\frac{٤\text{ س} + ٩ - ٩}{٤}$ = $\frac{٤\text{ س}}{٤}$ = س

$\therefore$ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

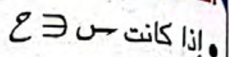




مثال ٥

أوجد المجال الذى يكون فيه للدالة د : د (س) = $س^٢$ دالة عكسية ، وأوجد هذه الدالة العكسية.

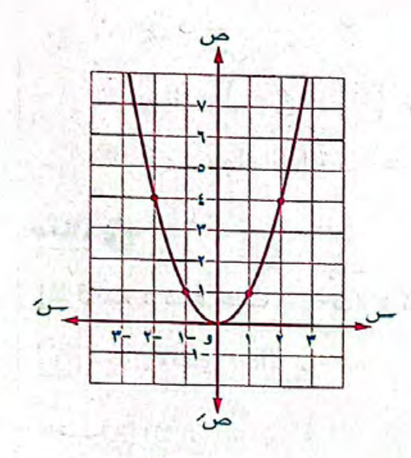
الحـل



• إذا كانت س ∈ ح

فإن الدالة د : د (س) = $س^٢$ ليست أحادية (لا تحقق شرط الخط الأفقى)

لذلك ليس لها دالة عكسية فى المجال ح



• إذا كانت س ∈ [٠ ، ∞[فإن الدالة د : د (س) = $س^٢$

تكون أحادية ويكون لها فى هذه الحالة دالة عكسية.

∵ ص = $س^٢$ حيث س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

وبتبديل المتغيرين ∴ س = $ص^٢$

∴ ص = $\sqrt{س}$ حيث : ص ≥ ٠ ، س ≥ ٠

∴ $د^{-١}$ (س) = $\sqrt{س}$

• إذا كانت : س ∈]− ∞ ، ٠] فإن الدالة د : د (س) = $س^٢$

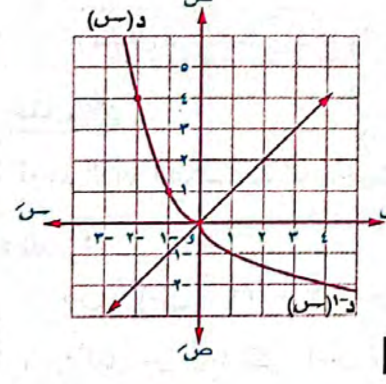
تكون أحادية ويكون لها فى هذه الحالة دالة عكسية.

∵ ص = $س^٢$ حيث س ≤ ٠ ، ص ≥ ٠

وبتبديل المتغيرين ∴ س = $ص^٢$ حيث س ≥ ٠ ، ص ≤ ٠

∴ ص = − $\sqrt{س}$ حيث س ≥ ٠ ، ص ≤ ٠

∴ $د^{-١}$ (س) = − $\sqrt{س}$



∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية = [٠ ، ∞[أ،]− ∞ ، ٠]

مثال ٦

إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣ فأوجد :

١ مجال ومدى الدالة د

٢ $د^{-١}$ (س) وعين مجال ومدى الدالة $د^{-١}$

الحـل

١ مجال د = ح − {٢} ومدى د = ح − {٣}



٢ ∵ ص = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣ بتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{١}{ص - ٢}$ + ٣

∴ $\frac{١}{ص - ٢}$ = س - ٣

∴ ص - ٢ = $\frac{١}{س - ٣}$

∴ ص = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٢

∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٢

∴ مجال $د^{-١}$ = ع - {٣} ومدى $د^{-١}$ = ع - {٢}

لاحظ أن: مجال الدالة $د^{-١}$ = مدى الدالة د

مثال ٧

إذا كانت د دالة حيث د (س) = ٢ + $\sqrt{س - ٣}$ فأوجد:

١ مجال ومدى الدالة د

٢ $د^{-١}$ (س) وعين مجال ومدى الدالة $د^{-١}$

الحل

١ ∵ د (س) معرفة لجميع قيم س - ٣ ≥ ٠ ∴ س ≥ ٣ ∴ مجال د = [٣ ، ∞[

، ∵ لكل س ≥ ٣ يكون ٢ + $\sqrt{س - ٣}$ ≥ ٢ ∴ ص ≥ ٢ ∴ مدى الدالة د = [٢ ، ∞[

٢ ∵ ص = ٢ + $\sqrt{س - ٣}$ حيث س ≥ ٣ ، ص ≥ ٢ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ + $\sqrt{ص - ٣}$ حيث ص ≥ ٣ ، س ≥ ٢

∴ س - ٢ = $\sqrt{ص - ٣}$

∴ $(س - ٢)^٢$ = ص - ٣

∴ ص = $(س - ٢)^٢$ + ٣

∴ $د^{-١}$ (س) = $(س - ٢)^٢$ + ٣ حيث س ≥ ٢ ، ص ≥ ٣

، مجال $د^{-١}$ = مدى د = [٢ ، ∞[، مدى $د^{-١}$ = مجال د = [٣ ، ∞[

مثال ٨

أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث د (س) = $(س - ٢)^٢$ + ٣ ، س ≤ ٢ موضحًا مجال $د^{-١}$

الحل

∵ ص = $(س - ٢)^٢$ + ٣ ، س ≤ ٢

، ∵ لكل س ≤ ٢ يكون $(س - ٢)^٢$ + ٣ ≥ ٣ ∴ ص ≥ ٣

بتبديل المتغيرين

∴ س = $(ص - ٢)^٢$ + ٣ ، ص ≤ ٢ ، س ≥ ٣

∴ $(ص - ٢)^٢$ = س - ٣

، وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين

∴ ص - ٢ = ± $\sqrt{س - ٣}$

، ∵ ص ≤ ٢ ∴ ص - ٢ = - $\sqrt{س - ٣}$

∴ ص = - $\sqrt{س - ٣}$ + ٢

∴ $د^{-١}$ (س) = - $\sqrt{س - ٣}$ + ٢ حيث س ≥ ٣ ، ص ≤ ٢

∴ مجال $د^{-١}$ = [٣ ، ∞[



مثال ٩

إذا كانت د : $ح^+ \longrightarrow ح$ حيث د (س) = $\frac{1}{س^2 + 1}$ أوجد $د^{-1}$ (س) وعين مجال ومدى $د^{-1}$

الحل

∵ ص = $\frac{1}{س^2 + 1}$ ، س ∈ $ح^+$ ولكل س > ٠ يكون ٠ < ص < ١

وبتبديل المتغيرين ∴ س = $\frac{1}{ص^2 + 1}$ ، ص > ٠ ، ٠ < س < ١

∵ $ص^2 + 1 = \frac{1}{س}$ ∴ $ص^2 = \frac{1}{س} - 1$

، ∵ ص > ٠ ∴ ص = $\sqrt{\frac{1}{س} - 1}$

∴ $د^{-1}$ (س) = $\sqrt{\frac{1}{س} - 1}$ حيث ص > ٠ ، ٠ < س < ١ ∴ مجال $د^{-1}$ =]٠ ، ١[ومدى $د^{-1}$ = $ح^+$

ملاحظة

الدوال المتماثلة حول المستقيم ص = س دالتها العكسية هي نفسها ومنها :

١ الدوال الخطية على الصورة د : د (س) = − س + ب

مثل د : د (س) = − س + ١ ، د : د (س) = $\frac{1}{2}$ − س ، ...

٢ الدوال الكسرية على الصورة د : د (س) = $\frac{أ}{س - ك}$ + ك حيث ك ∈ ح

مثل د : د (س) = $\frac{1}{س - 5}$ + ٥ ، د : د (س) = $\frac{-2}{س}$ ، ...

مثال ١٠

أثبت أن الدالة د في كل مما يأتي دالتها العكسية هي نفسها :

١ د (س) = ٢ − س ٢ د (س) = $\frac{1}{س - 3}$ + ٣

الحل

١ ص = ٢ − س بتبديل المتغيرين ∴ س = ٢ − ص ∴ ص = ٢ − س

∴ $د^{-1}$ (س) = ٢ − س = د (س) ∴ د دالتها العكسية هي نفسها.

٢ ص = $\frac{1}{س - 3}$ + ٣ بتبديل المتغيرين ∴ س = $\frac{1}{ص - 3}$ + ٣ ∴ س − ٣ = $\frac{1}{ص - 3}$

∴ ص − ٣ = $\frac{1}{س - 3}$ ∴ ص = $\frac{1}{س - 3}$ + ٣

∴ $د^{-1}$ (س) = $\frac{1}{س - 3}$ + ٣ = د (س) ∴ د دالتها العكسية هي نفسها.



تمـارين 9 على الدالة العكسية



من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت د دالة أحادية وكانت ر دالة حيث منحنى ر هو صورة منحنى د بالانعكاس فى المستقيم ص = س فإن : ....

(أ) ر (س) = د (س)　(ب) ر (س) = $\frac{1}{د (س)}$

(جـ) ر (س) = $د^{-1}$ (س)　(د) ر (س) = (د ∘ د) (س)

(٢) أى مما يأتى ليس له دالة عكسية ؟

(أ) ص = $\sqrt[3]{س}$　(ب) ص = ٣ س　(جـ) ص = $س^3$　(د) ص = $س^2$

(٣) الدالتان د ، $د^{-1}$ كل منهما صورة الأخرى بالانعكاس فى المستقيم ....

(أ) ص = ٠　(ب) س = ٠　(جـ) ص = − س　(د) ص = س

(٤) إذا كانت : (أ ، ب) ∈ منحنى الدالة د فإن : .... ∈ منحنى الدالة $د^{-1}$

(أ) (أ ، ب)　(ب) (أ ، − ب)　(جـ) (ب ، أ)　(د) (ب ، − أ)

(٥) إذا كانت د : دالة حيث د (٧) = ٣ فإن : $د^{-1}$ (٣) = ...

(أ) ٣　(ب) ٤　(جـ) ٧　(د) ١٠

(٦) إذا كانت د = {(١ ، ٤) ، (٢ ، −٣) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ٠)} فإن : $د^{-1}$ (١) + د (٢) = ...

(أ) −١　(ب) صفر　(جـ) ١　(د) ٣

(٧) إذا كانت الدالة $د^{-1}$ حيث $د^{-1}$ = {(٢ ، ٣) ، (٥ ، ب)} هى الدالة العكسية للدالة د حيث د = {(٤ ، ٥) ، (أ ، ٢)} فإن : أ − ب = ...

(أ) صفر　(ب) ١　(جـ) −١　(د) ٢

(٨) إذا قطع المستقيم ص = س الدالة الأحادية د فى النقطة (٢ ، ٢) فإنه يقطع الدالة $د^{-1}$ فى النقطة ....

(أ) (−٢ ، ٢)　(ب) (٢ ، ٢)　(جـ) (−٢ ، −٢)　(د) (٢ ، −٢)

(٩) إذا كانت د دالة حيث د (س) = ٧ س فإن : $د^{-1}$ (س) = ...

(أ) ٧ س　(ب) $\frac{س}{٧}$　(جـ) $\frac{٧}{س}$　(د) ٧ − س

(١٠) صورة النقطة (٣ ، −١) بالانعكاس فى المستقيم ص = س هى ....

(أ) (٣ ، −١)　(ب) (−١ ، −٣)　(جـ) (−١ ، ٣)　(د) (٣ ، ١)



(١١) إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة $د^{-١}$ فى نقطة (ك ، ٢ ك − ٣) فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٢) إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة $د^{-١}$ فى نقطة $\left(أ ، \frac{٤}{أ}\right)$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ± ٢ (جـ) ٤ (د) ± ٤

(١٣) إذا كانت $د^{-١}$ هى الدالة العكسية للدالة د فإن : ....

(أ) مجال $د^{-١}$ = مجال د (ب) مجال $د^{-١}$ = مدى د

(جـ) مدى $د^{-١}$ = مدى د (د) مدى $د^{-١}$ = مجال $د^{-١}$

(١٤) إذا كانت : ص = $\sqrt[٣]{س}$ فإن الدالة العكسية لها ص = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}$ (ب) $س^{٣}$ (جـ) $س^{٣}$ − ١ (د) ٣ $س^{٣}$

(١٥) إذا كان : د (س) = $س^{٣}$ + ٧ فإن : $د^{-١}$ (−١) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ٨

(١٦) إذا كانت الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س − ٢}$ + ٢ فإن : $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) $\frac{١}{٢ + س}$ − ٢ (ب) $\frac{١}{٢ − س}$ − ٢ (جـ) د (س) (د) د (−س)

(١٧) إذا كانت د دالة حيث د (س) = ٣ + $\sqrt{س − ١}$ فإن مدى $د^{-١}$ هو ....

(أ) [٣ ، ∞[(ب)]٣ ، ∞[(جـ) [١ ، ∞[(د)]١ ، ∞[

(١٨) إذا كانت الدالتين د ، ر حيث : د (س) = ٤ س − ١٢ ، ر (س) = أ س + ٣ كل منها عكسية للأخرى فإن : قيمة أ = ...

(أ) −٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٤ (د) ٣

(١٩) إذا كانت الدالة د : د (س) = ٥ س + ب هى دالة عكسية للدالة ر : ر (س) = حـ س + ٤

فإن : ب × حـ = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ٢٠ (د) −٢٠

(٢٠) إذا كانت : $د^{-١}$ (س) = ٢ س + ١ فإن : د (س) = ...

(أ) −٢ س − ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ س + ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٢ س}$ + ١

(٢١) إذا كانت د (س) = $\frac{س + ك}{س − ١}$ وكان (٥ ، ٢) ∈ $د^{-١}$ فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٢) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س − أ}$ + ب فإن : $د^{-١}$ (أ) + د (ب) = ...

(أ) غير معرفة. (ب) أ − ب (جـ) أ + ب (د) صفر



(٢٣) إذا كانت : $٣^{د(س)}$ = ٢ س − ١ فإن : $د^{-١}$ (٠) = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٥

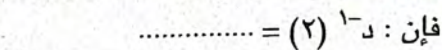
(٢٤) ($د^{-١}$ ∘ د) (س) = ...

(أ) س (ب) $\frac{١}{د(س)}$ (جـ) د (س) (د) د $د^{-١}$ (س)

(٢٥) إذا كانت د : ح − {٢} ⟵ ح − {١} حيث د (س) = $\frac{س + ١}{س − ٢}$ فإن : $د^{-١}$ (٤) = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٢٦) إذا كانت : د (س) = $\frac{٢ س + ٣}{٣ س + ٥}$ فإن مجال الدالة العكسية $د^{-١}$ (س) هو ....



(أ) ح (ب) ح − $\{\frac{-٥}{٣}\}$ (جـ) ح − $\{\frac{٢}{٣}\}$ (د) ح − $\{\frac{-٥}{٣} ، \frac{٢}{٣}\}$

(٢٧) الشكل المقابل يمثل دالة د : س ⟵ ص

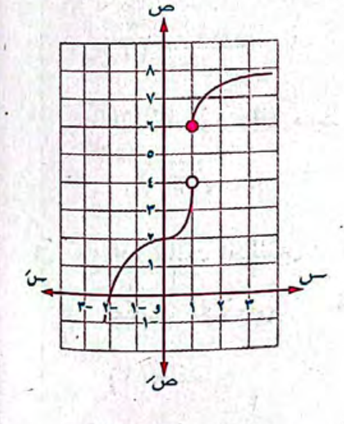
فإن : $د^{-١}$ (٢) = ...

(أ) ١ (ب) ٥

(جـ) ٤ (د) ٧

(٢٨) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : $د^{-١}$ (صفر) + $د^{-١}$ (٦) = ...



(أ) −١ (ب) ٣

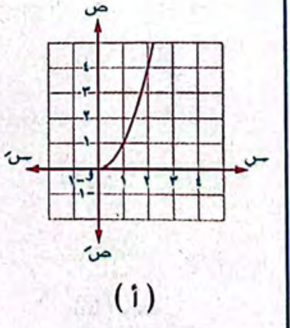
(جـ) ٥ (د) ٨

(٢٩) إذا كان الشكل المقابل يمثل

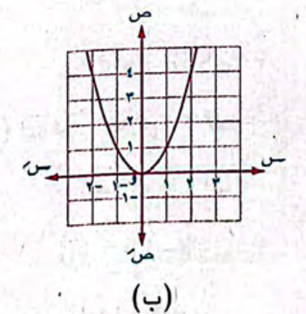
الدالة د : د (س) = $\sqrt{س}$ ، س ≥ .

فإن أى من الأشكال التالية يمثل

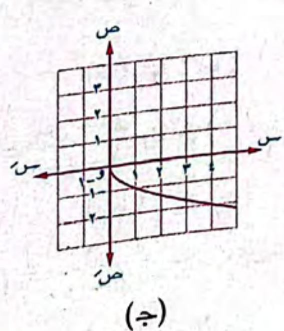
منحنى الدالة $د^{-١}$ ؟



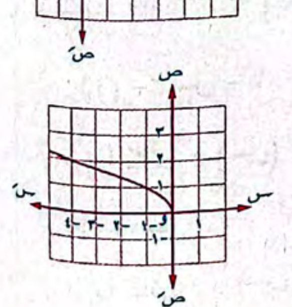
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)



ثانيًا الأسئلة المقالية

(١) أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال الآتية :

①

س	−٢	١	٢	٥
د (س)	٧	٤	١	−١

② د = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤)}

③ د (س) = ٢ س + ٥

④ د (س) = $\frac{1}{2}$ س + ٤

⑤ د (س) = ٥ + $\frac{٤}{س}$

⑥ د (س) = ٨ س^{٣} − ١

⑦ د (س) = $\sqrt[٣]{س + ١}$

⑧ د (س) = $\sqrt[٣]{٤ - س}$

⑨ د (س) = ٢ + $\sqrt{٣ - س}$

⑩ د (س) = س^{٢} حيث س ≤ صفر

⑪ د (س) = (س + ٢)^{٢} حيث س ≥ −٢

⑫ د (س) = (س − ١)^{٢} + ٢ حيث س ≥ ١

⑬ د (س) = س^{٢} + ٨ س + ٧ حيث س ≥ −٤

⑭ د (س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث −٣ ≤ س ≤ ٠

⑮ د (س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث ٠ ≤ س ≤ ٣

⑯ د : ح$^{+}$ ⟵ ح بحيث د (س) = $\frac{١}{س^{٢} + ٢}$

(٢) أى من الدوال الآتية لها دالة عكسية :

① د$_{١}$ = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٥)}

② د$_{٢}$ = {(−١ ، ٣) ، (٠ ، ٢) ، (١ ، ٣)}

③ د$_{٣}$ (س) = س^{٢} − ١ حيث س ∈ ح

④ د$_{٤}$ (س) = |س| حيث س ∈ ح

(٣) حدد إذا كان كل من الدالتين د ، ر دالة عكسية للأخرى أم لا فى كل مما يأتى :

① د (س) = ٢ س − ٣ ، ر (س) = $\frac{س + ٣}{٢}$

② د (س) = س^{٢} + ٤ حيث س ≥ ٠ ، ر (س) = $\sqrt{س - ٤}$

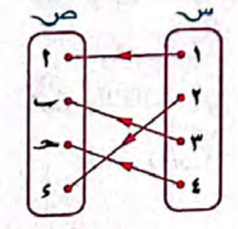
③ د (س) = $\frac{-٢}{س - ٥}$ ، ر (س) = $\frac{٥ س - ٢}{س}$

④ د (س) = $\sqrt[٣]{٤ س}$ ، ر (س) = $\frac{س^{٣}}{٤}$

(٤) ① إذا كانت : د (س) = ٥ س أوجد : د$^{-١}$ (س) ومثلهما بيانيًا.

② الشكل المقابل يمثل دالة د من س إلى ص

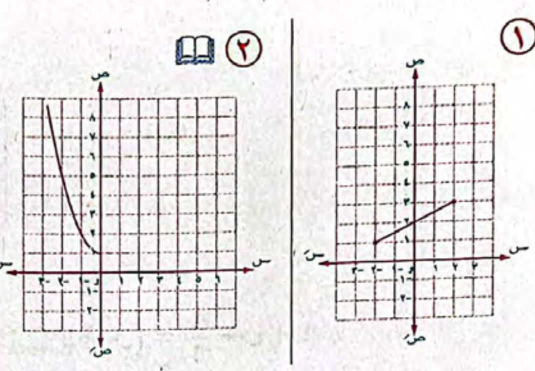
فأوجد قيمة : د$^{-١}$ (ب) + ٢ د$^{-١}$ (حـ)

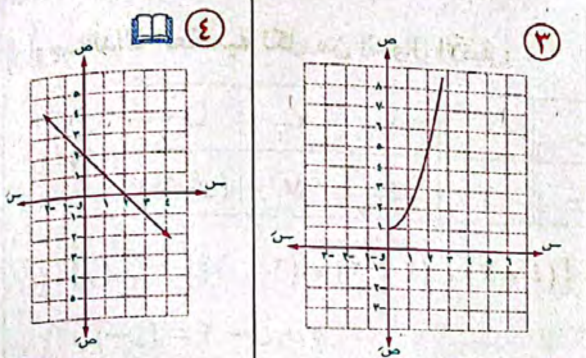




٥ في كل من الأشكال الآتية ارسم منحنى الدالة العكسية $د^{-1}$:

① ② ③ ④





٦ أي من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية معكوسها هو نفس الدالة :

① $د(س) = ٢ س$ ② $د(س) = - س$ ③ $د(س) = \frac{٢}{س}$

④ $د(س) = ٧ - س$ ⑤ $د(س) = \frac{١}{س - ٣} + ٥$ ⑥ $د(س) = \frac{١}{س - ك} + ك$ حيث $ك \in ح$

٧ اكتشف الخطأ : حاول كل من وائل ورنا إيجاد الدالة العكسية للدالة $د(س) = \frac{س - ٥}{س}$

إجابة وائل

$\because د(س) = \frac{س - ٥}{س}$

، $\because د^{-1}(س) = \frac{١}{د(س)}$

$\therefore د^{-1}(س) = ١ \div \frac{س - ٥}{س} = ١ \times \frac{س}{س - ٥}$

$د^{-1}(س) = \frac{س}{س - ٥}$

إجابة رنا

$\because ص = \frac{س - ٥}{س}$

$\therefore س = \frac{ص - ٥}{ص}$ بتبديل المتغيرين

$\therefore ص س = ص - ٥$ بالضرب التبادلي

$\therefore ص س - ص = -٥$ $\therefore ص (س - ١) = -٥$

$\therefore د^{-1}(س) = \frac{-٥}{س - ١}$

أي من الإجابتين هي الصواب ؟ ولماذا ؟

٨ في كل مما يأتي عين المجال الذي يكون فيه للدالة د دالة عكسية :

① $د(س) = س^{٢}$ ② $د(س) = س^{٣}$

③ $د(س) = \frac{١}{٢} س$

٩ أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث : $د(س) = \frac{س - ١}{س + ٥}$

١٠ إذا كانت كل من الدالتين د ، ر حيث : $د(س) = ٢ س + أ$

، $ر(س) = ب س + ٣$ دالة عكسية للأخرى. فما قيمة كل من أ ، ب ؟

«-٦ ، $\frac{١}{٢}$»



ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = أ س + ب ، $د^{-1}$ (٩) = ٣ ، $د^{-1}$ (٥) = ٢ فإن : أ × ب = ...

(أ) −١٢ (ب) −١٠ (جـ) −٨ (د) −٧

② إذا كانت : د (س) = $س^٢$ ، ر (س) = س − ٣ فإن مجموعة حل المعادلة :

ر (د (س)) = $ر^{-1}$ (س) هى ....

(أ) {٢ ، −٣} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، −٢} (د) {٢ ، ٣}

③ إذا كانت د : ح − {−١} ⟵ ح − {٢} حيث س = $\frac{د(س) + ١}{٢ - د(س)}$ فإن : $د^{-1}$ (٣) = ...

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) −١

④ إذا كانت د : ح − {١} ⟵ ح − {٣} حيث د (س) = $\frac{أ س + ٣}{س - ب}$ فإن : $د^{-1}$ (١) = ...

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) غير معرفة.

⑤ إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = $\sqrt[3]{س - ٥}$ ، ر : ح ⟵ ح حيث ر (س) = ٢ س − ٧

فإن : (ر ∘ $د^{-1}$) (س) = ...

(أ) ٢ $س^٣$ − ٣ (ب) ٢ $س^٣$ − ٥ (جـ) ٢ $س^٣$ + ٣ (د) ٢ $س^٣$ + ٥

⑥ إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ٣ س − ٤ فإن : $د^{-1}$ (س + ٢) = ...

(أ) $\frac{س - ٢}{٣}$ (ب) $\frac{س + ٢}{٣}$ (جـ) $\frac{س + ٤}{٣}$ (د) $\frac{س + ٦}{٣}$

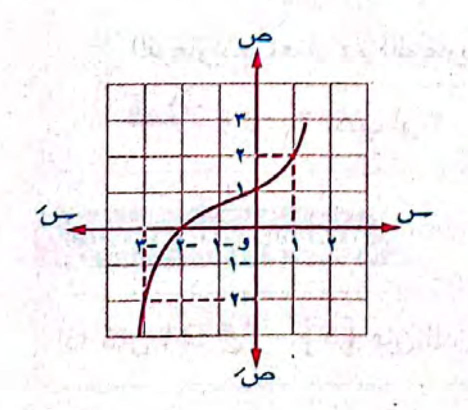
⑦ إذا كانت : د (س) = $س^٣$ + ٣ $س^٢$ + ٣ س + ١ فإن : $د^{-1}$ (س) = ...

(أ) $(س + ١)^٣$ (ب) $\sqrt[3]{س}$ − ١ (جـ) $\sqrt[3]{س}$ + ١ (د) $س^٣$ − ١

⑧ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة $د^{-1}$ (س)

فإن : (د ∘ د) (صفر) = ...

(أ) −٣ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) ١







الدرس

4

الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى

نعلم أنه يمكن كتابة العدد ٨ على الصورة : ٨ = $٢^{٣}$ ، والعدد (٣) الذى يجب وضعه كأس للعدد (٢) ليعطى (٨) يسمى لوغاريتم العدد (٨) للأساس (٢) ويرمز له بالرمز $لو_{٢}$ ٨

وهكذا نجد أن كل صورة أسية أساسها عدد حقيقى موجب ≠ ١ يوجد لها صورة أخرى تكافئها تسمى بالصورة اللوغاريتمية وعمومًا فإن :

> ص = $لو_{أ}$ س ⟺ س = $أ^{ص}$ حيث أ ∈ $ح^{+}$ - {١} ، س ∈ $ح^{+}$ ، ص ∈ ح

فمثلًا : $لو_{٣}$ ٨١ = ٤ ⟺ $٣^{٤}$ = ٨١ ، $لو_{٣}$ $\frac{١}{٩}$ = -٢ ⟺ $٣^{-٢}$ = $\frac{١}{٩}$

، $٤^{٢}$ = ١٦ ⟺ $لو_{٤}$ ١٦ = ٢ ، $٢^{-٣}$ = $\frac{١}{٨}$ ⟺ $لو_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ = -٣ وهكذا

ملاحظات

١ لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب ، فكل من $لو_{٢}$ -٣ ، $لو_{٥}$ - ٨ ، $لو_{٦}$ صفر لا معنى له.

٢ الأساس أ يجب أن يكون عددًا موجبًا يختلف عن الواحد الصحيح ويترتب على ذلك أن كلًا من : $لو_{-٢}$ ٨ ، $لو_{صفر}$ ٥ ، $لو_{١}$ ٤ لا معنى له.

٣ اللوغاريتم المعتاد هو اللوغاريتم الذى أساسه ١٠ وقد اتفق على حذف هذا الأساس عند كتابة اللوغاريتم

فمثلًا : $لو_{١٠}$ ٣ تكتب لو ٣

الدالة اللوغاريتمية

> إذا كان أ ∈ $ح^{+}$ - {١} فإن الدالة د : $ح^{+}$ ⟵ ح حيث د (س) = $لو_{أ}$ س تسمى بالدالة اللوغاريتمية.



العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية

درسنا فيما سبق لرسم الدالة الأسية د : د (س) = $٣^{س}$ أى ص = $٣^{س}$ نكون الجدول التالى :

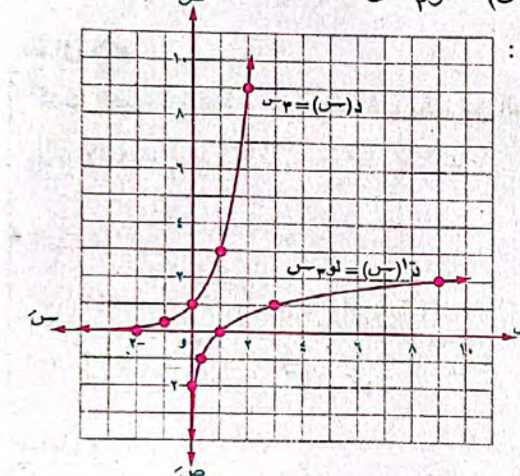
س	٢-	١-	٠	١	٢
د (س) = $٣^{س}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩

وبتبديل المتغيرين نحصل على الدالة العكسية س = $٣^{ص}$

وهى الصورة المكافئة للدالة اللوغاريتمية ص = $لو_{٣}$ س أى $د^{-١}$ (س) = $لو_{٣}$ س

ولرسم هذه الدالة نبدل قيم س ، ص فى الجدول السابق كما يلى :

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
$د^{-١}$ (س) = $لو_{٣}$ س	٢-	١-	٠	١	٢



* من خواص الدالة العكسية والشكل المقابل نلاحظ أن :

منحنيى الدالتين متماثلان حول المستقيم ص = س

، مجال الدالة الأسية هو ح

والمدى =]٠ ، ∞[

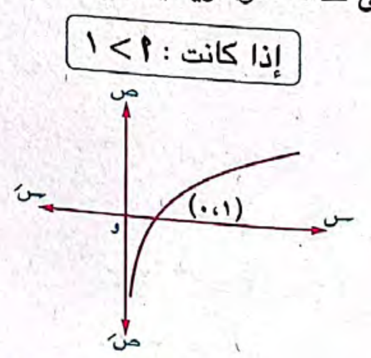
، مجال الدالة اللوغاريتمية هو]٠ ، ∞[والمدى = ح

أى أن الدالة اللوغاريتمية هى الدالة العكسية للدالة الأسية.

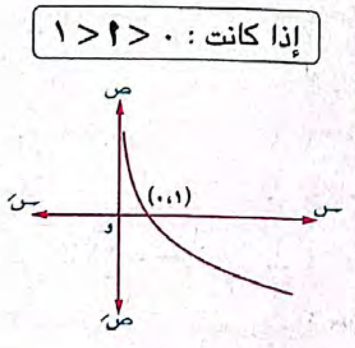
التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية د : د(س) = $لو_{أ}$ س

• الشكل البيانى للدالة اللوغاريتمية يأخذ أحد الشكلين الآتيين حسب قيمة الأساس أ :

إذا كانت : أ > ١



إذا كانت : ٠ < أ < ١



بعض خواص الدالة اللوغاريتمية د : د (س) = $لو_{أ}$ س

١ مجال الدالة اللوغاريتمية = $ح^{+}$

٢ مدى الدالة اللوغاريتمية = ح

٣ الدالة اللوغاريتمية تزايدية عندما أ > ١ وتناقصية عندما ٠ < أ < ١

٤ جميع منحنيات الدوال اللوغاريتمية لأى أساس موجب ≠ ١ تمر بالنقطة (١ ، ٠)

٥ الدالة اللوغاريتمية هى دالة أحادية أى أنه إذا كان $لو_{أ}$ س = $لو_{أ}$ ص فإن س = ص



مثال (١)

عبر عن كل مما يأتي بالصورة الأسية المكافئة :

[١] $لو_{٢} ٦٤ = ٦$ [٢] $لو_{٢} ٨\sqrt{٢} = \frac{٧}{٢}$ [٣] $لو_{٣} \frac{١}{٢٧} = -٣$ [٤] $لو ٠,٠١ = -٢$

الحل

[١] $لو_{٢} ٦٤ = ٦ \Leftrightarrow ٦٤ = ٢^{٦}$

[٢] $لو_{٢} ٨\sqrt{٢} = \frac{٧}{٢} \Leftrightarrow ٨\sqrt{٢} = ٢^{\frac{٧}{٢}}$

[٣] $لو_{٣} \frac{١}{٢٧} = -٣ \Leftrightarrow \frac{١}{٢٧} = ٣^{-٣}$

[٤] $لو ٠,٠١ = -٢ \Leftrightarrow ٠,٠١ = ١٠^{-٢}$

مثال (٢)

اكتب الصورة اللوغاريتمية المكافئة لكل من الصور الأسية الآتية :

[١] $٢٤٣ = (\sqrt{٣})^{١٠}$ [٢] $١٠^{-٢} = ٠,٠١$ [٣] $٣^{\frac{٥}{٢}} = ٩\sqrt{٣}$ [٤] $حـ = م^{س}$

الحل

[١] $٢٤٣ = (\sqrt{٣})^{١٠} \Leftrightarrow لو_{\sqrt{٣}} ٢٤٣ = ١٠$

[٢] $١٠^{-٢} = ٠,٠١ \Leftrightarrow لو_{١٠} ٠,٠١ = -٢$

[٣] $٣^{\frac{٥}{٢}} = ٩\sqrt{٣} \Leftrightarrow لو_{٣} ٩\sqrt{٣} = \frac{٥}{٢}$

[٤] $حـ = م^{س} \Leftrightarrow لو_{م} حـ = س$

مثال (٣)

أوجد قيمة كل من :

[١] $لو_{٢} ٦٤$ [٢] $لو_{٦} ١$ [٣] $لو_{٤} ٤\sqrt{٢}$

[٤] $لو_{\sqrt{٣}} \frac{١}{٢٧}$ [٥] $لو ٠,٠٠٠١$

الحل

[١] بفرض أن : $لو_{٢} ٦٤ = س$ $\therefore ٢^{س} = ٦٤$ $\therefore ٢^{س} = ٢^{٦}$

$\therefore س = ٦$ $\therefore لو_{٢} ٦٤ = ٦$

[٢] بفرض أن : $لو_{٦} ١ = س$ $\therefore ٦^{س} = ١$

$\therefore س = صفر$ $\therefore لو_{٦} ١ = صفر$

[٣] بفرض أن : $لو_{٤} ٤\sqrt{٢} = س$ $\therefore ٤^{س} = ٤\sqrt{٢}$ $\therefore ٢^{٢س} = ٢^{٢} \times ٢^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore ٢^{٢س} = ٢^{\frac{٥}{٢}}$ $\therefore ٢س = \frac{٥}{٢}$ $\therefore س = \frac{٥}{٤}$

$\therefore لو_{٤} ٤\sqrt{٢} = \frac{٥}{٤}$

[٤] بفرض أن : $لو_{\sqrt{٣}} \frac{١}{٢٧} = س$ $\therefore (\sqrt{٣})^{س} = \frac{١}{٢٧}$ $\therefore ٣^{\frac{١}{٢}س} = ٣^{-٣}$

$\therefore \frac{١}{٢} س = -٣$ $\therefore س = -٦$ $\therefore لو_{\sqrt{٣}} \frac{١}{٢٧} = -٦$

[٥] بفرض أن : $لو ٠,٠٠٠١ = س$ $\therefore ١٠^{س} = ٠,٠٠٠١ = ١٠^{-٤}$

$\therefore س = -٤$ $\therefore لو ٠,٠٠٠١ = -٤$



مثال ④

أوجد قيمة س إذا كان :

① $لو_٢ س = -٤$ ② $لو_٩ ٨١\sqrt[٣]{} = س$ ③ $لو_{\frac{١}{٢}} س = -٣$ ④ $لو_س ٨ = ٦$

الحل

① ∵ $لو_٢ س = -٤$ ∴ $س = ٢^{-٤}$ ∴ $س = \frac{١}{٢^٤} = \frac{١}{١٦}$

② ∵ $لو_٩ ٨١\sqrt[٣]{} = س$ ∴ $٩^س = ٨١\sqrt[٣]{}$ ∴ $٣^{٢س} = ٣^٤ \times ٣^{\frac{١}{٢}}$

∴ $٣^{٢س} = ٣^{\frac{٩}{٢}}$ ∴ $٢ س = \frac{٩}{٢}$ ∴ $س = \frac{٩}{٤}$

③ ∵ $لو_{\frac{١}{٢}} س = -٣$ ∴ $س = \left(\frac{١}{٢}\right)^{-٣} = ٢^٣$ ∴ $س = ٨$

④ ∵ $لو_س ٨ = ٦$ ∴ $س^٦ = ٨$ ∴ $س^٦ = ٢^٣$

∴ $س = (٢^٣)^{\frac{١}{٦}}$ ∴ $س = ٢^{\frac{١}{٢}}$ ∴ $س = \sqrt{٢}$

مثال ⑤

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① $لو_س ٧ س = ٢$

② $لو_٢ (س^٢ + \frac{٣}{٤} س) = -٢$

③ $لو_٢ لو_٣ (س^٢ - ٧ س + ٢١) = ١$

④ $(لو_٢ س)^٢ - ٣ لو_٢ س = ٤$

الحل

① ∵ $لو_س ٧ س = ٢$ ∴ $س^٢ = ٧ س$

∴ $س^٢ - ٧ س = ٠$ ∴ $س (س - ٧) = ٠$

∴ إما س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٧ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {٧}

② ∵ $لو_٢ (س^٢ + \frac{٣}{٤} س) = -٢$

∴ $س^٢ + \frac{٣}{٤} س = ٢^{-٢}$

∴ $س^٢ + \frac{٣}{٤} س = \frac{١}{٤}$

∴ $٤ س^٢ + ٣ س - ١ = ٠$

∴ $(س + ١) (٤ س - ١) = ٠$

∴ س = -١ (يحقق) أ، س = $\frac{١}{٤}$ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {-١ ، $\frac{١}{٤}$}

لاحظ أنه

عند حل المعادلات نعوض بالقيم التى نحصل عليها فى المعادلة الأصلية ويكون الحل هو القيمة التى تحقق هذه المعادلة حيث إنه لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب.

أو إيجاد مجموعة قيم المتغير س المسموح التعويض بها قبل البدء فى حل المعادلات وذلك لتجنب عملية التعويض بقيم س التى تم الحصول عليها.



٣ ∵ لو$_{٢}$ لو$_{٣}$ (س^{٢} − ٧ س + ٢١) = ١

∴ لو$_{٣}$ (س^{٢} − ٧ س + ٢١) = ٢^{١} = ٢

∴ س^{٢} − ٧ س + ٢١ = ٣^{٢} = ٩

∴ س^{٢} − ٧ س + ١٢ = ٠

∴ (س − ٣) (س − ٤) = ٠

∴ إما س = ٣ (يحقق) أ، س = ٤ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {٣ ، ٤}

٤ ∵ (لو$_{٢}$ س)^{٢} − ٣ لو$_{٢}$ س − ٤ = ٠

∴ (لو$_{٢}$ س − ٤) (لو$_{٢}$ س + ١) = ٠

∴ إما لو$_{٢}$ س = ٤

∴ س = ٢^{٤} = ١٦ (يحقق)

أ، لو$_{٢}$ س = −١

∴ س = ٢$^{-١}$ = $\frac{١}{٢}$ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {١٦ ، $\frac{١}{٢}$}

مثال ٦

إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٢٧ ، ٣)

أوجد قيمة أ ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∈ [$\frac{١}{٩}$ ، ٩] ومن الرسم :

١ استنتج المجال والمدى والاطراد ونقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات.

٢ أوجد قيمة تقريبية للعدد لو$_{٣}$ ٦

الحـــل

∵ د (س) = لو$_{أ}$ س لكل س > ٠ ، أ ∈ ح$^{+}$ − {١}

، ∵ النقطة (٢٧ ، ٣) ∈ منحنى الدالة ∴ ٣ = لو$_{أ}$ ٢٧ ∴ أ^{٣} = ٢٧ = ٣^{٣}

∴ أ = ٣ ∴ د (س) = لو$_{٣}$ س

نكون الجدول الآتى : [مع ملاحظة أن الأساس = ٣ > ١]

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
ص = لو$_{٣}$ س	−٢	−١	صفر	١	٢

* لاحظ اختيار قيم س قوى العدد ٣ (الأساس) {٣$^{-٢}$ ، ٣$^{-١}$ ، ٣^{٠} ، ٣^{١} ، ٣^{٢}}

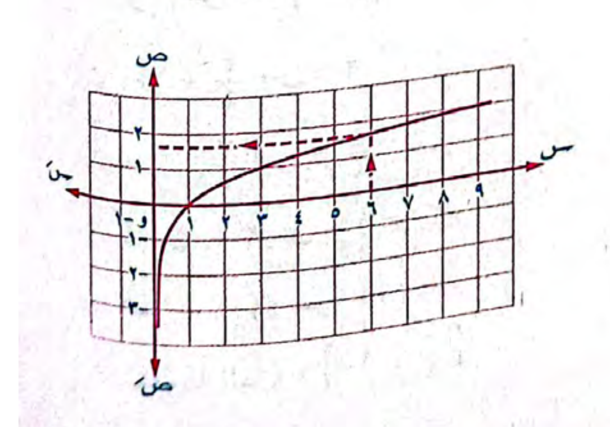
• ومن الرسم نجد أن :

* المجال = ح$^{+}$ ، المدى = ح

* الدالة تزايدية على مجالها.

* المنحنى يقطع محور السينات فى النقطة (١ ، ٠)

* لو$_{٣}$ ٦ ≃ ١,٦





مثال ٧

إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{١٦} ، ٤\right)$ أوجد قيمة أ ثم ارسم منحنى الدالة د متخذاً س ∋ $\left[\frac{١}{٤} ، ٤\right]$ ومن الرسم استنتج المدى والاطراد ثم أوجد قيمة تقريبية للعدد لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥

الحل

∵ د (س) = لو$_{أ}$ س لكل س > ٠ ، أ ∋ ح$^{+}$ − {١} ، ∵ النقطة $\left(\frac{١}{١٦} ، ٤\right)$ ∋ منحنى الدالة

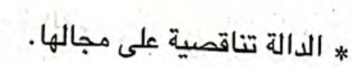
∴ ٤ = لو$_{أ}$ $\frac{١}{١٦}$ ∴ أ^{٤} = $\frac{١}{١٦}$ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$

∴ أ = $\frac{١}{٢}$ (ويرفض الحل السالب) ∴ د (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س

نكون الجدول الآتى : (مع ملاحظة أن الأساس = $\frac{١}{٢}$ < ١)

س	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤
ص = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س	٢	١	صفر	−١	−٢

* لاحظ اختيار قيم س قوى العدد $\frac{١}{٢}$ (الأساس)



$\left\{\left(\frac{١}{٢}\right)^{-٢} ، \left(\frac{١}{٢}\right)^{-١} ، \left(\frac{١}{٢}\right)^{٠} ، \left(\frac{١}{٢}\right)^{١} ، \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\right\}$

• ومن الرسم نجد أن :

* المدى = ح
* الدالة تناقصية على مجالها.
* لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥ ≃ −١,٨

مثال ٨

أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = لو$_{٤}$ (٤ − س)

٢ د (س) = لو$_{١-س}$ ٥

٣ د (س) = لو$_{س-٣}$ س

٤ د (س) = لو$_{٢-س}$ س

الحل

١ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن : ٤ − س > ٠ أى س < ٤

∴ مجال د =]−∞ ، ٤[

٢ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

١ − س > ٠ ، ١ − س ≠ ١ أى تحقق أن س < ١ ، س ≠ ٠

∴ مجال د =]−∞ ، ١[− {٠}

تذكر أن

الدالة د : د (س) = لو$_{أ}$ س معرفة لجميع قيم س ، أ التى تحقق أن : س > ٠ ، أ > ٠ ، أ ≠ ١



٣ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

$$\left.\begin{array}{l} س > ٠ \\ س - ٣ > ٠ \\ س - ٣ \neq ١ \end{array}\right\} \text{ أى تحقق أن } \left.\begin{array}{l} س > ٠ \\ س > ٣ \\ س \neq ٤ \end{array}\right]$$

∴ مجال د =]٣ ، ∞[− {٤}

٤ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

$$\left.\begin{array}{l} س > ٠ \\ ٣ - س > ٠ \\ ٣ - س \neq ١ \end{array}\right\} \text{ أى تحقق أن } \left.\begin{array}{l} س > ٠ \\ س < ٣ \\ س \neq ٢ \end{array}\right]$$

∴ مجال د =]٠ ، ٣[− {٢}

مثال ٩

استخدم منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{٢}$ س لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم حدد مجال ومدى واطراد كل دالة :

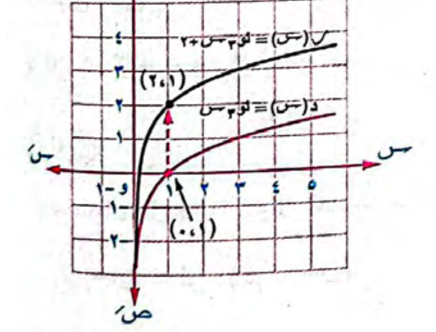
١ ر (س) = لو$_{٢}$ س + ٢

٢ ى (س) = لو$_{٢}$ (س − ١)

٣ ك (س) = − لو$_{٢}$ س

٤ ت (س) = لو$_{٢}$ (−س)

الحـــل



١ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د

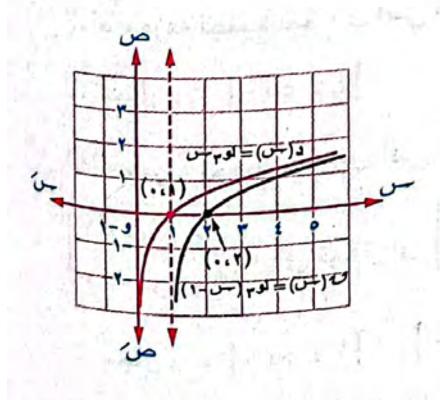
بإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة

فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

، المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تزايدية على مجالها.



٢ منحنى الدالة ى هو نفس منحنى الدالة د

بإزاحة أفقية قدرها وحدة واحدة

فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

، المجال =]١ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تزايدية على مجالها.



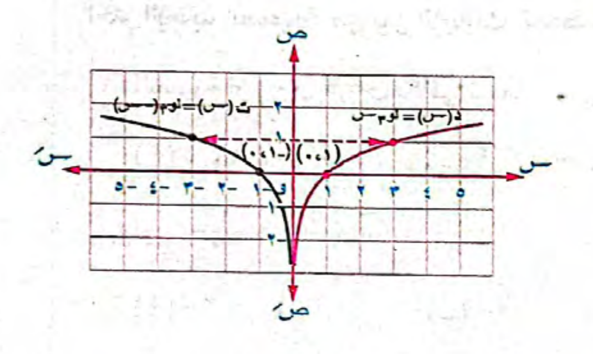
٣ منحنى الدالة ك هو نفس منحنى الدالة د

بالانعكاس فى محور السينات

، المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تناقصية على مجالها.



٤ منحنى الدالة ت هو نفس منحنى الدالة د

بالانعكاس فى محور الصادات

، المجال =]−∞ ، ٠[

، المدى = ح

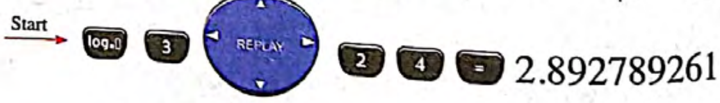
، الدالة تناقصية على مجالها.

استخدام الآلة الحاسبة

* مفتاح اللوغاريتم لأى أساس هو $\log_{\square}\square$ ، مفتاح اللوغاريتم المعتاد هو log

فمثلًا :

١ لإيجاد لو٣ ٢٤ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى



فيكون لو٣ ٢٤ ≃ ٢,٨٩٢٨ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

٢ لإيجاد لو ٨,٤ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى

Start → log 8 . 4 = 0.9242792861

فيكون لو ٨,٤ ≃ ٠,٩٢٤٣ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

٣ لإيجاد العدد س الذى يحقق لو س = ٠,٤٥٧٢ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى

Start → shift $10^{\square}$ log 0 . 4 5 7 2 = 2.865497276

∴ س ≃ ٢,٨٦٥٥ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.



تمارين 10

على الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى






من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الصورة لو$_{أ}$ س = ص تكافئ تماماً الصورة ....

(أ) لو$_{أ}$ ص = س　(ب) أ^{ص} = س　(جـ) أ^{س} = ص　(د) ص = أ س

(٢) لو$_{\frac{٥}{٢}}$ $\frac{١٦}{٦٢٥}$ = ...

(أ) −٢　(ب) −٤　(جـ) ٣　(د) ٥

(٣) لو$_{٣}$ لو$_{٢}$ ٨ = ...

(أ) −٢　(ب) −١　(جـ) ١　(د) ٤

(٤) إذا كان : لو ٠,٠١ = ٣ س + ١　فإن : س = ...

(أ) −٣　(ب) −١　(جـ) ٢　(د) ٧

(٥) إذا كان : لو$_{٣}$ س = ٢　فإن : س = ...

(أ) ٣　(ب) ٥　(جـ) ٨　(د) ٩

(٦) إذا كان : لو$_{\frac{١}{٣}}$ س = −١　فإن : س = ...

(أ) −٣　(ب) −١　(جـ) ١　(د) ٣

(٧) إذا كان : لو$_{٢}$ س = لو$_{٣}$ ٩　فإن : س = ...

(أ) ١　(ب) ٢　(جـ) ٣　(د) ٤

(٨) إذا كان : لو$_{٥}$ س = ٢　فإن : لو (٤٠ س) = ...

(أ) ٣　(ب) ٢٥　(جـ) ١٠٠　(د) ١٠٠٠

(٩) إذا كان : لو$_{٥}$ س = ٣　فإن : لو$_{٥}$ $\frac{س}{٥}$ = ...

(أ) ٢　(ب) ٣　(جـ) ٢٥　(د) ١٢٥

(١٠) إذا كان : لو (س + ١١) = ٢　فإن : س = ...

(أ) −٩　(ب) ٢٢　(جـ) ٨٩　(د) ٩١



(١١) إذا كان لو$_{٦}$ $\sqrt{س + ٤}$ = $\frac{١}{٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(١٢) مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ ٨١ = ٤ هي ....

(أ) {-٣} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، -٣} (د) {٩}

(١٣) مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ ٣ = -٢ في ح هي ....

(أ) {$\frac{١}{٩}$} (ب) {٩} (جـ) {$\sqrt{٣}$} (د) {$\frac{١}{\sqrt{٣}}$}

(١٤) إذا كان : لو$_{س}$ ٢٥ = ٢ فإن : س^{٣} + س^{٢} - س = ...

(أ) ٩٥ (ب) ١٠٥ (جـ) ١٤٥ (د) ١٥٥

(١٥) إذا كان : لو$_{٣}$ (٢س + ٣) = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٩ (د) ٤

(١٦) مجموعة حل المعادلة لو (س - ١) = صفر هي ....

(أ) {$\frac{١}{١٠}$} (ب) {١} (جـ) {٢} (د) {-١}

(١٧) مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ (٣س - ٢) = ٢ هي ....

(أ) {١ ، ٢} (ب) {١} (جـ) {٢} (د) $\emptyset$

(١٨) مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ (س + ٦) = ٢ في ح هي ....

(أ) {٣ ، -٢} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، ١} (د) {٦ ، ١}

(١٩) مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ ٦٤ س = ٤ في ح هي ....

(أ) {٢} (ب) {٤} (جـ) {٦} (د) {٠ ، ٤}

(٢٠) إذا كان : لو$_{|س + ٢|}$ ٦٤ = ٣ فإن : س $\in$ ....

(أ) {٦ ، -٢} (ب) {٢ ، -٦}

(جـ) {٠ ، -٨} (د) {٤ ، -٨}

(٢١) إذا كان : لو$_{٣}$ (٤ + لو$_{٢}$ س) = ٢ فإن : س = ...

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ١٢٨

(٢٢) إذا كان : لو$_{٣}$ لو$_{٥}$ لو$_{٢}$ س = صفر فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٣٢

(٢٣) إذا كان : د (س) = ٢^{س} فإن : لو$_{٢}$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) س (جـ) د (س) (د) ٢



(٢٤) إذا كانت : د (س) = ٣^س فإن : $د^{-1}$ (س) = ...

(أ) لو_س ٣ (ب) لو_٣ س (جـ) $س^{-3}$ (د) $٣^{س}$

(٢٥) د (س) = لو_٣ (س + ٤) فإن : $د^{-1}$ (٢) = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) لو_٣ ٦ (د) لو_٦ ٣

(٢٦) إذا كانت : د (س) = لو_٢ (س + ك) وكان $د^{-1}$ (٣) = ١ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٢٧) قيمة لو_٦ ٣٣ باستخدام الحاسبة هى .... تقريبًا.

(أ) ١,٩٥ (ب) ٠,٥١٢ (جـ) ٢,٢٩٧ (د) ٠,٧٤

(٢٨) قيمة س حيث لو س = ٠,٣٥ هى .... مقربة لأقرب جزء من ألف.

(أ) ٣,٥٣٤ (ب) ٢,٨٣٩ (جـ) ٢,٢٣٩ (د) ± ٢,٢٣٩

(٢٩) منحنى الدالة د : د (س) = لو_٢ (س + ١) يقطع محور السينات فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (١ ، ١)

(٣٠) منحنى الدالة د : د (س) = لو_٢ (٣ − س) يقطع محور السينات فى النقطة ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (٠ ، ١) (د) (٣ ، ٠)

(٣١) مدى الدالة د : د (س) = لو_٢ س هو ....

(أ) $ح^{+}$ (ب) $ح^{-}$ (جـ) ح (د) $ح^{*}$

(٣٢) الدالة د : د (س) = لو_أ س متناقصة لكل أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠[(جـ)]٠ ، ١[(د)]١ ، ∞[

(٣٣) إذا كانت الدالة د : د (س) = لو_{$\frac{1}{2}$} س فإن : د ($\frac{1}{4}$) + د (٨) = ...

(أ) −٣ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ٥

(٣٤) إذا كان : لو_{$\frac{1}{2}$} د (س) = س فإن : ٨ د (٢) + د (−٣) + د (٠) = ...

(أ) $\frac{1}{16}$ (ب) $\frac{1}{8}$ (جـ) ١١ (د) ٢٢

(٣٥) 📖 إذا كان المنحنى ص = لو_٤ (١ − أ س) يمر بالنقطة ($\frac{1}{4}$ ، −$\frac{1}{2}$) فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨



(٣٦) إذا كان منحنى الدالة د حيث د (س) = لو$_{م}$ س يمر بالنقطة (٨ ، ٣) فإن : د (٤) = ...

(أ) ١　　(ب) ٢　　(جـ) $\frac{١}{٤}$　　(د) −٢

(٣٧) مجال الدالة د حيث د (س) = لو$_{(١ - س)}$ ٣ هو ....

(أ)]−∞ ، ٠[∪]٠ ، ١[　　(ب)]−∞ ، ١[

(جـ)]١ ، ∞[　　(د)]−١ ، ١[

(٣٨) مجال الدالة د : د (س) = لو$_{١ - س}$ س هو ....

(أ) س > ٠　　(ب) س < ١

(جـ) ٠ < س < ١　　(د) ٠ ≤ س ≤ ١

(٣٩) مجال الدالة د حيث د (س) = لو$_{س}$ (٥ − س) هو ....

(أ)]٠ ، ٥[− {١}　　(ب) [٠ ، ٥]　　(جـ)]٠ ، ٥[　　(د)]−∞ ، ٥[

(٤٠) إذا كان م ، س ، ص ∈ ح$^{+}$ ، م ≠ ١ وكان : لو$_{م}$ س = لو$_{م}$ ص　فإن : ....

(أ) ص = س　　(ب) ص = − س　　(جـ) ص = م^{س}　　(د) س = م^{ص}

(٤١) إذا كان م ، س ، ص ∈ ح$^{+}$ ، م ≠ ١ وكان لو$_{م}$ س = لو$_{م}$ ص

فإن : س = ص لأن د (س) = لو$_{م}$ س هي دالة ....

(أ) فردية.　　(ب) زوجية.　　(جـ) تزايدية.　　(د) أحادية.

(٤٢) إذا كان : د (س) = لو$_{م}$ س ، م ∈]٠ ، ١[فإن العبارات الآتية صحيحة ما عدا ....

(أ) إذا كان : لو$_{م}$ س = لو$_{م}$ ص　فإن : س = ص

(ب) الدالة د تزايدية على مجالها.

(جـ) إذا كان : لو$_{م}$ س > لو$_{م}$ ص　فإن : س > ص

(د) الدالة د ليست فردية ولا زوجية.

(٤٣) إذا كان : لو$_{م}$ س > ٠ حيث م > ١　فإن : س ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[　　(ب)]١ ، ∞[　　(جـ)]−∞ ، ٠[　　(د)]٠ ، ∞[

(٤٤) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{م}$ س

فإن : ب = ...

(أ) م^{٢}　　(ب) م + ٣

(جـ) م^{٣}　　(د) ٣ م

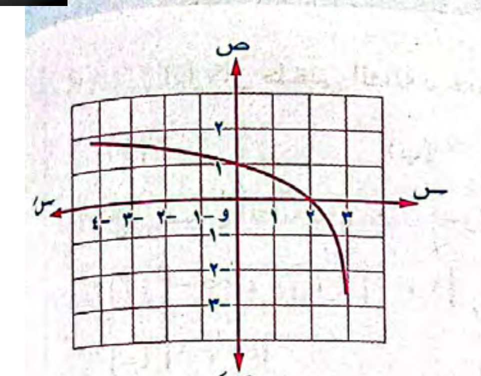
(٤٥) الشكل المقابل يمثل الدالة ....

(أ) ص = $٣^{س} - ١$

(ب) ص = $٣^{س} + ١$

(جـ) ص = $لو_{٣} (٢ - س)$

(د) ص = $لو_{٣} (٣ - س)$



ثانيًا الأسئلة المقالية

١ عبر عن كل من الصور اللوغاريتمية الآتية بالصورة الأسية المكافئة لها :

(١) $لو_{٢} ١٢٨ = ٧$ (٢) $لو_{\frac{٢}{٥}} \frac{٤}{٢٥} = ٢$ (٣) $لو_{٢} ٤ \sqrt{٢} = \frac{٥}{٢}$

٢ عبر عن كل من الصور الأسية الآتية بالصورة اللوغاريتمية المكافئة لها :

(١) $٥^{صفر} = ١$ (٢) $١٠^{-٤} = ٠,٠٠٠١$ (٣) $٥^{-٣} = \frac{١}{١٢٥}$

٣ أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) $لو_{٢} ١٦$ «٤» (٢) $لو_{٨} ١$ «صفر»

(٣) $لو ٠,٠٠٠٠١$ «−٥» (٤) $لو_{\frac{١}{٢}} ١٢٨$ «−٧»

(٥) $لو_{٢} \frac{١}{٨}$ «−٣» (٦) $لو_{\sqrt{٢}} ٨ \sqrt{٢}$ «٧»

(٧) $لو_{٣} \sqrt[٤]{٢٧}$ «$\frac{٣}{٤}$» (٨) $لو_{٢}$ حا ٤٥° «$-\frac{١}{٢}$»

٤ حل فى ح كلاً من المعادلات الآتية :

(١) $لو_{٢} س = ٧$ «١٢٨» (٢) $لو_{٥} س = -٢$ «$\frac{١}{٢٥}$»

(٣) $لو_{٣} س^{٢} = ٤$ «± ٩» (٤) $لو_{٨١} س = \frac{٣}{٤}$ «٢٧»

(٥) $لو_{٢} س^{-١} = -٥$ «٣٢» (٦) $لو_{٢} (لو_{٣} س) = ١$ «٩»

(٧) $لو_{٣} (٢ س - ٥) = ٠$ «٣» (٨) $لو_{٨} \sqrt[٣]{س^{٢} + ٤٨} = \frac{٢}{٣}$ «± ٤»

(٩) $لو_{٣} لو_{٢} (س^{٢} - ٢ س) = ١$ «٤ أ −٢» (١٠) $لو_{٥} |٢ س + ١| = ١$ «٢ أ −٣»

(١١) $لو_{٢} س (س + ٦) = ٤$ «٢ أ −٨» (١٢) $لو_{٣} (س^{٢} - ٢ س) = ١$ «٣ أ −١»

(١٣) $(لو_{٣} س)^{٢} - ٩ لو_{٣} س + ٢٠ = ٠$ «٨١ أ ٢٤٣» (١٤) $لو_{٢} (٣^{س} - ٣^{س - ٢}) = ٣$ «٢»

(١٥) $٣^{لو_{٤} (س + ١,٢٥)} = \frac{١}{٣}$ «−١» (١٦) $|لو_{١٠} س - ٢| = ٢$ «$١٠^{٤}$ أ ١»





٥ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① لو$_{س}$ ١٢٥ = ٣ «{٥}»

② 📖 لو$_{س}$ ٢ = ٥ «{$\sqrt[٥]{٢}$}»

③ 📖 لو$_{س}$ ٣ = −٢ «{$\frac{١}{\sqrt{٣}}$}»

④ لو$_{س}$ ٠,٠٠١ = $\frac{-٣}{٤}$ «{١٠٠٠٠}»

⑤ لو$_{-س}$ ٨١ = ٤ «{−٣}»

⑥ لو$_{س-١}$ ٢٧ = ٣ «{٤}»

⑦ لو$_{س-١}$ (٧ − س) = ٢ «{٣}»

⑧ لو$_{\frac{٢}{س}}$ ٦٤ = −٣ «{٨}»

⑨ 📖 لو$_{س}$ ٥ س = ٢ «{٥}»

⑩ لو$_{س}$ س^{٦} = ٥ س «{$\frac{٦}{٥}$}»

⑪ لو$_{٩}$ لو$_{٣}$ لو$_{س}$ ٢٧ = ٠ «{٣}»

⑫ لو$_{س}$ (س^{٢} − ١٢) = ١ «{٤}»

⑬ لو$_{س}$ $\left(\sqrt{س - ٢} + ٢\right)$ = ١ «{٣ ، ٢}»

⑭ (لو$_{٣}$ س)^{٢} + ١٥ = ٨ لو$_{٣}$ س «{٢٧ ، ٢٤٣}»

---

٦ أوجد قيمة س فى كل مما يأتى :

① لو$_{٤}$ ٨ $\sqrt{٢}$ = س «$\frac{٧}{٤}$»

② لو$_{\sqrt{٥}}$ ٦٢٥ $\sqrt{٥}$ = س^{٢} «± ٣»

③ لو$_{٠,٣}$ ٠,٠٩ = س$^{-٢}$ «± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$»

④ 📖 لو$_{٢}$ (٢^{س} − ٤) + س − ٥ = ٠ «٣»

⑤ 📖 لو$_{٤}$ [١٣ + لو$_{٢}$ (س − ١)] = ٢ «٩»

⑥ 📖 لو$_{٣}$ $\left(\frac{س^{٢}}{٢ س - ٣}\right)$ = ١ «٣»

---

٧ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى مقربًا لأربعة أرقام عشرية :

① 📖 لو ٣,١٥ ② لو$_{٢}$ ٢٧ ③ ٤ لو ٧ − ٥ لو ١٣

---

٨ باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة س فى كل مما يأتى مقربًا لأربعة أرقام عشرية :

① لو س = ٠,٢٣٤٥ ② لو س = ١,٤١٢ ③ لو س = −٠,٣

---

٩ أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية فى ح × ح :

① س^{ص} = ٥ س − ٤ ، لو$_{س}$ ١٦ = ص «{(٤ ، ٢)}»

② لو$_{س}$ لو$_{٣}$ لو$_{س}$ ص = ٠ ، لو$_{ص}$ ٩ = ١ «{(٣ ، ٩)}»

---

١٠ إذا كان : لو$_{١٦}$ ٤٩ = أ ، لو$_{٧}$ ٢,٥ = ب أثبت أن : ٤$^{أب+١}$ = ١٠

---

١١ عين مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

① 📖 د (س) = لو$_{٣}$ (٢ س + ١)

② 📖 د (س) = ٢ لو س

③ د (س) = لو$_{س}$ س

④ د (س) = لو$_{س-٢}$ س



⑤ د (س) = لو$_{٢ - س}$ س

⑥ 📖 د (س) = لو$_{(٥ - س)}$ (س − ٣)

⑦ 📖 د (س) = لو$_{س - ٢}$ س^{٢}

⑧ د (س) = لو$_{س + ٢}$ (٣ س + ١)

⑨ د (س) = لو$_{٤}$ (٣ − س) (س + ١)

⑩ د (س) = لو$_{س}$ (٣ − س) (س + ١)

١٢ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{م}$ س يمر بالنقطة (٨١ ، ٤)

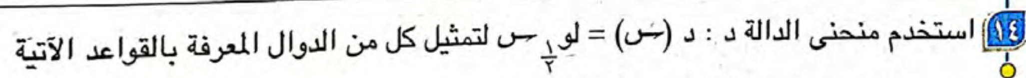
أوجد قيمة م ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∋ [$\frac{١}{٩}$ ، ٩] ومن الرسم :

① استنتج المجال والمدى والاطراد ونقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات.

② أوجد قيمة تقريبية للعدد لو$_{٣}$ ٥

١٣ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{م}$ س يمر بالنقطة ($\frac{١}{٨}$ ، ٣) أوجد قيمة م

ثم ارسم منحنى الدالة د متخذًا س ∋ [$\frac{١}{٤}$ ، ٤] ومن الرسم استنتج المدى والاطراد ونقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات ثم أوجد قيمة تقريبية للعدد لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥



١٤ استخدم منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ، ومن الرسم حدد مجال ومدى واطراد كل دالة :

① ر (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س + ٢

② 📖 ق (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ (س + ١)

③ هـ (س) = − لو$_{\frac{١}{٢}}$ س

١٥ استخدم منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{٢}$ س لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ، ومن الرسم حدد مجال ومدى واطراد كل دالة :

① ق (س) = لو$_{٢}$ (س − ٢)

② ت (س) = لو$_{٢}$ س + ١

③ هـ (س) = − لو$_{٢}$ س

④ ر (س) = لو$_{٢}$ (− س)

١٦ 📖 ارسم فى شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر ، د حيث ر (س) = لو$_{٢}$ س ، د (س) = ٦ − س ثم استخدم ذلك فى إيجاد مجموعة حل المعادلة : لو$_{٢}$ س = ٦ − س «{٤}»

١٧ ارسم فى شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر ، د حيث ر (س) = لو$_{٣}$ س ، د (س) = ٤ − س ثم استخدم ذلك فى إيجاد مجموعة حل المعادلة : لو$_{٣}$ س = ٤ − س «{٣}»



مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = لو$_{أ}$ (٢ س + ٤) وكانت : د$^{-1}$ (٥) = ١٤ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

② إذا كانت د : ح$^{+}$ ⟵ ح وكان : د (س) = لو$_{٤}$ س وكان : د$^{-1}$ (أ + ٣) = ٣٢

فإن : أ = ...

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) −١ (د) $-\frac{1}{2}$

③ إذا كان : د (س) = لو$_{٣}$ (س + ١) ، ر (س) = ٥ + لو$_{٣}$ (س − ١)

فإن : (د ∘ ر) (١٠) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

④ إذا كان : لو (س − ٥) > صفر فإن : ....

(أ) س > ٥ (ب) س > ٦ (جـ) س > ١ (د) س < ٥

⑤ مجموعة حل المعادلة : لو$_{٣}$ لو$_{٢}$ | | س − ١ | + ٥ | = ١ فى ح هى ....

(أ) {٢ ، ٤} (ب) {٢ ، −٢ ، ٤ ، −٤}

(جـ) {−٢ ، ٤} (د) {٤}

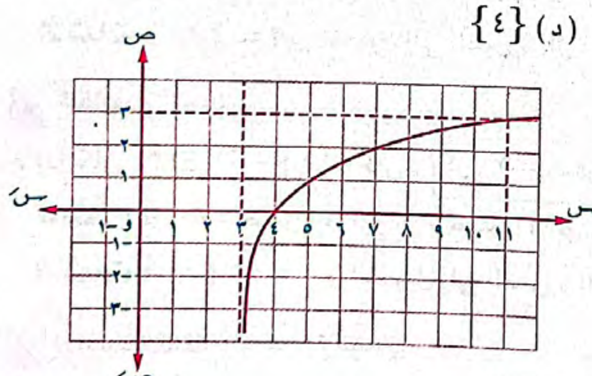
⑥ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

د : د (س) = لو$_{م}$ (س + ب)

فإن : د (٧) + د$^{-1}$ (٢) = ...

(أ) ٩ (ب) ٨

(جـ) ٧ (د) ٦



⑦ مجال الدالة د : د (س) = لو | س^{٢} − ٩ | هو ....

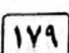
(أ) ح* (ب) ح − {٣ ، −٣}

(جـ) ح − [−٣ ، ٣] (د)]−٣ ، ٣[

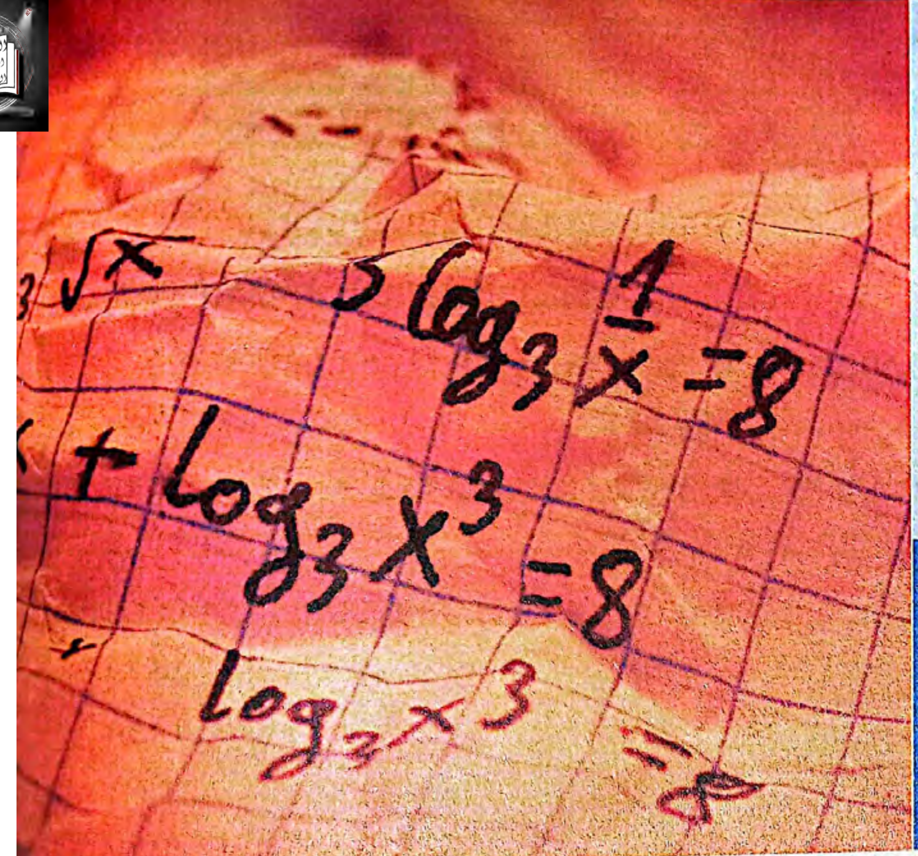
⑧ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\text{لو}_{٣} (س + ٣)}{س^{٢} + ٣ س + ٢}$ هو ....

(أ) ح − {−٢ ، −١} (ب)]−٢ ، ∞[

(جـ) ح − {−٢ ، −١ ، −٣} (د)]−٣ ، ∞[− {−١ ، −٢}







الدرس

5

بعض خواص اللوغاريتمات

الخاصية الأولى

* إذا كان : $ا \in ح^+ - \{1\}$ فإن : $لو_ا ا = 1$

فمثلاً : $لو_7 7 = 1$ ، $لو_5 5 = 1$ ، $لو_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 1$

الإثبات : $\because ا^1 = ا$ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية $\therefore لو_ا ا = 1$

الخاصية الثانية

* إذا كان : $ا \in ح^+ - \{1\}$ فإن : $لو_ا 1 = صفر$

فمثلاً : $لو_3 1 = صفر$ ، $لو_5 1 = صفر$ ، $لو_{\sqrt{7}} 1 = صفر$

الإثبات : $\because ا^{صفر} = 1$ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية $\therefore لو_ا 1 = صفر$

الخاصية الثالثة خاصية الضرب

* إذا كان : $س ، ص \in ح^+ ، ا \in ح^+ - \{1\}$ فإن : $لو_ا س ص = لو_ا س + لو_ا ص$

فمثلاً : $لو_3 (2 \times 5) = لو_3 2 + لو_3 5$

والعكس صحيح : $لو_5 2 + لو_5 11 = لو_5 (2 \times 11) = لو_5 22$

الإثبات : بوضع $لو_ا س = ب$ ، $لو_ا ص = حـ$

$\therefore س = ا^ب ، ص = ا^{حـ}$ $\therefore س ص = ا^ب \times ا^{حـ}$

$\therefore س ص = ا^{ب + حـ}$ وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية

$\therefore لو_ا س ص = ب + حـ$ $\therefore لو_ا س ص = لو_ا س + لو_ا ص$

نتيجة : إذا كانت : $س_1 ، س_2 ، س_3 ، \ldots\ldots ، س_ن \in ح^+ ، ا \in ح^+ - \{1\}$

فإن : $لو_ا (س_1 \times س_2 \times س_3 \times \ldots\ldots \times س_ن) = لو_ا س_1 + لو_ا س_2 + \ldots\ldots + لو_ا س_ن$



فمثلًا : $لو_٢ (٣ × ٥ × ٧) = لو_٢ ٣ + لو_٢ ٥ + لو_٢ ٧$

والعكس صحيح : $لو_م ٧٥ + لو_م \frac{٤}{٩} + لو_م ٠,٠٦ = لو_م \left(٧٥ × \frac{٤}{٩} × \frac{٦}{١٠٠}\right) = لو_م ٢$

تنبيه هام

تذكر جيدًا أن : $لو_م (س + ص) \neq لو_م س + لو_م ص$

كما أن : $لو_م (س × ص) \neq لو_م س × لو_م ص$

الخاصية الرابعة خاصية القسمة

• إذا كان : س ، ص ∈ $ح^+$ ، م ∈ $ح^+ - \{١\}$ فإن : $لو_م \frac{س}{ص} = لو_م س - لو_م ص$

فمثلًا : $لو_٥ \frac{٢}{٣} = لو_٥ ٢ - لو_٥ ٣$ والعكس صحيح : $لو_٥ ١١ - لو_٥ ٢ = لو_٥ \frac{١١}{٢}$

الإثبات : بوضع $لو_م س = ب$ ، $لو_م ص = ح$ ∴ $س = م^ب$ ، $ص = م^ح$

∴ $\frac{س}{ص} = \frac{م^ب}{م^ح} = م^{ب - ح}$

وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية ∴ $لو_م \frac{س}{ص} = ب - ح$

أي أن $لو_م \frac{س}{ص} = لو_م س - لو_م ص$

نتيجة : $لو_م \frac{س ص}{ع ل} = لو_م س + لو_م ص - لو_م ع - لو_م ل$

تنبيه هام

تذكر جيدًا أن : $لو_م (س - ص) \neq لو_م س - لو_م ص$

كما أن : $لو_م \left(\frac{س}{ص}\right) \neq لو_م س ÷ لو_م ص$

الخاصية الخامسة خاصية لوغاريتم القوة

• إذا كان : س ∈ $ح^+$ ، م ∈ $ح^+ - \{١\}$ ، ن ∈ ح فإن : $لو_م س^ن = ن لو_م س$

فمثلًا : $لو_٢ ١٢٥ = لو_٢ ٥^٣ = ٣ لو_٢ ٥$ والعكس صحيح : $٧ لو_٥ ٢ = لو_٥ ٢^٧ = لو_٥ ١٢٨$

الإثبات : $لو_م س^ن = لو_م (س × س × س × ...$ إلى ن حدًا)

$= لو_م س + لو_م س + ...$ إلى ن حدًا

$= ن لو_م س$

الخاصية السادسة خاصية تغيير الأساس

• إذا كان : س ∈ $ح^+$ ، ص ∈ $ح^+ - \{١\}$ ، م ∈ $ح^+ - \{١\}$ فإن : $لو_ص س = \frac{لو_م س}{لو_م ص}$

فمثلًا : $لو_٥ ٧ = \frac{لو ٧}{لو ٥}$ ، $لو_٣ ٢ = \frac{لو_{١١} ٢}{لو_{١١} ٣}$



الإثبات : بوضع $لو_{ص}$ س = ع ∴ $ص^{ع}$ = س بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس م

∴ ع $لو_{م}$ ص = $لو_{م}$ س ∴ ع = $\frac{لو_{م} س}{لو_{م} ص}$

أى أن $لو_{ص}$ س = $\frac{لو_{م} س}{لو_{م} ص}$

الخاصية السابعة — خاصية المعكوس الضربى

* إذا كان : س ، ص ∈ $ح^{+}$ − {١} فإن : $لو_{ص}$ س = $\frac{١}{لو_{س} ص}$

فمثلًا : $لو_{٧}$ ٥ = $\frac{١}{لو_{٥} ٧}$ ومنها $لو_{٧}$ ٥ × $لو_{٥}$ ٧ = ١

الإثبات : ∵ $لو_{ص}$ س = $\frac{لو س}{لو ص}$ ، $لو_{س}$ ص = $\frac{لو ص}{لو س}$

∴ $لو_{ص}$ س × $لو_{س}$ ص = ١ ∴ $لو_{ص}$ س = $\frac{١}{لو_{س} ص}$

مثال ①

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتى :

① $لو_{٣}$ ١٥ + $لو_{٣}$ ٦ − $لو_{٣}$ ١٠

② $لو_{٥}$ ١٠٠ − ٣ $لو_{٥}$ ٢ − $لو_{٥}$ ١٨ + $لو_{٥}$ ٣٦

③ $لو_{٥}$ $\frac{٣}{٥}$ + ٢ $لو_{٥}$ $\frac{١٥}{٢}$ − $لو_{٥}$ $\frac{٥}{٣٦}$ + $لو_{٥}$ $\frac{٥}{٢٤٣}$

④ $لو_{٢}$ ٧ × $لو_{٧}$ ١١ × $لو_{١١}$ ٩ × $لو_{٣}$ ٢

⑤ $\frac{لو_{٣} ٢٤٣ - لو_{٣} ٣٢}{لو_{٣} ٢٧ - لو_{٣} ٨}$

الحل

① المقدار = $لو_{٣}$ $\frac{١٥ × ٦}{١٠}$ = $لو_{٣}$ ٩ = $لو_{٣}$ $٣^{٢}$ = ٢ $لو_{٣}$ ٣ = ٢ × ١ = ٢

② المقدار = $لو_{٥}$ ١٠٠ − $لو_{٥}$ $٢^{٣}$ − $لو_{٥}$ ١٨ + $لو_{٥}$ ٣٦

= $لو_{٥}$ $\frac{١٠٠ × ٣٦}{٨ × ١٨}$ = $لو_{٥}$ ٢٥ = $لو_{٥}$ $٥^{٢}$ = ٢ $لو_{٥}$ ٥ = ٢ × ١ = ٢

③ المقدار = $لو_{٥}$ $\frac{٣}{٥}$ + $لو_{٥}$ $(\frac{١٥}{٢})^{٢}$ − $لو_{٥}$ $\frac{٥}{٣٦}$ + $لو_{٥}$ $\frac{٥}{٢٤٣}$

= $لو_{٥}$ $\frac{\frac{٣}{٥} × \frac{١٥}{٢} × \frac{١٥}{٢} × \frac{٥}{٢٤٣}}{\frac{٥}{٣٦}}$ = $لو_{٥}$ $\frac{٣ × ١٥ × ١٥ × ٥ × ٣٦}{٥ × ٢ × ٢ × ٢٤٣ × ٥}$ = $لو_{٥}$ ٥ = ١

④ المقدار = $\frac{لو ٧}{لو ٢}$ × $\frac{لو ١١}{لو ٧}$ × $\frac{لو ٩}{لو ١١}$ × $\frac{لو ٢}{لو ٣}$ = $\frac{لو ٩}{لو ٣}$ = $\frac{لو ٣^{٢}}{لو ٣}$ = $\frac{٢ لو ٣}{لو ٣}$ = ٢

⑤ المقدار = $\frac{لو_{م} ٣^{٥} - لو_{م} ٢^{٥}}{لو_{م} ٣^{٣} - لو_{م} ٢^{٣}}$ = $\frac{٥ لو_{م} ٣ - ٥ لو_{م} ٢}{٣ لو_{م} ٣ - ٣ لو_{م} ٢}$ = $\frac{٥ (لو_{م} ٣ - لو_{م} ٢)}{٣ (لو_{م} ٣ - لو_{م} ٢)}$ = $\frac{٥}{٣}$



مثال ٢

بدون استخدام حاسبة الجيب أثبت كلاً مما يأتى :

[١] ٣ لو ٥ + ٢ لو ٦ − لو ٩ + لو ٢,٠ = $لو_{٥}$ ٢٥

[٢] $\frac{لو ٣٠ - لو ٦ + لو ٥}{لو ١٢ - لو ٣ + لو ٢٥}$ = ١ − لو ٢

الحل

[١] الطرف الأيمن = لو $٥^{٣}$ + لو $٦^{٢}$ − لو ٩ + لو $\frac{٢}{١٠}$

= لو $\frac{٥^{٣} \times ٦^{٢} \times \frac{٢}{١٠}}{٩}$ = لو $\frac{١٢٥ \times ٣٦ \times ٢}{٩ \times ١٠}$

= لو ١٠٠ = لو $١٠^{٢}$ = ٢ لو ١٠ = ٢

، الطرف الأيسر = $لو_{٥}$ $٥^{٢}$ = ٢ $لو_{٥}$ ٥ = ٢ ∴ الطرفان متساويان.

[٢] الطرف الأيمن = $\frac{لو \frac{٣٠ \times ٥}{٦}}{لو \frac{١٢ \times ٢٥}{٣}}$ = $\frac{لو ٢٥}{لو ١٠٠}$ = $\frac{لو ٥^{٢}}{لو ١٠^{٢}}$ = $\frac{٢ لو ٥}{٢ لو ١٠}$ = لو ٥

، الطرف الأيسر = ١ − لو ٢ = لو ١٠ − لو ٢ = لو $\frac{١٠}{٢}$ = لو ٥ ∴ الطرفان متساويان.

مثال ٣

إذا كان : $لو_{٣}$ ٧ ≃ ١,٧٧١

أوجد قيمة كل مما يأتى فى أبسط صورة ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة :

[١] $لو_{٣}$ ٢١ [٢] $لو_{٣}$ ٦٣ [٣] $لو_{٣}$ $\frac{٧}{٩}$

الحل

[١] $لو_{٣}$ ٢١ = $لو_{٣}$ (٣ × ٧) = $لو_{٣}$ ٣ + $لو_{٣}$ ٧ = ١ + ١,٧٧١ = ٢,٧٧١

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... Start → log▫ 3 REPLAY 2 1 =)

[٢] $لو_{٣}$ ٦٣ = $لو_{٣}$ (٩ × ٧) = $لو_{٣}$ ٩ + $لو_{٣}$ ٧ = $لو_{٣}$ $٣^{٢}$ + $لو_{٣}$ ٧ = ٢ $لو_{٣}$ ٣ + $لو_{٣}$ ٧

≃ ٢ + ١,٧٧١ = ٣,٧٧١

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... Start → log▫ 3 REPLAY 6 3 =)

[٣] $لو_{٣}$ $\frac{٧}{٩}$ = $لو_{٣}$ ٧ − $لو_{٣}$ ٩ = $لو_{٣}$ ٧ − $لو_{٣}$ $٣^{٢}$ = $لو_{٣}$ ٧ − ٢ $لو_{٣}$ ٣ = ($لو_{٣}$ ٧) − ٢

= ١,٧٧١ − ٢ = −٠,٢٢٩

(التحقق باستخدام الآلة الحاسبة ... Start → log▫ 3 REPLAY 7 ÷ REPLAY 9 =)



مثال ٤

أوجد فى أبسط صورة قيمة كل مما يأتى :

١ لو$_٢$ $\sqrt[٧]{٣٢}$

٢ $\frac{١}{لو_{س}\ س\ ص\ ع} + \frac{١}{لو_{ص}\ س\ ص\ ع} + \frac{١}{لو_{ع}\ س\ ص\ ع}$

الحل

١ لو$_٢$ $\sqrt[٧]{٣٢}$ = لو$_٢$ $\sqrt[٧]{(٢^٥)}$ = لو$_٢$ $٢^{\frac{٥}{٧}}$ = $\frac{٥}{٧}$ لو$_٢$ ٢ = $\frac{٥}{٧}$

٢ $\frac{١}{لو_{س}\ س\ ص\ ع} + \frac{١}{لو_{ص}\ س\ ص\ ع} + \frac{١}{لو_{ع}\ س\ ص\ ع}$

= لو$_{س\ ص\ ع}$ س + لو$_{س\ ص\ ع}$ ص + لو$_{س\ ص\ ع}$ ع

= لو$_{س\ ص\ ع}$ س ص ع = ١

مثال ٥

باستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين فى كل مما يأتى :

١ $٥^{س} = ١٧$ | ٢ $٢^{س - ١} = ٧$

٣ $٥^{س + ١} = ٢^{٤س - ٣}$ | ٤ $٥^{س - ٢} = ٣ \times ٤^{س + ١}$

٥ $٣^{٢س} - ١٤ \times ٣^{س} + ٤٥ = ٠$

الحل

١ ∵ $٥^{س} = ١٧$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو $٥^{س}$ = لو ١٧ ∴ س لو ٥ = لو ١٧

∴ س = $\frac{لو\ ١٧}{لو\ ٥}$ وباستخدام حاسبة الجيب ∴ س ≃ ١,٧٦

٢ ∵ $٢^{س - ١} = ٧$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو $٢^{س - ١}$ = لو ٧ ∴ (س − ١) لو ٢ = لو ٧

∴ س لو ٢ − لو ٢ = لو ٧ ∴ س = $\frac{لو\ ٧ + لو\ ٢}{لو\ ٢}$ ≃ ٣,٨١

٣ ∵ $٥^{س + ١} = ٢^{٤س - ٣}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو $٥^{س + ١}$ = لو $٢^{٤س - ٣}$ ∴ (س + ١) لو ٥ = (٤ س − ٣) لو ٢

∴ س لو ٥ + لو ٥ = ٤ س لو ٢ − ٣ لو ٢ ∴ ٤ س لو ٢ − س لو ٥ = ٣ لو ٢ + لو ٥

∴ س (٤ لو ٢ − لو ٥) = ٣ لو ٢ + لو ٥ ∴ س = $\frac{٣\ لو\ ٢ + لو\ ٥}{٤\ لو\ ٢ - لو\ ٥}$ ≃ ٣,١٧



٤ ∵ $5^{س-2} = 3 \times 4^{س+1}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ (س − ٢) لو ٥ = لو ٣ + (س + ١) لو ٤

∴ س لو ٥ − ٢ لو ٥ = لو ٣ + س لو ٤ + لو ٤

∴ س لو ٥ − س لو ٤ = لو ٣ + لو ٤ + ٢ لو ٥

∴ س (لو ٥ − لو ٤) = لو ٣ + لو ٤ + ٢ لو ٥

∴ س = $\frac{\text{لو } 3 + \text{لو } 4 + 2\text{ لو } 5}{\text{لو } 5 - \text{لو } 4} \simeq 25.56$

حل آخر

∵ $5^{س-2} = 3 \times 4^{س+1}$

∴ $\frac{5^{س}}{5^{2}} = 3 \times 4^{س} \times 4$

∴ $\frac{5^{س}}{4^{س}} = 3 \times 4 \times 5^{2}$

∴ $\left(\frac{5}{4}\right)^{س} = 300$

∴ س = $\frac{\text{لو } 300}{\text{لو } \frac{5}{4}} \simeq 25.56$

٥ ∵ $3^{2س} - 14 \times 3^{س} + 45 = 0$ وبالتحليل ∴ $(3^{س} - 9)(3^{س} - 5) = 0$

∴ إما $3^{س} - 9 = 0$

∴ $3^{س} = 9$

∴ $3^{س} = 3^{2}$

∴ س = ٢

أو، $3^{س} - 5 = 0$

∴ $3^{س} = 5$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ س لو ٣ = لو ٥

∴ س = $\frac{\text{لو } 5}{\text{لو } 3} \simeq 1.46$

ملاحظة هامة عند حل المعادلة اللوغاريتمية

إذا كانت س ∈ ح*، م عددًا زوجيًا لا يساوى الصفر، ا ∈ $ح^{+} - \{1\}$

فإن: $\text{لو}_{ا}\, س^{م} = م\ \text{لو}_{ا} |س|$ **فمثلًا:** $\text{لو}_{2}\, س^{4} = 4\ \text{لو}_{2} |س|$

مثال ٦

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

١ ٢ لو س − لو (س + ٢) = ٠

٢ لو $س^{2}$ = لو ٤ + لو ٩

٣ $\text{لو}_{2}\, س + \text{لو}_{2}\, (س - 2) = 3$

٤ لو س + لو (س + ٢) = لو (س + ٦)

٥ لو $\sqrt[3]{2س - 1}$ + لو $\sqrt[3]{س - 2}$ = لو ٣٠ − ١

٦ $\frac{\text{لو } 49 - (\text{لو } 7)^{2}}{\text{لو } 0.07}$ = لو س

الحل

١ ∵ ٢ لو س − لو (س + ٢) = ٠

∴ لو $س^{2}$ = لو (س + ٢)

∴ $س^{2}$ = س + ٢ ∴ $س^{2} - س - 2 = 0$

∴ (س − ٢) (س + ١) = ٠

∴ إما س = ٢ (تحقق) أ، س = −١ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٢}

تذكر أن

١ الدالة اللوغاريتمية أحادية أى أنه إذا كان $\text{لو}_{م}\, س = \text{لو}_{م}\, ص$ فإن س = ص

٢ نعوض بالقيم التى نحصل عليها فى المعادلة الأصلية ويكون الحل هو القيمة التى تحقق هذه المعادلة حيث إنه لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب.



٢ ∵ لو س^{٢} = لو ٤ + لو ٩

∴ لو س^{٢} = لو ٣٦

∴ س = ± ٦ (تحقق)

∴ لو س^{٢} = لو (٤ × ٩)

∴ س^{٢} = ٣٦

∴ مجموعة الحل = {٦ ، −٦}

حل آخر : ∵ لو س^{٢} = لو ٤ + لو ٩

∴ لو س^{٢} = لو ٣٦ = لو ٦^{٢}

∴ |س| = ٦

∴ مجموعة الحل = {٦ ، −٦}

∴ لو س^{٢} = لو (٤ × ٩)

∴ ٢ لو |س| = ٢ لو ٦

∴ س = ± ٦ (تحقق)

٣ ∵ لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س − ٢) = ٣

∴ س^{٢} − ٢ س = ٢^{٣} = ٨

∴ (س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ إما س = ٤ (تحقق) أ، س = −٢ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٤}

∴ لو$_{٢}$ س (س − ٢) = ٣

∴ س^{٢} − ٢ س − ٨ = ٠

٤ ∵ لو س + لو (س + ٢) = لو (س + ٦)

∴ س (س + ٢) = س + ٦

∴ س^{٢} + س − ٦ = ٠

∴ إما س = −٣ (مرفوض) أ، س = ٢ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٢}

∴ لو س (س + ٢) = لو (س + ٦)

∴ س^{٢} + ٢ س − س − ٦ = ٠

∴ (س + ٣) (س − ٢) = ٠

٥ ∵ لو $\sqrt[٣]{٢س − ١}$ + لو $\sqrt[٣]{س − ٢}$ = لو ٣٠ − ١

∴ لو $\sqrt[٣]{(٢س − ١) (س − ٢)}$ = لو ٣٠ − لو ١٠

∴ لو $\sqrt[٣]{٢س^{٢} − ٥س + ٢}$ = لو ٣

∴ $\sqrt[٣]{٢س^{٢} − ٥س + ٢}$ = ٣ وبرفع الطرفين للقوة ٣

∴ ٢ س^{٢} − ٥ س + ٢ = ٢٧ ∴ ٢ س^{٢} − ٥ س − ٢٥ = ٠

∴ (٢ س + ٥) (س − ٥) = ٠

∴ إما س = $\frac{-٥}{٢}$ (مرفوض) أ، س = ٥ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٥}

تذكر! لو ١٠ = ١



٦ ∵ $\frac{\text{لو } ٤٩ - (\text{لو } ٧)^{٢}}{\text{لو } ٠,٠٧}$ = لو س

∴ $\frac{\text{لو } ٧^{٢} - (\text{لو } ٧)^{٢}}{\text{لو } \frac{٧}{١٠٠}}$ = لو س

∴ $\frac{٢ \text{ لو } ٧ - (\text{لو } ٧)^{٢}}{\text{لو } ٧ - \text{لو } ١٠٠}$ = لو س

∴ $\frac{\text{لو } ٧ \, (٢ - \text{لو } ٧)}{\text{لو } ٧ - ٢}$ = لو س

! تذكر أن: لو ١٠٠ = لو $١٠^{٢}$ = ٢

∴ − لو ٧ = لو س

∴ لو $٧^{-١}$ = لو س

∴ س = $٧^{-١}$ = $\frac{١}{٧}$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٧}\}$

مثال ٧

أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ لو$_{٣}$ (س^{٢} − ٣ س + ٢) − لو$_{٣}$ (س − ٢) = لو$_{٧}$ ٤٩

٢ س$^{\text{لو س}}$ = ١٠

٣ لو$_{٢}$ س = لو$_{٤}$ ٢٥

٤ لو$_{٣}$ س × لو$_{٩}$ س = ٢

٥ لو$_{٤}$ س + لو$_{\text{س}}$ ٤ = ٢

الحل

١ ∵ لو$_{٣}$ (س^{٢} − ٣ س + ٢) − لو$_{٣}$ (س − ٢) = لو$_{٧}$ ٤٩

∴ لو$_{٣}$ $\frac{\text{س}^{٢} - ٣ \text{ س} + ٢}{\text{س} - ٢}$ = لو$_{٧}$ $٧^{٢}$

∴ لو$_{٣}$ $\frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)}{\text{س} - ٢}$ = ٢ لو$_{٧}$ ٧

∴ لو$_{٣}$ (س − ١) = ٢

∴ س − ١ = $٣^{٢}$

∴ س = ١ + ٩ = ١٠

∴ مجموعة الحل = {١٠}

٢ ∵ س$^{\text{لو س}}$ = ١٠ وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو س$^{\text{لو س}}$ = لو ١٠

∴ لو س × لو س = ١

∴ (لو س)^{٢} = ١

∴ لو س = ± ١ وعندما لو س = ١

∴ س = $١٠^{١}$ = ١٠

وعندما لو س = −١

∴ س = $١٠^{-١}$ = ٠,١

∴ مجموعة الحل = {١٠ ، ٠,١}

٣ ∵ لو$_{٢}$ س = لو$_{٤}$ ٢٥

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو } ٢}$ = $\frac{\text{لو } ٢٥}{\text{لو } ٤}$

∴ لو س = $\frac{\text{لو } ٥^{٢} \times \text{لو } ٢}{\text{لو } ٢^{٢}}$ = $\frac{٢ \text{ لو } ٥ \times \text{لو } ٢}{٢ \text{ لو } ٢}$ = لو ٥

∴ س = ٥ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٥}

٤ ∵ لو$_{٣}$ س × لو$_{٩}$ س = ٢

∴ لو$_{٣}$ س × $\frac{\text{لو}_{٣} \text{ س}}{\text{لو}_{٣} ٩}$ = ٢

∴ (لو$_{٣}$ س)^{٢} = ٢ لو$_{٣}$ ٩ = ٢ لو$_{٣}$ $٣^{٢}$ = ٤ لو$_{٣}$ ٣ = ٤

∴ لو$_{٣}$ س = ± ٢

∴ س = $٣^{٢}$ = ٩ (تحقق) أ، س = $٣^{-٢}$ = $\frac{١}{٩}$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = $\{٩ ، \frac{١}{٩}\}$



٥ ∵ $لو_{٤}$ س + $لو_{س}$ ٤ = ٢

∴ $(لو_{٤} س)^{٢}$ + ١ = ٢ $لو_{٤}$ س

∴ $\left((لو_{٤} س) - ١\right)^{٢}$ = ٠

∴ س = ٤ (تحقق)

∴ $لو_{٤}$ س + $\frac{١}{لو_{٤} س}$ = ٢ (بالضرب × $لو_{٤}$ س)

∴ $(لو_{٤} س)^{٢}$ − ٢ $لو_{٤}$ س + ١ = ٠

∴ $لو_{٤}$ س = ١

∴ مجموعة الحل = {٤}

مثال ٨

أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ لو ٤٩ × لو $\sqrt{٨}$ = لو ٣٤٣ × لو $س^{٣}$

٢ لو $س^{٢}$ = $(لو س)^{٢}$

٣ (لو س + ١) (لو $\frac{س}{١٠}$) = ٣

٤ لو س − $لو_{س}$ ١٠٠ = ١

الحل

١ ∵ لو ٤٩ × لو $\sqrt{٨}$ = لو ٣٤٣ × لو $س^{٣}$

∴ لو $س^{٣}$ = $\frac{لو ٤٩ × لو \sqrt{٨}}{لو ٣٤٣}$ = $\frac{لو ٧^{٢} × لو \sqrt{٢^{٣}}}{لو ٧^{٣}}$ = $\frac{٢ لو ٧ × لو ٢^{\frac{٣}{٢}}}{٣ لو ٧}$

∴ لو $س^{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{٣}{٢}$ لو ٢

∴ لو $س^{٣}$ = لو ٢

∴ $س^{٣}$ = ٢

∴ س = $\sqrt[٣]{٢}$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = { $\sqrt[٣]{٢}$ }

٢ ∵ لو $س^{٢}$ = $(لو س)^{٢}$

∴ ٢ لو س = $(لو س)^{٢}$ حيث س > ٠

∴ $(لو س)^{٢}$ − ٢ لو س = ٠

∴ لو س (لو س − ٢) = ٠

∴ إما لو س = ٠ ومنها س = $(١٠)^{صفر}$ = ١ (تحقق)

أ، لو س = ٢ ومنها س = $١٠^{٢}$ = ١٠٠ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {١ ، ١٠٠}

٣ ∵ (لو س + ١) (لو $\frac{س}{١٠}$) = ٣

∴ (لو س + ١) (لو س − لو ١٠) = ٣

∴ (لو س + ١) (لو س − ١) = ٣

∴ $(لو س)^{٢}$ − ١ = ٣

∴ $(لو س)^{٢}$ = ٤

∴ لو س = ± ٢

∴ إما لو س = ٢ ومنها س = $١٠^{٢}$ = ١٠٠ (تحقق)

أ، لو س = −٢ ومنها س = $١٠^{-٢}$ = ٠,٠١ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {١٠٠ ، ٠,٠١}



٤ ∵ لو س − لو$_{س}$ ١٠٠ = ١ ∴ لو س − لو$_{س}$ $١٠^{٢}$ = ١

∴ لو س − ٢ لو$_{س}$ ١٠ = ١ ∴ لو س − $\frac{٢}{لو س}$ = ١ (بالضرب × لو س)

∴ $(لو س)^{٢}$ − ٢ = لو س ∴ $(لو س)^{٢}$ − لو س − ٢ = ٠

∴ (لو س + ١) (لو س − ٢) = ٠

∴ إما لو س = −١ ومنها س = $١٠^{-١}$ = ٠,١ (تحقق)

أ، لو س = ٢ ومنها س = $١٠^{٢}$ = ١٠٠ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {١٠٠ ، ٠,١}

مثال ٩

إذا كان :

١ س ص = ١٦ **فأثبت أن :** ٣ لو$_{٢}$ س + ٤ لو$_{٢}$ ص − لو$_{٢}$ س $ص^{٢}$ = ٨

٢ $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = ٦ س ص **فأثبت أن :** ٢ لو (س + ص) = لو س + لو ص + ٣ لو ٢

الحل

١ الطرف الأيمن = لو$_{٢}$ $س^{٣}$ + لو$_{٢}$ $ص^{٤}$ − لو$_{٢}$ س $ص^{٢}$

= لو$_{٢}$ $\frac{س^{٣} \times ص^{٤}}{س ص^{٢}}$ = لو$_{٢}$ $س^{٢}$ $ص^{٢}$ = لو$_{٢}$ $(س ص)^{٢}$

= ٢ لو$_{٢}$ س ص = ٢ لو$_{٢}$ ١٦ = ٢ لو$_{٢}$ $٢^{٤}$ = ٢ × ٤ لو$_{٢}$ ٢

= ٨ = الطرف الأيسر.

٢ ∵ $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = ٦ س ص

∴ $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ + ٢ س ص = ٦ س ص + ٢ س ص

∴ $س^{٢}$ + ٢ س ص + $ص^{٢}$ = ٨ س ص

∴ $(س + ص)^{٢}$ = ٨ س ص وبأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو $(س + ص)^{٢}$ = لو ٨ س ص

∴ ٢ لو (س + ص) = لو ٨ + لو س + لو ص = لو $٢^{٣}$ + لو س + لو ص

= لو س + لو ص + ٣ لو ٢



مثال ⑩

إذا كانت درجة قوة الزلزال (د) على مقياس ريختر تحسب بالعلاقة د = لو $\frac{ش}{ش_.}$

حيث ش هى شدة الزلزال ، ش. هى الشدة الابتدائية وتعرف بالمقياس الصفرى لشدة الزلزال وهى أقل شدة لحركة الأرض بحيث لا يسجلها المقياس.

١ أوجد على مقياس ريختر درجة الزلزال الذى شدته تعادل ١,٦ × ١٠^٨ مرة قدر الشدة الابتدائية.

٢ إذا كانت درجة الزلزال = ٧ درجات بمقياس ريختر أوجد كم مرة تعادل شدة هذا الزلزال من الشدة الابتدائية.

الحل

١ ∵ د = لو $\frac{ش}{ش_.}$ ، ش = ١,٦ × ١٠^٨ ش.

∴ د = لو $\frac{١,٦ \times ١٠^{٨} ش_.}{ش_.}$ = لو (١,٦ × ١٠^٨) ≃ ٨,٢

أى أن : درجة الزلزال على مقياس ريختر = ٨,٢

٢ ∵ درجة الزلزال (د) = ٧ ∴ ٧ = لو $\frac{ش}{ش_.}$

∴ $\frac{ش}{ش_.}$ = ١٠^٧ ∴ ش = ١٠^٧ × ش.

أى أن : شدة الزلزال تعادل ١٠ ٠٠٠ ٠٠٠ مرة قدر الشدة الابتدائية.

معلومة إثرائية

لأى عدد س ∈ ص+ إذا كان : ن ≤ لو س < ن + ١

فإن عدد أرقام العدد س = ن + ١ حيث ن ∈ ط

فمثلاً : * لإيجاد عدد أرقام العدد ٥^٣

∵ لو ٥^٣ ≃ ٢,٠٩٧ أى أن : ٢ ≤ لو ٥^٣ < ٣

∴ عدد أرقام العدد ٥^٣ = ٣ أرقام

* لإيجاد عدد أرقام العدد ٣^١٧

∵ لو ٣^١٧ ≃ ٨,١١١ أى أن : ٨ ≤ لو ٣^١٧ < ٩

∴ عدد أرقام العدد ٣^١٧ = ٩ أرقام







على بعض خواص اللوغاريتمات

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $لو_٢ ٥ × لو_٥ ٢$ = ...

(أ) ١ (ب) ١٠ (جـ) $لو_٢ ١٠$ (د) $لو_٥ ١٠$

(٢) ١ + لو ٢ = ...

(أ) لو ٥ (ب) لو ٢ (جـ) لو ٢٠ (د) − لو ٥

(٣) قيمة المقدار : ٢ لو ٢٥ + لو $\frac{٨}{١٥}$ + ٢ لو ٣ − لو ٣٠ = ...

(أ) ٦ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) −١

(٤) أى العبارات الآتية صحيحة ؟

(أ) لو ٢ − لو $\sqrt{٢}$ = لو $\sqrt{٢}$ (ب) $لو_٢ ١$ = صفر

(جـ) لو $\frac{٧}{٥}$ = $\frac{لو ٧}{لو ٥}$ (د) لو ٧ ÷ لو ٢ = لو ٥

(٥) إذا كان : لو س − لو ٢ = لو ٤ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٦) إذا كان : لو س + لو ٥ = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

(٧) $٢ لو_٥ ٣ + ٣ لو_٥ ٢$ = ...

(أ) $لو_٥ ٦$ (ب) $٦ لو_٥ ٦$ (جـ) $لو_٥ ٧٢$ (د) $لو_٥ ٣٦$

(٨) $لو_ب أ × لو_{حـ} ب × لو_ء حـ × لو_أ ء$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) أ ب حـ ء (د) أ ء

(٩) $\sqrt{٣^{لو_٣ ٤} × ٣^{لو_٣ ٢٥} + ٧^{لو_٧ ١٦}}$ = ...

(أ) ٩ (ب) ٢٥ (جـ) ٥ (د) ١٦

(١٠) $\frac{١}{لو_٢ ٣٠} + \frac{١}{لو_٣ ٣٠} + \frac{١}{لو_٥ ٣٠}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٣٠



(١١) ٢ لو$_م$ س + لو$_م$ ص − لو$_م$ (س ص) = ...

(أ) لو س　(ب) لو$_م$ س　(جـ) لو$_م$ س ص　(د) لو$_م$ س^٢

(١٢) أبسط صورة للمقدار : لو$_ب$ أ^٢ × لو$_حـ$ ب^٣ × لو$_أ$ حـ = ...

(أ) ٢　(ب) ٣　(جـ) ٦　(د) ١

(١٣) لو $\left(\frac{أ^٢}{ب حـ}\right)$ = ... حيث أ ، ب ، حـ ∈ ح$^+$

(أ) ٢ لو أ + لو ب + لو حـ　(ب) ٢ لو أ − لو ب + لو حـ

(جـ) ٢ لو أ − لو ب − لو حـ　(د) ٢ (لو أ − لو ب − لو حـ)

(١٤) إذا كان : س − ٢ = لو$_٢$ ٣　فإن : س = ...

(أ) لو$_٢$ ٦　(ب) لو$_٢$ ٩　(جـ) لو$_٢$ ١٢　(د) لو$_٢$ ١٨

(١٥) لو$_ب$ $\frac{١}{أ}$ + لو$_أ$ $\frac{١}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{أ}{ب}$　(ب) $\frac{ب}{أ}$　(جـ) −١　(د) ١

(١٦) المقدار $\frac{٣ لو ٢}{لو ٤ + لو ٣}$ يكافئ المقدار ....

(أ) لو$_٢$ ٢　(ب) لو$_٧$ ٢　(جـ) لو$_{١٢}$ ٨　(د) لو$_٧$ ٨

(١٧) إذا كان : ٣^س = ٥　فإن : س = ...

(أ) ٣　(ب) لو$_٣$ ٥　(جـ) لو$_٥$ ٣　(د) $\frac{٥}{٣}$

(١٨) مجموعة حل المعادلة : لو$_٢$ (٢$^{س − ٤}$) = ٥ − س هى ....

(أ) {٤}　(ب) {٥ ، ٤}　(جـ) {٥}　(د) {٤ ، ٥}

(١٩) مجموعة حل المعادلة : لو$_{\sqrt{٢}}$ س + لو$_{\sqrt{٢}}$ (س + ١) = ٢ هى ....

(أ) {١ ، ٢}　(ب) {−٢}　(جـ) {١ ، −٢}　(د) {١}

(٢٠) مجموعة حل المعادلة : ٢ لو ٢ − لو س = لو (س + ٣) − لو ٧ هى ....

(أ) {٧}　(ب) {٤}　(جـ) {٧ ، ٤}　(د) ∅

(٢١) إذا كان : لو$_ب$ س + لو$_ب$ ٣ = لو$_ب$ ٢٧ − ١ فإن قيمة س = ... بدلالة ب

(أ) ٩ ب　(ب) $\frac{١}{٩}$ ب　(جـ) $\frac{٩}{ب}$　(د) $\frac{١}{٩ ب}$

(٢٢) إذا كان : لو$_٢$ س = لو$_٤$ ٩　فإن : س = ...

(أ) ٣　(ب) ٤　(جـ) ٩　(د) ١٢



(٢٣) مجموعة حل المعادلة : لو$_٢$ س + لو$_٤$ س = ٣ هي ....

(أ) {٢} (ب) {٤} (جـ) {٢ ، ٤} (د) {٠}

(٢٤) إذا كان : لو$_٢$ س + لو$_٢$ س^٢ = ٦ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٢١٦

(٢٥) مجموعة حل المعادلة : لو س^٢ − (لو س)^٢ = ٠ هي ....

(أ) {١} (ب) {١ ، ١٠} (جـ) {١ ، ١٠٠} (د) {١٠٠}

(٢٦) مجموعة حل المعادلة : (لو$_٣$ س)^٢ − لو$_٣$ س^٣ + ٢ = ٠ هي ....

(أ) {٣} (ب) {٣ ، ٩} (جـ) {٩} (د) {١ ، ٢}

(٢٧) مجموعة حل المعادلة : لو$_٢$ س − ٢ لو$_س$ ٣ = ١ في ح هي ....

(أ) {٨ ، ٣} (ب) {٨ ، $\frac{١}{٣}$} (جـ) {٩ ، $\frac{١}{٣}$} (د) {٨}

(٢٨) إذا كان : س$^{لو_س س^٢}$ = لو$_٢$ ١٦ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ±٢ (د) ٤

(٢٩) أي العبارات الآتية صحيحة ؟

(أ) لو ٣ + لو ٣ = لو ٦ (ب) ١ − لو ٥ = ٢

(جـ) لو ٢ × لو ٢ = لو ٤ (د) لو (١ + ٢ + ٣) = لو ١ + لو ٢ + لو ٣

(٣٠) إذا كان : س = $\sqrt{ص ع}$ حيث س ، ص ، ع أعدادًا موجبة فإن : لو ص = ...

(أ) $\frac{لو س^٢}{لو ع}$ (ب) $\frac{٢ لو س}{لو ع}$ (جـ) ٢ لو س − لو ع (د) ٢ (لو س − لو ع)

(٣١) إذا كان : لو ٢٣ = أ فإن : لو ٢٣٠٠ = ...

(أ) أ + ٢ (ب) أ − ٢ (جـ) ١٠٠ أ (د) أ^٢

(٣٢) إذا كان : لو$_٢$ ٥ = أ فإن : لو$_{١٠}$ ٥ = ...

(أ) أ^٢ (ب) ٣ أ (جـ) $\frac{١}{أ + ٣}$ (د) $\frac{أ}{أ + ١}$

(٣٣) إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٤ = ص فإن : لو ١٢ = ...

(أ) س + ص (ب) س ص (جـ) س − ص (د) لو س + لو ص

(٣٤) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ فيه : أ ب = (لو$_٤$ ٣) سم ، أ جـ = (لو$_٣$ ٦٤) سم

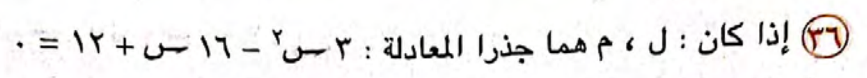
فإن مساحة Δ أ ب جـ = ... سم^٢

(أ) ١,٥ (ب) ٣ (جـ) لو ١٦ (د) لو$_٣$ ١٦

(٣٥) إذا كان : $\frac{لو س}{لو ٥} = \frac{لو ٣٦}{لو ٦} = \frac{لو ٦٤}{لو ص}$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ٣٣





(٣٦) إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : ٣ س^٢ – ١٦ س + ١٢ = ٠

فإن قيمة : لو$_٢$ ل + لو$_٢$ م = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٢ (د) ١٦

(٣٧) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^٢ + س لو$_٣$ أ = ٩ وكان : $\frac{ل + م}{ل م} = \frac{١}{٣}$

فإن : أ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٧ (د) ٧٢٩

(٣٨) مجموعة حل المعادلة : لو$_ب$ (س + ٥) = لو$_ب$ س + لو$_ب$ ٥ في ح هي ....

(أ) {٥} (ب) {٤} (جـ) $\{\frac{٤}{٥}\}$ (د) $\{\frac{٥}{٤}\}$

(٣٩) محيط الشكل المقابل = ... سم

لو$_٢$ ٨ سم
لو$_٣$ ٢٧ سم

(أ) ٢ لو$_٢$ ٣٥ (ب) لو$_٢$ ٧٠

(جـ) ٣ (د) ٦

(٤٠) لو (حاθ) + لو (ظاθ) = ... حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) –١

ثانيًا الأسئلة المقالية

(١) بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتي :

(١) لو$_٣$ ٨١ × لو$_٩$ ٣ «٢» | (٢) لو$_٢$ ١٥ + لو$_٢$ ١٤ – لو$_٢$ ١٠٥ «١»

(٣) لو$_٤$ لو$_٢$ لو$_٢$ ٤ «صفر» | (٤) ١ + لو ٣ – لو ٢ – لو ١٥ «صفر»

(٥) ٢ لو ٢٥ + لو $\left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٥}\right)$ + ٢ لو ٣ – لو ٣٠ «٢»

(٦) لو ٢٥ + $\frac{لو ٨ \times لو ١٦}{لو ٦٤}$ «٢»

(٧) $\frac{لو_٢ ٢٥ + لو_٢ ٤}{لو_٢ ٣٠ - لو_٢ ٣}$ «٢» | (٨) $\frac{(لو ٣)^٢ - لو ٣^٢}{لو ٣ - لو ١٠٠}$ «لو ٣»

(٩) لو$_٥$ $\frac{١ - لو_٣ ٢}{لو_٣ (\frac{٣}{٢})}$ «–١» | (١٠) لو$_٣$ (لو س^١٨) – لو$_٣$ (لو س^٢) «٢»

(١١) لو$_{أب}$ أ + لو$_{أب جـ}$ ب + لو$_{أب جـ}$ جـ «١»

(١٢) $\frac{١}{٢}$ لو$_٣$ أ + $\frac{١}{٢}$ لو$_٣$ ب + ٢ لو$_٣$ جـ – لو$_٣$ $\sqrt{أب}$ – لو$_٣$ ٣ جـ^٢ «–١»

(١٣) $\frac{١}{لو_٢ ١٢} + \frac{١}{لو_٨ ١٢} + \frac{١}{لو_٩ ١٢}$ «٢»



٢ بدون استخدام حاسبة الجيب أثبت كلًا مما يأتي :

(١) ٢ لو$_{٣}$ ١٥ + لو$_{٣}$ $\frac{٧}{٣}$ − لو$_{٣}$ ١٧٥ = ٢ لو$_{٣}$ $\sqrt{٣}$

(٢) لو$_{٢}$ $\frac{٣}{١١}$ + لو$_{٢}$ $\frac{٢٩٧}{٩٨}$ − (٢ لو$_{٢}$ ٢ × لو$_{٢}$ $\frac{٩}{٧}$) = −١

(٣) (١ − لو ٥) (٢ − لو ٢٥) = ٢ (لو ٢)^{٢}

(٤) $\frac{\text{لو ٧٢٩ − لو ٦٤}}{\text{لو ٩ − لو ٤}}$ = ٣

(٥) $\frac{(\text{لو ٥})^{٢} - \text{لو ٥}^{٢}}{\text{لو ٥ − لو ١٠٠}}$ = ١ − لو ٢

(٦) $\frac{\text{لو}_{٢}\ \text{لو}_{٥}\ \text{لو}_{٣}\ ٢٤٣}{\text{لو}_{٧}\ \text{لو}_{٣}\ \text{لو}_{٢}\ ٥١٢}$ = صفر

٣ باستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة س لأقرب رقمين عشريين فى كل مما يأتى :

(١) ٣$^{س+٢}$ = ٦ «−٠,٣٧»

(٢) ٣$^{٧−٢س}$ = ١٣,٤ «٢,٣٢»

(٣) ٧$^{س+١}$ = ٣$^{س−٢}$ «−٤,٨٩»

(٤) ٣$^{٢س−٣}$ = ١١$^{١−س}$ «١,٢٤»

(٥) س^{١,٦} = ٩٤,٥ «±١٧,١٧»

(٦) $\frac{٥}{(١٠)^{٢س}}$ = ٧ «−٠,٠٧»

(٧) ٧$^{س+١}$ + ٧$^{س−١}$ = ٣٠٠ «١,٩٢»

(٨) ٢^{س} × ٣ = ٢ × ٣$^{س+٢}$ «−٤,٤٢»

(٩) ٣ × ٢$^{س−١١}$ = ٨ × ٦$^{٥س−١}$ «−٠,٨٢»

(١٠) ٢٥^{س} − ٢٧ × ٥^{س} + ٥٠ = ٠ «٠,٤٣ ، ٢»

(١١) ٨$^{٣−٥س}$ ÷ ٧$^{٤+س}$ = ٢ «−٠,١٨»

(١٢) لو$_{٥}$ (٤$^{س+١}$) = س − ٢ «٢٠,٦٤»

٤ إذا كان : لو$_{٣}$ ٥ ≃ ١,٤٦٥ فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة :

(١) لو$_{٣}$ ١٥ (٢) لو$_{٣}$ ١٣٥ (٣) لو$_{٣}$ $\frac{٥}{٩}$

٥ إذا كان : لو ٢ = س ، لو ٣ = ص أوجد بدلالة س ، ص كلًا من :

(١) لو ٦ (٢) لو$_{١٨}$ ١٢

٦ ناقش صحة كل مما يأتى مع تصحيح الخطأ منها ، [حيث س ، ص ∈ ح$^{+}$ ، أ ، ب ∈ ح$^{+}$ − {١} فى المسائل (٣) إلى (٧)]

(١) لو$_{س}$ س^{س} = س لكل س ∈ ح

(٢) لو س^{ن} = ن لو س لكل س ∈ ح

(٣) لو$_{أ}$ (س + ص) = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

(٤) لو$_{أ}$ (س + ص) = لو$_{أ}$ س × لو$_{أ}$ ص

(٥) لو$_{أ}$ (س ص) = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

(٦) لو$_{أ}$ $\left(\frac{س}{ص}\right)$ = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص$^{−١}$

(٧) $\frac{\text{لو}_{أ}\ س}{\text{لو}_{أ}\ ص} = \frac{\text{لو}_{ب}\ س}{\text{لو}_{ب}\ ص}$

(٨) إذا كان : س < صفر فإن : لو$_{أ}$ س^{٤} = ٤ لو$_{أ}$ س ، أ ∈ ح$^{+}$ − {١}



٧ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① لو$_{٣}$ (س + ٦) = ٢ لو$_{٣}$ س — «{٣}»

② لو$_{٤}$ س + لو$_{٤}$ (س + ٦) = ٣ — «{−٣ + √٧٣}»

③ لو$_{٣}$ س + لو$_{٣}$ س^{٢} = ٣ — «{٣}»

④ لو$_{٣}$ (س − ١) + لو$_{٣}$ (س + ١) = لو$_{٣}$ ٨ — «{٣}»

⑤ لو (س + ٨) − لو (س − ١) = ١ — «{٢}»

⑥ لو$_{٤}$ س = ١ − لو$_{٤}$ (س − ٣) — «{٤}»

⑦ لو$_{٥}$ س^{٢} + لو$_{٥}$ ٢ = لو$_{٥}$ ١٨ — «{٣ ، −٣}»

⑧ لو$_{٣}$ (٧ س^{٢} − ٤) = ٢ لو$_{٣}$ س + $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ ٩ — «{١}»

⑨ ٥ لو$_{٣}$ (س + ٢) − لو$_{٣}$ (س − ١)^{٥} = لو$_{٣}$ ٣٢ — «{٤}»

⑩ لو (٨ − س) + ٢ لو $\sqrt{س - ٦}$ = ٠ — «{٧}»

⑪ لو (س + ٢) + لو (س − ٢) = ١ − لو ٢ — «{٣}»

⑫ لو ٧ × لو ٧٢٩ = لو ٤٩ × لو س^{٣} — «{٣}»

⑬ لو$_{٢}$ (س^{٢} + ٦ س + ٩) − لو$_{٢}$ (س − ١) = لو$_{٥}$ ٦٢٥ — «{٥}»

⑭ لو س = $\frac{(\text{لو } ٣)^{٢} - \text{لو } ٢٧}{\text{لو } ٠,٠٠٣}$ — «{٣}»

⑮ (لو س)^{٢} − لو س^{٢} = ٣ — «{١٠٠٠ ، ٠.١}»

⑯ (لو س)^{٢} + لو س^{٢} + ١ = (لو ٥)^{٢} — «{$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٥٠}$}»

⑰ ٢ لو$_{س}$ ٢ + لو$_{س}$ ١٤ − ٣ لو$_{س}$ ٣ = ٣ + لو$_{س}$ ٧ — «{$\frac{٢}{٣}$}»

⑱ لو $\sqrt[٣]{٣س - ١}$ + لو $\sqrt[٣]{س - ٢}$ = لو ٢٠ − ١ — «{٣}»

---

٨ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

① لو$_{٢}$ س = لو$_{٤}$ ٩ — «{٣}»

② ٣$^{\text{لو س}}$ = ٢$^{\text{لو ٣}}$ — «{٢}»

③ س$^{\text{لو س}}$ = ١٠ — «{٠.١ ، ١٠}»

④ لو$_{٣}$ س = لو$_{س}$ ٣ — «{٣ ، $\frac{١}{٣}$}»

⑤ س$^{\text{لو}_{س}\text{ س}^{٢}}$ = لو ١٠^{٩} — «{٣}»

⑥ ٢$^{٢ \text{ لو س}}$ × ٥$^{\text{لو س}}$ = ٨٠٠٠ — «{١٠٠٠}»

⑦ ٢$^{(\text{لو س})^{٢}}$ × ٦٤ = ٢$^{\text{لو س}^{٥}}$ — «{١٠٠٠ ، ١٠٠}»

⑧ لو س − $\frac{١}{\text{لو س}}$ = $\frac{٣}{٢}$ — «{١٠٠ ، $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$}»



⑨ $لو_{٢}\, س + لو_{س}\, ٢ = ٢$ «{٢}»

⑩ $لو\, س - لو_{س}\, ١٠٠ = ١$ «$\{١٠٠ ، \frac{١}{١٠}\}$»

⑪ $لو \frac{س}{٢} \times لو \frac{٢}{س} = -١$ «{٠٫٠٢ ، ٢٠}»

⑫ $(لو\, س)^{٣} = لو\, س^{٩}$ «{١ ، ١٠٠٠ ، ٠٫٠٠١}»

⑬ $س^{لو\, س} = ١٠٠\, س$ «$\{١٠٠ ، \frac{١}{١٠}\}$»

⑭ $(لو\, س + ٢)\left(لو \frac{س}{١٠٠}\right) = ٥$ «{١٠٠٠ ، ٠٫٠٠٠١}»

⑮ $لو_{٣}\, س + لو_{٩}\, س^{٢} + ٣ = ٠$ «$\left\{\frac{١}{٣\sqrt{٣}}\right\}$»

⑯ $لو_{٢}\, س = لو_{٤}\, (س + ٦)$ «{٣}»

⑰ $لو_{٢}\, س + لو_{٤}\, س = \frac{-٣}{٢}$ «$\{\frac{١}{٢}\}$»

⑱ $\sqrt{لو_{٢}\, س} = لو_{٢} \sqrt{س}$ «{١ ، ١٦}»

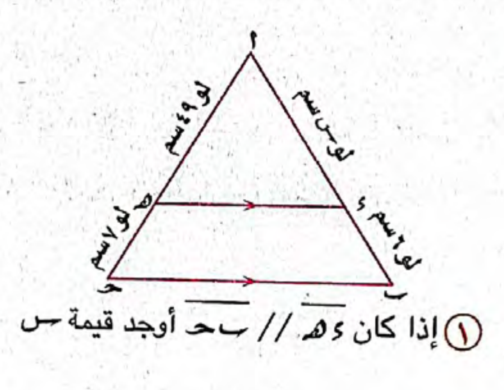
⑲ $\sqrt{س^{لو \sqrt{س}}} = ١٠$ «$\{١٠٠ ، \frac{١}{١٠٠}\}$»

⑳ $\sqrt{لو \left(٩١ + ٣^{\sqrt{\frac{س}{٢}}}\right)} = لو\, ١٠^{\sqrt{٢}}$ «{٨}»

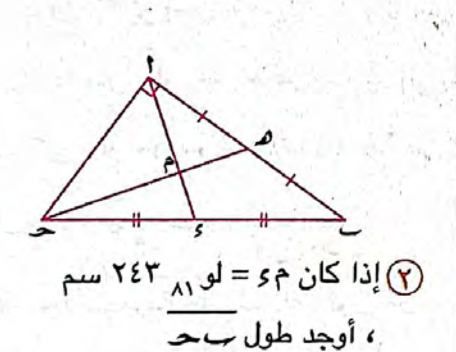
㉑ $لو \frac{١}{٢^{س} + س - ١} = س\, (لو\, ٥ - ١)$ «{١}»

㉒ $لو_{٢٧}\, (س - ٢) + لو_{٣}\, (س - ٢) = ٤$ «{٢٩}»

٩ في كل من الأشكال الآتية أوجد ما هو مطلوب أسفل كل شكل في أبسط صورة :



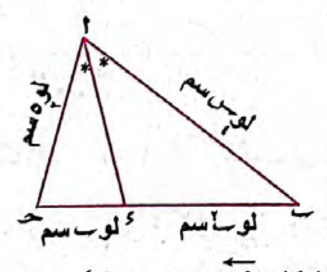
① إذا كان $\overline{دهـ} \,//\, \overline{بج}$ أوجد قيمة س



② إذا كان م ء = $لو_{٨١}\, ٢٤٣$ سم ، أوجد طول $\overline{بج}$

③ إذا كان $\overline{أب} \perp \overline{أج}$ ، $\overline{أء} \perp \overline{بج}$

أوجد قيمة س



④ إذا كان $\overleftarrow{أء}$ ينصف ∠ أ أوجد قيمة س

١٠ أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية آنيًا في ح × ح :

① $لو\, س\, ص = ١ - لو\, ٥$ ، $لو\, ص^{٣} = ٣ - لو\, ١٢٥$ «{(١ ، ٢)}»

② $لو_{٢}\, س + لو_{٢}\, ص + لو_{٢}\, ٤ = ٢ + لو_{٢}\, ٩$ ، $س + ص = ١٠$ «{(١ ، ٩) ، (٩ ، ١)}»

③ $لو\, س^{٣} + لو\, ص^{٢} = ١١$ ، $لو\, س^{٢} - لو\, ص^{٣} = ٣$ «{(١٠٠٠ ، ١٠)}»



11 أجب عما يأتى :

① إذا كان : س ص = ٩ $\sqrt{٣}$ فاثبت أن : ٥ لو$_٣$ س + ٤ لو$_٣$ ص − لو$_٣$ س^٣ ص^٢ = ٥

② إذا كان : $\frac{١}{٣}$ لو أ = $\frac{١}{٥}$ لو ب = لو حـ فاثبت أن : حـ^٨ = أ ب

③ إذا كان : لو $\frac{س + ص}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) فاثبت أن : $\frac{س}{ص}$ + $\frac{ص}{س}$ = ٧

④ إذا كان : ٣$^{لو_أ س}$ = أ فاثبت أن : لو$_أ$ س معكوس ضربى للعدد لو$_أ$ ٣

ثم أوجد قيمة : لو$_٩$ س «٢»

⑤ أثبت أن : لو$_{أ^٢}$ ب^٢ = لو$_أ$ ب ثم أثبت أن : لو$_أ$ ب^٢ + لو$_{أ^٢}$ ب^٤ = ٤ لو$_أ$ ب

⑥ إذا كان : ٣ لو س + ٤ لو ص − لو س ص^٢ = ٢ (لو ٢ + لو ٣) فاثبت أن : س = $\frac{٦}{ص}$

⑦ إذا كان : س^٢ + ص^٢ = ٨ س ص

أثبت أن : ٢ لو (س + ص) = ١ + لو س + لو ص

⑧ إذا كان : لو (س + ص) = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) + لو٢ أثبت أن : س = ص

⑨ إذا كان : لو$_س$ ص^٣ = ١ ، لو$_{س^٢}$ ص = ١ أوجد قيمة : لو$_س$ ص «$\frac{٢}{٥}$»

⑩ أثبت أن : لو$_ص$ س = $\frac{١}{لو_س ص}$

ثم أوجد مجموعة حل المعادلة : لو$_٣$ س + ٣ لو$_س$ ٣ = ٤ «{٣ ، ٢٧}»

⑪ إذا كانت : س ، ص ، ع أعدادًا صحيحة موجبة

وكان $\frac{٤}{لو_س ص}$ + $\frac{٧}{لو_ع ص}$ = ٣ لو$_ص$ ع أوجد قيمة : س ع «١»

⑫ إذا كان : ص = أ$^{لو_أ س}$ فاثبت أن : ص = س ومن ذلك أوجد قيمة : ٣$^{\frac{١}{٢} لو_٣ ٤٩}$ «٧»

⑬ أثبت أن : لو$_{أ^ص}$ أ^س = $\frac{س}{ص}$ ومن ذلك أوجد قيمة : لو$_{\sqrt{٥}}$ ١٢٥ × لو$_٨$ $\sqrt{٢}$ «$\frac{٢}{٣}$»

⑭ أثبت أن : لو$_ب$ أ = $\frac{لو أ}{لو ب}$

ومن ثم استخدم العلاقة فى إثبات أن : (لو$_أ$ أ ب)$^{-١}$ + (لو$_ب$ أ ب)$^{-١}$ = ١

⑮ إذا كان : لو$_حـ$ أ + لو$_حـ$ ب − ٢ لو$_حـ$ $\frac{أ + ب}{٢}$ = ٠ فاثبت أن : أ − ب = ٠

⑯ إذا كان : (س$^{لو س}$)^٢ × س^٢ = ١٠^٥ فأوجد قيمة : س «$\frac{١}{١٠٠ \sqrt{١٠}}$ ، ١٠»

⑰ بوضع أ^س = ص فى المعادلة : أ^س − أ$^{-س}$ = ١

أوجد قيمة ص ومن ذلك أثبت أن : س = لو$_أ$ $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ «$\frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$»

(١٨) إذا كانت : د (س) = لو $س^٢$

أوجد مجموعة حل المعادلة : د (س + ١) + د (س − ١) = د (٣) «{٢ ، −٢}»

(١٩) ابحث نوع الدالة د : د (س) = لو $(\sqrt{س^٢ + ١} - س)$ من حيث كونها زوجية أم فردية.

(٢٠) استخدم الآلة الحاسبة فى إيجاد عدد أرقام العدد $٤^{٤٧}$ «٢٩»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : لو س = ع + لو ص فإن : س = ...

(أ) ص × $١٠^ع$ (ب) $\frac{ع}{ص}$ (جـ) ع − $(١٠)^ص$ (د) $\frac{١}{ص} \times (١٠)^ع$

(٢) $\frac{١}{١ + لو_ب ٢ + لو_ب حـ} + \frac{١}{١ + لو_حـ ٢ + لو_حـ ب} + \frac{١}{١ + لو_٢ ب + لو_٢ حـ} =$ ....

(أ) $لو_٢$ ب حـ (ب) $لو_ب$ ٢ حـ (جـ) $لو_حـ$ ٢ ب (د) ١

(٣) مجموع جذرى المعادلة : $(٢٥)^س - ١٢ \times ٥^س + ٢٧ = ٠$ يساوى ....

(أ) $لو_٥$ ١٢ (ب) ١٢ (جـ) $لو_٥$ ٢٧ (د) ٢٧

(٤) $٣^{لو س} =$ ....

(أ) ٣ لو س (ب) $س^{لو ٣}$ (جـ) لو ٣ س (د) $س^{لو ٣}$

(٥) إذا كان : ٢ > ب > حـ > ١ فإن : $لو_حـ لو_ب لو_٢ ٢^{ب^حـ} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٢ ب حـ

(٦) إذا كان : $ب^س - ٢ ب^{-س} = ١$ حيث ب > ١ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) لو ٢ (جـ) $لو_ب$ ٢ (د) $لو_٢$ ب

(٧) إذا كان : $\frac{١}{لو_٢ س} + \frac{١}{لو_٤ س} + \frac{١}{لو_٨ س} + \frac{١}{لو_{١٦} س} = ٥$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

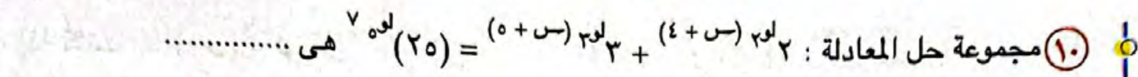
(٨) إذا كان : لو ٢ ∈]٠ ، ١[فإن : ٢ ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ٢[(جـ)]١ ، ١٠[(د)]١ ، ∞[

(٩) إذا كان : ٢ ∈]٠ ، ٩[فإن : $لو_٣$ ٢ ∈ ....

(أ)]−∞ ، ٢[(ب)]٢ ، ٨١[(جـ)]٢ ، ∞[(د)]−∞ ، ٠[





(١٠) مجموعة حل المعادلة : $٢^{لو_٢ (س + ٤)} + ٣^{لو_٣ (س + ٥)} = (٢٥)^{لو_٥ ٧}$ هى ....

(أ) {٢ ، ٣}　(ب) {-٤ ، -٥}　(جـ) {٢ ، -٢}　(د) {٢٠}

(١١) إذا كانت : س ، ص ∈ $ح^+$ - {١} وكان : $لو_ص س = لو_س ص$ فإن : ....

(أ) س = ص　(ب) $س = \frac{١}{ص}$　(جـ) س = ± ١　(د) أ ، ب معًا.

(١٢) إذا كان : $٣^أ = ٥^ب = ٧^{جـ}$ فإن : $\frac{أ}{ب} + \frac{أ}{جـ}$ = ...

(أ) ٣٥　(ب) ٧　(جـ) $لو_٥ ٧$　(د) $لو_٣ ٣٥$

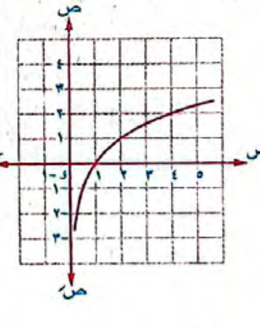
(١٣) إذا كان : $لو_٢ س + لو_٤ س + لو_٨ س = ١١$ فإن : س = ...

(أ) ٣٢　(ب) ٣٦　(جـ) ٦٤　(د) ١٢١

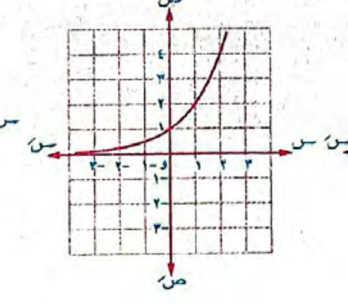
(١٤) إذا كان : $لو_٢ ٣ × لو_٣ ٤ × لو_٤ ٥ × ... × لو_ن (ن + ١) = ١٠$ فإن : ن = ...

(أ) ٩　(ب) ١٠　(جـ) ١٠٢٣　(د) ١٠٢٤

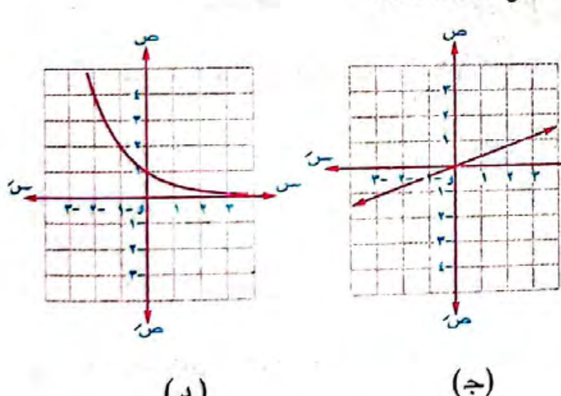
(١٥) الشكل البيانى الذى يمثل الدالة د : $د(س) = لو ٢^{-س}$ هو ....



(أ)



(ب)



(جـ)　(د)

---

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) $لو_٣ \frac{١}{٢} + لو_٣ \frac{٢}{٣} + لو_٣ \frac{٣}{٤} + ... + لو_٣ \frac{٨٠}{٨١}$ «-٤»

(٢) لو (ظا ١°) + لو (ظا ٢°) + لو (ظا ٣°) + ... + لو (ظا ٨٩°) «صفر»

(٣) لو ظا ١° × لو ظا ٢° × لو ظا ٣° × ... × لو ظا ٧٣° «صفر»

---

٣ أثبت أن : $لو_ب س + لو_{ب^٢} س^٢ + لو_{ب^٣} س^٣ + ... + لو_{ب^ن} س^ن = لو_ب س^ن$

ثانيًا التفاضل وحساب المثلثات

الوحدة 3 النهايات والاتصال

الوحدة 4 حساب المثلثات





الوحدة الثالثة

النهايات والاتصال



الدرس 1 مقدمة فى النهايات «إيجاد النهاية عدديًا وبيانيًا».

الدرس 2 إيجاد نهاية الدالة جبريًا.

الدرس 3 نظرية (٤) «القانون».

الدرس 4 نهاية الدالة عند اللا نهاية.

الدرس 5 نهايات الدوال المثلثية.

الدرس 6 بحث وجود نهاية للدالة مجزأة المجال.

الدرس 7 الاتصال.



الدرس

1

مقدمة فى النهايات (إيجاد النهاية عدديًا وبيانيًا)

الكميات المعينة وغير المعينة وغير المعرفة

عند إجراء العمليات الحسابية على ح نتعرض إلى واحدة من ثلاثة أنواع من الكميات وهى :

١ الكمية المعينة : هى الكمية التى لها ناتج محدد :

فمثلًا : $\frac{٨}{٥}$ كمية معينة أى لها ناتج محدد هو ١,٦

لأن : العدد الحقيقى الذى إذا ضرب فى ٥ كان الناتج ٨ هو ١,٦

ومن أمثلة الكميات المعينة : $\frac{٠}{٣}$ ، ٥ ± ٠ ، ٧ × ٣ ، .....

٢ الكمية غير المعينة : هى الكمية التى ليس لها جواب محدد :

فمثلًا : $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة أى لها عدد لا نهائى فى ح من الإجابات الصحيحة

لأن : حاصل ضرب أى عدد حقيقى × صفر = صفر

مع ملاحظة أنه توجد كميات أخرى غير معينة سنتعرض لها فى دراستنا لاحقًا.

٣ الكمية غير المعرفة : هى الكمية التى ليس لها معنى :

فمثلًا : $\frac{٥}{\text{صفر}}$ كمية غير معرفة أى ليس لها معنى.

لأنه : لا يوجد عدد حقيقى إذا ضرب × صفر كان الناتج = ٥

وبصفة عامة : $\frac{أ}{\text{صفر}}$ حيث أ ∈ ح - {٠} كمية غير معرفة.

الرمزان ∞ ، - ∞

* الرمز ∞ (لا نهاية) ليس عددًا حقيقيًا ولكنه يعبر عن كمية أكبر من أى عدد حقيقى موجب يمكن إدراكه.

* الرمز - ∞ (سالب لا نهاية) ليس عددًا حقيقيًا ولكنه يعبر عن كمية أصغر من أى عدد حقيقى سالب يمكن إدراكه.



* والتعامل بالرمزين ∞ ، − ∞ عند إجراء العمليات الحسابية يخضع للخواص الآتية :

بفرض أن أ عدد حقيقى فإن :

١ ∞ ± أ = ∞ ، − ∞ ± أ = − ∞

٢ ∞ × أ = { ∞ عندما أ > ٠ ، − ∞ عندما أ < ٠ ، كمية غير معينة عندما أ = ٠ }

، − ∞ × أ = { − ∞ عندما أ > ٠ ، ∞ عندما أ < ٠ ، كمية غير معينة عندما أ = ٠ }

فمثلًا : ∞ ± ٧ = ∞ ، − ∞ ± ٢ = − ∞ ، ∞ × ١٥ = ∞ ، − ∞ × ٧ = − ∞

، ∞ + ∞ = ∞ ، − ∞ × −٢ = ∞

معلومة إثرائية

الصور غير المعينة سبع هى :

$\frac{صفر}{صفر}$ ، $\frac{∞}{∞}$ ، ∞ − ∞ ، ∞ × صفر

، (صفر)^{صفر} ، (∞)^{صفر} ، (١)$^{∞}$

مفهوم نهاية الدالة عند نقطة

مثال توضيحى

إذا أردنا إيجاد قيمة الدالة د : د (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ عند س = ١ فإننا نجد أن : د (١) = $\frac{١^٢ - ١}{١ - ١}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

وهى كمية غير معينة أى أننا لم نستطع تعيين قيمة للدالة عند س = ١

ولذلك نلجأ إلى دراسة اقتراب د (س) من قيمة معينة كلما اقتربت س من العدد ١

وذلك بإحدى الطريقتين التاليتين :

١ إيجاد النهاية عدديًا

أعطِ قيمًا للمتغير س تقترب شيئًا فشيئًا من العدد ١ من خلال قيم أكبر من ١ وقيم أصغر من ١ دون أن تأخذ س القيمة ١ وملاحظة ما يحدث لقيم د (س) المناظرة كما بالجدول التالى :

س تقترب من ١ (من اليمين) ⟵ ⟶ س تقترب من ١ (من اليسار)

س	١,٥	١,٤	١,٣	١,٢	١,١		٠,٩	٠,٨	٠,٧	٠,٦	٠,٥
د (س)	٢,٥	٢,٤	٢,٣	٢,٢	٢,١		١,٩	١,٨	١,٧	١,٦	١,٥

د (س) تقترب من ٢ ⟵ ⟶ د (س) تقترب من ٢

نجد أنه :

* كلما اقتربت س من العدد ١ من جهة اليمين أى (من خلال قيم للمتغير س أكبر من ١) وتكتب رياضيًا (س ⟵ ١^+) وتقرأ «س تؤول إلى ١ من اليمين»

فإن : د (س) تقترب من العدد ٢ ويسمى العدد ٢ بالنهاية اليمنى للدالة

وتكتب رياضيًا : نهـا$_{س ⟵ ١^+}$ د (س) = ٢ ، أ د (١^+) = ٢

وتقرأ نهاية الدالة عندما (س ⟵ ١^+) تساوى ٢



* وكلما اقتربت س من العدد ١ من جهة اليسار أى (من خلال قيم للمتغير س أصغر من ١)

وتكتب رياضيًا : ($س \leftarrow ١^-$) وتقرأ «س تؤول إلى ١ من اليسار»

فإن : د (س) تقترب من العدد ٢ ويسمى العدد ٢ بالنهاية اليسرى للدالة.

وتكتب رياضيًا : $\lim_{س \leftarrow ١^-}$ د (س) = ٢ أو د (١^-) = ٢

وتقرأ نهاية الدالة عندما ($س \leftarrow ١^-$) تساوى ٢

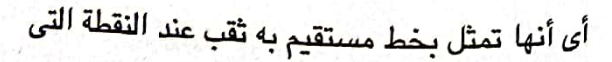
تعريف

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل عندما تقترب س من أ من جهتى اليمين واليسار

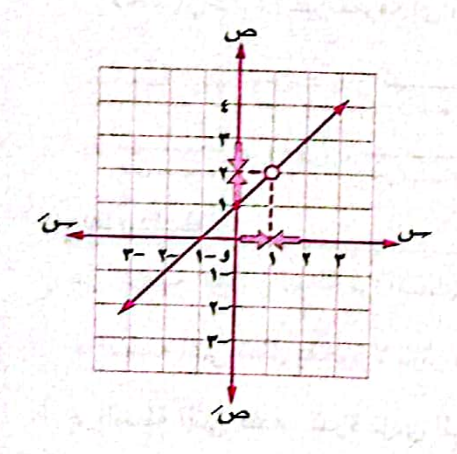
فإن نهاية د (س) تساوى ل وتكتب رمزيًا $\lim_{س \leftarrow أ}$ د (س) = ل

أى أنه إذا كان : د ($أ^+$) = د ($أ^-$) = ل فإن : $\lim_{س \leftarrow أ}$ د (س) = ل

ففى المثال السابق : ∵ د (١^+) = د (١^-) = ٢ ∴ $\lim_{س \leftarrow ١}$ د (س) = ٢



٢ إيجاد النهاية بيانيًا



∵ د (س) = $\frac{س^2 - ١}{س - ١}$ دالة غير معرفة عند س = ١

∴ د (س) = $\frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)}$ = س + ١ ، س ≠ ١

أى أنها تمثل بخط مستقيم به ثقب عند النقطة التى

إحداثيها السينى = ١ كما بالشكل المقابل

ومن الرسم نلاحظ أنه : عند س $\xrightarrow{\text{تؤول إلى}}$ ١ (من اليمين واليسار)

فإن : د (س) $\xrightarrow{\text{تؤول إلى}}$ ٢ أى أن : $\lim_{س \leftarrow ١}$ د (س) = ٢

ملاحظتان

١ عند إيجاد $\lim_{س \leftarrow أ}$ د (س) ليس من الضرورى أن تكون الدالة معرفة عند س = أ ، فقط يجب أن تكون معرفة فى فترة على يسار أ وفترة أخرى على يمين أ

٢ إذا كانت : د ($أ^+$) ≠ د ($أ^-$) فإن : $\lim_{س \leftarrow أ}$ د (س) غير موجودة



ملاحظات هامة عند إيجاد نهاية الدالة بيانيًا :

١ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د (س) نجد أن :

أولًا : عند س = صفر :

نهـــا د (س) = ١ (س ← ٠⁺) ، نهـــا د (س) غير موجودة (س ← ٠⁻)

، نهـــا د (س) غير موجودة (س ← ٠) [لأن الدالة غير معرفة على يسار س = صفر]

ثانيًا : عند س = ١ : نهـــا د (س) = ٠ (س ← ١⁻) ، نهـــا د (س) = ١ (س ← ١⁺)

∴ نهـــا د (س) غير موجودة (س ← ١) [لأن النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى]

لاحظ أنه : بالرغم من أن د معرفة عند س = ١ «د (١) = ١» إلا أن النهاية غير موجودة

ثالثًا : عند س = ٢ : نهـــا د (س) (س ← ٢⁻) = نهـــا د (س) (س ← ٢⁺) = نهـــا د (س) (س ← ٢) = ١

[لاحظ أنه ليس من الضرورى أن قيمة الدالة تساوى قيمة النهاية حيث د (٢) = ٢]

رابعًا : عند س = ٣ : نهـــا د (س) (س ← ٣⁻) = نهـــا د (س) (س ← ٣⁺) = نهـــا د (س) (س ← ٣) = د (٣) = ٢

خامسًا : عند س = ٤ : نهـــا د (س) (س ← ٤⁻) = نهـــا د (س) (س ← ٤⁺) = نهـــا د (س) (س ← ٤) = ١

[لاحظ أن د (٤) غير معرفة أى أن النهاية موجودة على الرغم من أن الدالة غير معرفة]

سادسًا : عند س = ٥ : نهـــا د (س) (س ← ٥⁻) = ٢

، نهـــا د (س) (س ← ٥⁺) ، نهـــا د (س) (س ← ٥) غير موجودتين [لأن الدالة غير معرفة على يمين س = ٥]

ملاحظة

من الرسم البيانى للدالة فى الشكل السابق نجد أن :

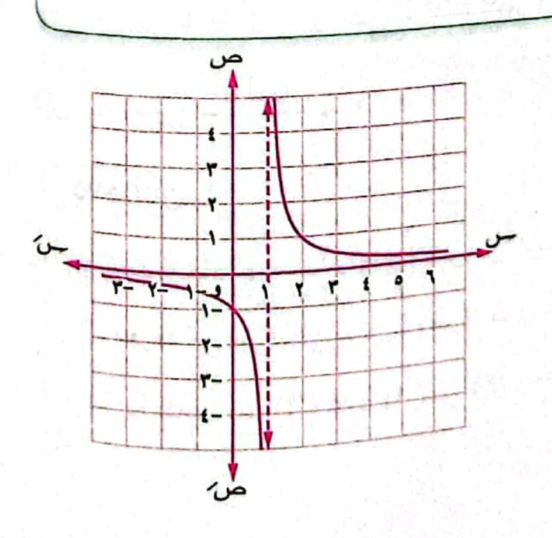
* النقطة التى تمثل بفجوة لا تؤثر فى وجود نهاية عندها **كما فى ثالثًا وخامسًا** .
* النقطة التى عندها قفزة تؤدى إلى عدم وجود نهاية **كما فى ثانيًا** .

٢ الشكل المقابل يمثل الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س - ١}$

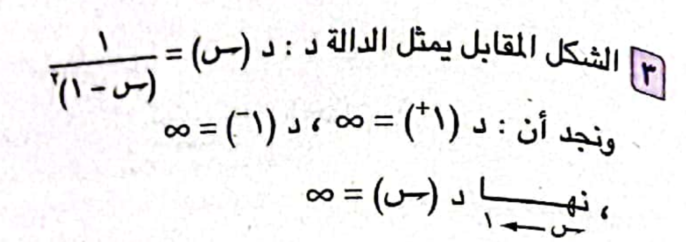
ونجد أن : د (١^+) = ∞ ، د (١^-) = −∞

∴ د (١^+) ≠ د (١^-)

∴ نهـــا د (س) (س ← ١) غير موجودة



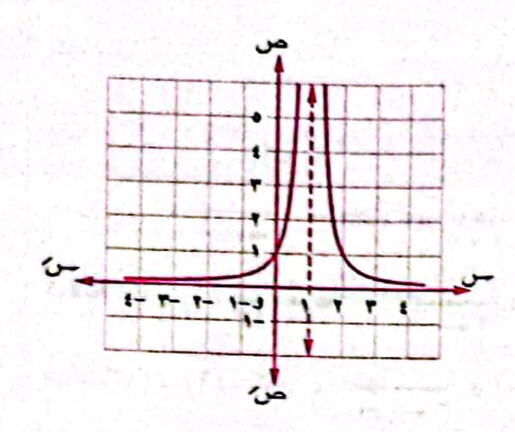




٣ الشكل المقابل يمثل الدالة د : د (س) = $\frac{١}{(س - ١)^{٢}}$

ونجد أن : د (١^{+}) = ∞ ، د (١^{-}) = ∞

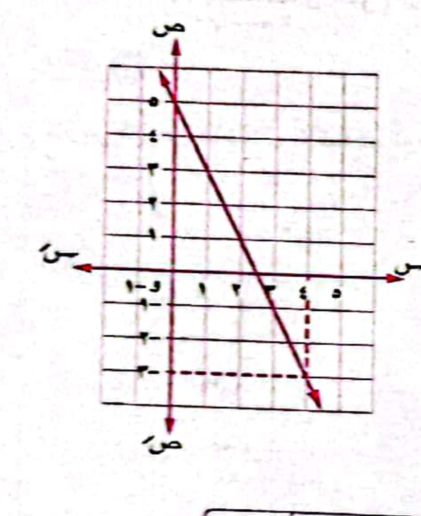
، نهـــا د (س) = ∞ (س ← ١)



مثال ١

أوجد : نهـــا (٥ - ٢ س) (س ← ٤) بيانيًا وعدديًا

الحــل



* **بيانيًا :** نمثل الدالة الخطية د : د (س) = ٥ - ٢ س كما بالشكل المقابل.

نلاحظ أنه عندما س ← ٤ فإن : د (س) ← -٣

أى أن : نهـــا (٥ - ٢ س) (س ← ٤) = -٣

* **عدديًا :** نكون جدولًا لقيم د (س) وذلك باختيار قيم س

تقترب من العدد ٤ من اليمين واليسار كما يلى :

س	٤,١	٤,٠١	٤,٠٠١	.... ٤	٣,٩٩٩	٣,٩٩	٣,٩
د (س)	-٣,٢	-٣,٠٢	-٣,٠٠٢	.... -٣	-٢,٩٩٨	-٢,٩٨	-٢,٨

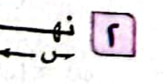
نلاحظ من الجدول أنه كلما تقترب س من العدد ٤ من اليمين أو اليسار

فإن : قيم د (س) تقترب من العدد -٣ ∴ نهـــا (٥ - ٢ س) (س ← ٤) = -٣

مثال ٢

ادرس كلًا من الأشكال الآتية التى تمثل منحنى الدالة د (س) ثم أوجد قيمة :

١ د (٢) **٢** نهـــا د (س) (س ← ٢^{+}) **٣** نهـــا د (س) (س ← ٢^{-}) **٤** نهـــا د (س) (س ← ٢)





شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)



الحـــل

فى شكل (١) : د (٢) غير معرفة ، $\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ د (س) = ١ ، $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ د (س) = ٣

، $\lim_{س \leftarrow ٢}$ د (س) غير موجودة

فى شكل (٢) : د (٢) غير معرفة ، $\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ د (س) = ١ ، $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ د (س) = ١ ، $\lim_{س \leftarrow ٢}$ د (س) = ١

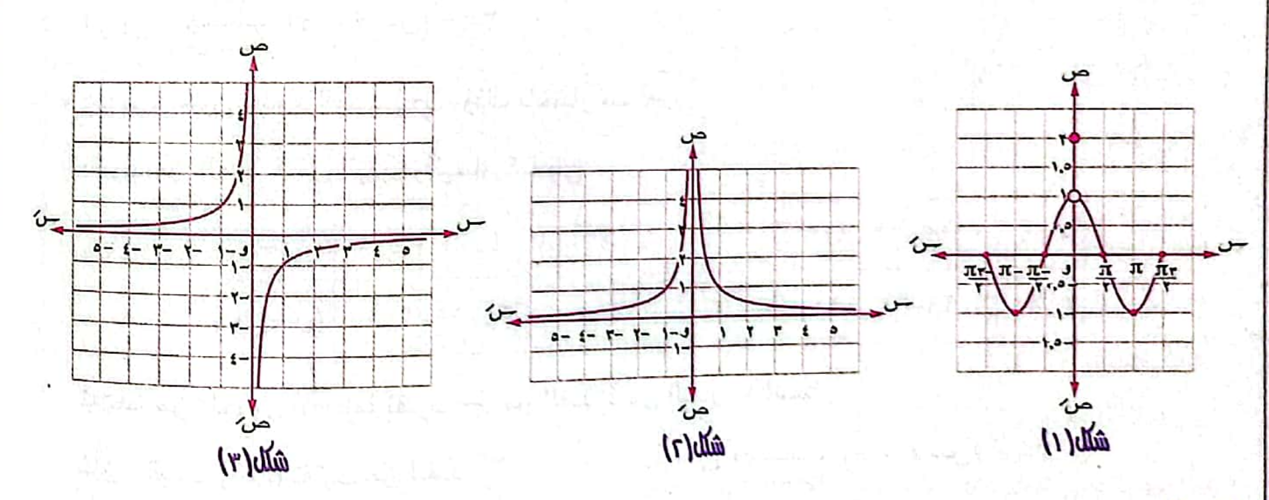
فى شكل (٣) : د (٢) = ٢ ، $\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ د (س) = ٣ ، $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ د (س) = −١

، $\lim_{س \leftarrow ٢}$ د (س) غير موجودة.

مثال ٣

ادرس كلاً من الأشكال الآتية ثم أوجد فى كل شكل قيمة :

1. د (٠)
2. د (٠^+)
3. د (٠^-)
4. $\lim_{س \leftarrow ٠}$ د (س)



الحـــل

فى شكل (١) : د (٠) = ٢ ، د (٠^+) = د (٠^-) = ١ ∴ $\lim_{س \leftarrow ٠}$ د (س) = ١

فى شكل (٢) : د (٠) غير معرفة ، د (٠^+) = د (٠^-) = ∞ ∴ $\lim_{س \leftarrow ٠}$ د (س) = ∞

فى شكل (٣) : د (٠) غير معرفة ، د (٠^+) = −∞ ، د (٠^-) = ∞

∴ $\lim_{س \leftarrow ٠}$ د (س) غير موجودة.



تمارين 12

على مقدمة فى النهايات «إيجاد النهاية عدديًا وبيانيًا»

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم ○ 

مستويات عليا

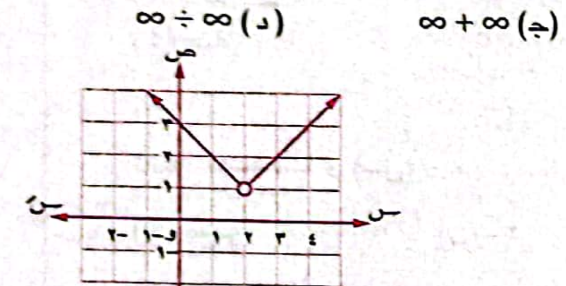
أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① كل الكميات الآتية غير معينة ماعدا ....

(أ) صفر ÷ صفر   (ب) ∞ − ∞   (جـ) ∞ + ∞   (د) ∞ ÷ ∞

② فى الشكل المقابل :

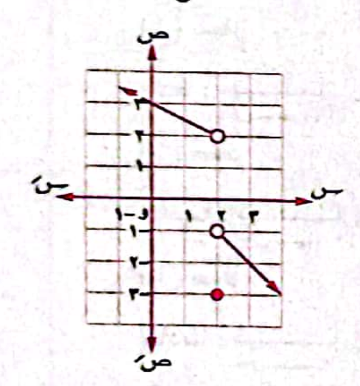


نهـا د (س) = ...
س ← ٢

(أ) ١   (ب) −١

(جـ) غير موجودة.   (د) ٢

③ فى الشكل المقابل :



نهـا د (س) = ...
س ← ٢

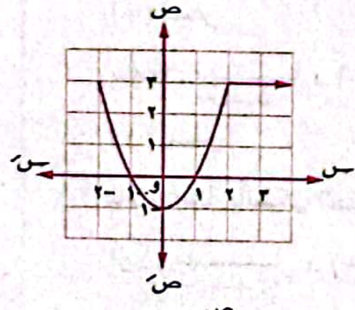
(أ) −٣

(ب) ٢

(جـ) −١

(د) غير موجودة.

④ فى الشكل المقابل :

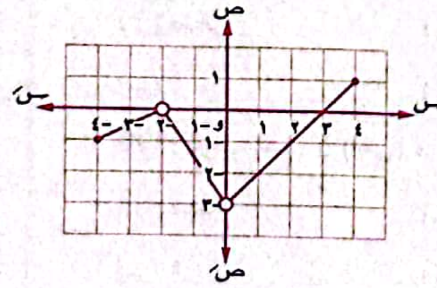


نهـا د (س) = ...
س ← ٢

(أ) صفر   (ب) ٢

(جـ) ٣   (د) غير موجودة.

⑤ من الشكل البيانى المقابل :



أولًا : نهـا د (س) = ...
س ← −٢

(أ) صفر   (ب) −٣

(جـ) −٢   (د) غير موجودة.



ثانيًا : $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) −٣ (د) غير موجودة.

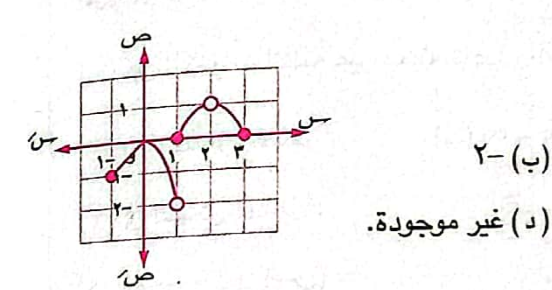
ثالثًا : $\lim_{س \to -٤}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −٤ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

رابعًا : $\lim_{س \to ٤}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

⑥ **بالاستعانة بالشكل المقابل :**



أولًا : $\lim_{س \to ١^+}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −٢

(جـ) ١ (د) غير موجودة.

ثانيًا : $\lim_{س \to ١^-}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

ثالثًا : $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) ١ (د) غير موجودة.

رابعًا : $\lim_{س \to -١^+}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) −٢ (د) غير موجودة.

خامسًا : $\lim_{س \to -١}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) −٢ (د) غير موجودة.

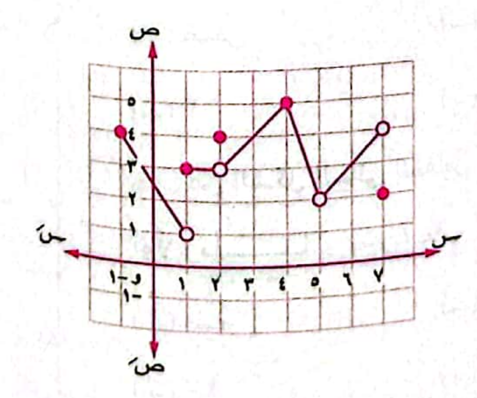
سادسًا : $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) غير موجودة.

سابعًا : $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

⑦ **بالاستعانة بالشكل المقابل :**



أولًا : $\lim_{س \to -١^+}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −١

(جـ) ٤ (د) غير موجودة.

ثانيًا : $\lim_{س \to -١^-}$ د (س) = ...

(أ) صفر (ب) −١

(جـ) ٤ (د) غير موجودة.



ثالثًا : $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) -١　　(جـ) ٤　　(د) غير موجودة.

رابعًا : د (٢) = ...

(أ) صفر　　(ب) ٣　　(جـ) ٤　　(د) غير معرفة.

خامسًا : د (٥) = ...

(أ) صفر　　(ب) ٢　　(جـ) ٥　　(د) غير معرفة.

سادسًا : $\underset{س \to ٥^-}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) ٢　　(جـ) ٣　　(د) غير موجودة.

سابعًا : $\underset{س \to ٥^+}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) ٢　　(جـ) ٣　　(د) غير موجودة.

ثامنًا : $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) ٢　　(جـ) ٣　　(د) غير موجودة.

تاسعًا : $\underset{س \to ٧^-}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) ٢　　(جـ) ٤　　(د) غير موجودة.

عاشرًا : $\underset{س \to ٧}{\text{نهـا}}$ د (س) = ...

(أ) صفر　　(ب) ٢　　(جـ) ٤　　(د) غير موجودة.

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أكمل الجدول الآتى واستنتج : $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) حيث د (س) = ٥ س + ٤

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د (س)	....	....	....	←	؟	→	....	....	....

٢ أوجد كلًا من النهايتين الآتيتين بيانيًا وعدديًا :

① $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ (١ - ٣ س)　　② $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ (س^٢ - ٢)

٣ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د (س) أوجد :

① د (١)

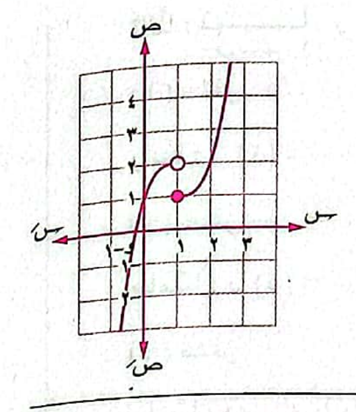
② د (١^+)

③ د (١^-)

④ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ د (س)



٤ ادرس الشكل المقابل الذى يمثل منحنى الدالة د (س) ثم أوجد :



① د (١)

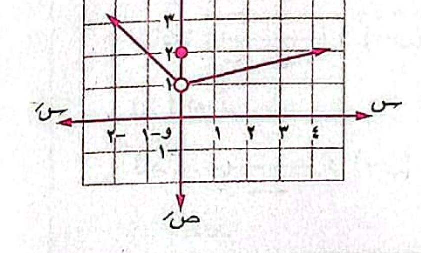
② د (١^-)

③ د (١^+)

④ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ د (س)

---

٥ ادرس الشكل المقابل الذى يمثل منحنى الدالة د (س) ثم أوجد :



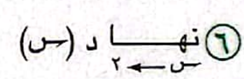
① د (٠)

② د (٠^-)

③ د (٠^+)

④ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$ د (س)

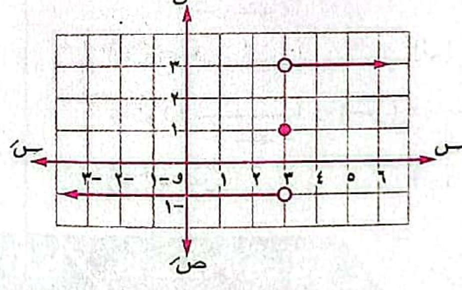
⑤ د (٢)



⑥ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ د (س)

---

٦ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د (س) أوجد ما يأتى :



① د (٣)

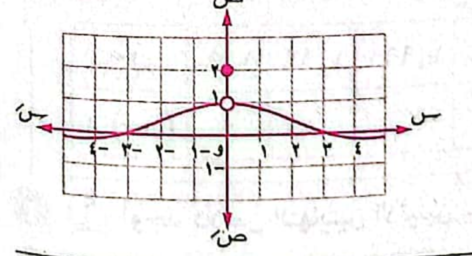
② $\underset{س \leftarrow ٣^-}{\text{نهــا}}$ د (س)

③ $\underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نهــا}}$ د (س)

④ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}}$ د (س)

---

٧ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د (س) أوجد :



① د (٠)

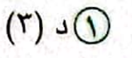
② د (٠^+)

③ د (٠^-)

④ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$ د (س)

---

٨ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د (س) أوجد إن أمكن ما يلى :

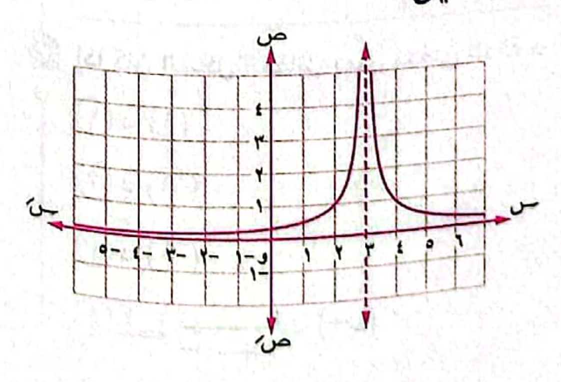


① د (٣)

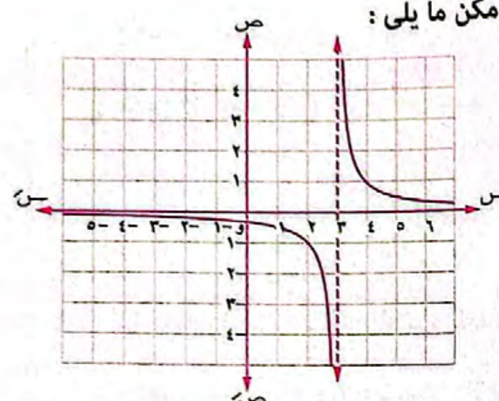
② $\underset{س \leftarrow ٣^-}{\text{نهــا}}$ د (س)

③ $\underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نهــا}}$ د (س)

④ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}}$ د (س)



٩ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د (س) أوجد إن أمكن ما يلى :



① د (٣)

② د (٣^+)

③ د (٣^-)

④ نهـــا د (س)
س ← ٢

---

١٠ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د (س) أوجد :

① 📖 د (٠)

② د (٠^+)

③ د (٠^-)

④ 📖 نهـــا د (س)
س ← ٠

⑤ 📖 د (٢)

⑥ د (٢^+)

⑦ د (٢^-)

⑧ 📖 نهـــا د (س)
س ← ٢

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

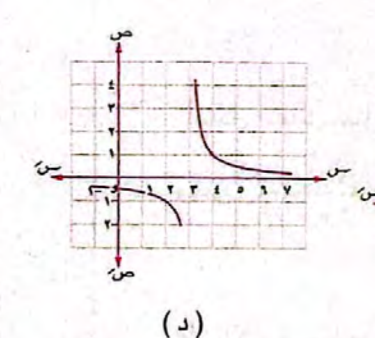
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية لها نهاية عند س = ٣ ؟

(أ)

(ب)

(جـ)



(د)

② الشكل المقابل يمثل دائرة م

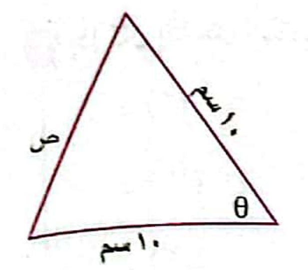
طول نصف قطرها ٥ سم ، $\overline{مح} \perp \overline{أب}$

، طول $\overline{مح}$ = س ، طول $\overline{أب}$ = ص عندما س ← ٠

فإن : ص ← .... سم

(أ) ٢,٥ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠





③ فى الشكل المقابل :

عندما $\theta \leftarrow \frac{\pi}{٢}$ فإن : ص ← .... سم

(أ) صفر (ب) ٥

(جـ) ١٠ (د) $١٠\sqrt{٢}$

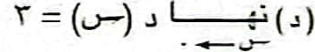
④ إذا قطع منحنى الدالة د الكثيرة الحدود محور السينات عند س = ٢ فإن : ....

(أ) $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = صفر (ب) $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = ٢

(جـ) $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = صفر (د) $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٢

⑤ إذا قطع منحنى الدالة د الكثيرة الحدود محور الصادات عند ص = ٢ فإن : ....

(أ) $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = صفر (ب) $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٢



(جـ) $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = صفر (د) $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = ٢

⑥ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د (س)



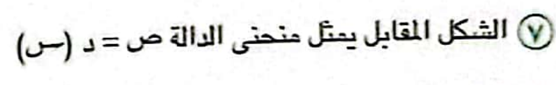
وكان : $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = $\lim_{س \to -١}$ د(س) + $\lim_{س \to ٣}$ د(س)

فإن : أ = ...

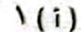
(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٦

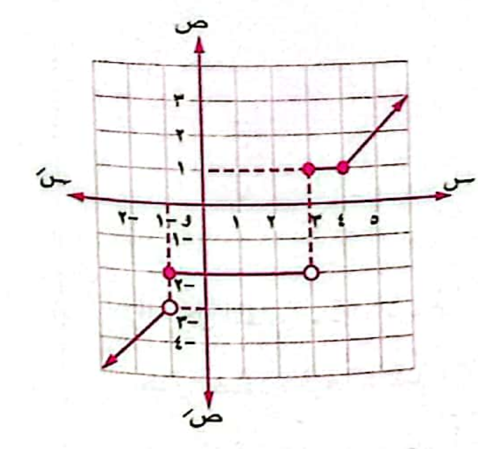
⑦ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د (س)



وكان : $\lim_{س \to أ}$ د(س) = $\lim_{س \to -١}$ د(س) + $\lim_{س \to ٣}$ د(س)



فإن أكبر قيمة للعدد أ = ...



(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤



الدرس 2

إيجاد نهاية الدالة جبرياً

سنعرض الآن بعض النظريات والنتائج التى تساعد فى إيجاد نهاية دالة دون اللجوء إلى الرسم البيانى أو دراسة قيم الدالة.

نظرية ١ نهاية الدالة كثيرة الحدود

إذا كانت : د (س) كثيرة حدود فى المتغير س فإن : $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ د (س) = د (أ)

فمثلاً : $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}$ (٢ س + ٥) = د (٢) = ٢ × ٢ + ٥ = ٩

، $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}$ (س^{٢} − ٣ س + ٢) = د (١) = ١ − ٣ + ٢ = ٠

نتيجة

نهاية الدالة الثابتة

إذا كانت : د (س) = ك حيث ك ثابت فإن : $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ د (س) = $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ك = ك

فمثلاً : $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}$ ٤ = ٤ ، $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}}$ −٥ = −٥

نظرية ٢

إذا كانت د ، ر دالتين فى المتغير س وكانت : $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ د (س) = ل

، $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ر (س) = م حيث ل ، م ∈ ح فإن :

١ $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ [د (س) ± ر (س)] = $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ د (س) ± $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ر (س) = ل ± م

أى أن نهاية المجموع الجبرى لدالتين = المجموع الجبرى لنهايتيهما

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة للمجموع الجبرى لعدد منته من الدوال.



٢ $\lim_{س \to أ} [د(س) \times ر(س)] = \lim_{س \to أ} د(س) \times \lim_{س \to أ} ر(س) = ل \times م$

أى أن نهاية حاصل ضرب دالتين = حاصل ضرب نهايتيهما

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لحاصل ضرب عدد منته من الدوال.

٣ $\lim_{س \to أ} ك \times د(س) = ك \times \lim_{س \to أ} د(س) = ك \times ل$ حيث ك مقدار ثابت.

أى أن نهاية حاصل ضرب ثابت × دالة = الثابت × نهاية هذه الدالة.

٤ $\lim_{س \to أ} \frac{د(س)}{ر(س)} = \frac{ل}{م}$ بشرط أن $م \neq ٠$

أى أن

نهاية خارج قسمة دالتين = خارج قسمة نهايتيهما بشرط ألا تكون نهاية المقسوم عليه = ٠

ويمكن تعميم ذلك بالنسبة لحاصل ضرب عدد منته من الدوال مقسومًا على حاصل ضرب عدد منته من الدوال بشرط أن أيًا من نهايات المقسوم عليه لا يساوى الصفر.

٥ $\lim_{س \to أ} [د(س)]^{ن} = [\lim_{س \to أ} د(س)]^{ن} = ل^{ن}$ ، $ن \in ص^{+}$

مثال ١

أوجد كلاً من النهايات الآتية :

١ $\lim_{س \to ٠} (س^{٢} + ٣س - ٢)$

٢ $\lim_{س \to ١} \frac{(س + ١)}{(٣س - ١)}$

الحل

١ $\lim_{س \to ٠} س^{٢} + ٣س - ٢ = \lim_{س \to ٠} س^{٢} + \lim_{س \to ٠} ٣س - \lim_{س \to ٠} ٢ = ٠ + ٠ - ٢ = -٢$

٢ $\lim_{س \to ١} \frac{س + ١}{٣س - ١} = \frac{\lim_{س \to ١} (س + ١)}{\lim_{س \to ١} (٣س - ١)} = \frac{٢}{٢} = ١$

يمكنك حل المثال السابق مباشرة باستخدام التعويض المباشر دون تقسيم النهايات.

ملاحظة

يمكن استخدام التعويض المباشر وتكون $\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$

إذا كانت الدالة د كثيرة حدود أو دالة كسرية مقامها ≠ صفر عند التعويض عن س = أ

نظرية ٣

إذا كانت : د ، ع دالتين فى المتغير س وكانت : د(س) = ع(س) لجميع قيم $س \in ح - \{أ\}$

وكانت : $\lim_{س \to أ} ع(س) = ل$ فإن : $\lim_{س \to أ} د(س) = ل$



استخدام النظرية السابقة :

تستخدم هذه النظرية لإيجاد نهاية دالة كسرية جبرية

(أى نهاية كسر كل من بسطه ومقامه عبارة عن دالة كثيرة حدود)

ولتكن د (س) عندما س ← أ وذلك عندما يكون كل من البسط والمقام يساوى صفر عند س = أ وهذا معناه أن (س − أ) يكون عاملاً مشتركًا بين البسط والمقام.

للاحظ أن

س ← أ تعنى أن

(س − أ) ← صفر

أى أن (س − أ) ≠ صفر

ولهذا السبب تم الاختصار

ولإيجاد $\lim_{س \to أ}$ د (س) فى هذه الحالة فإننا نختصر العامل (س − أ) وذلك عن طريق التحليل أو القسمة المطولة فنحصل على دالة جديدة ولتكن ى (س) تكون مساوية للدالة د (س) عندما س ≠ أ

فتكون $\lim_{س \to أ}$ د (س) = $\lim_{س \to أ}$ ى (س) والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$ ٢ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ ٣ $\lim_{س \to -١} \frac{(٢ س + ٣)^٢ - ١}{س^٢ + س}$

الحل

١ بفرض د (س) = $\frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$ ∴ د (٤) = $\frac{٤^٢ - ١٦}{٤ - ٤} = \frac{صفر}{صفر}$

∴ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} (س + ٤) = ٤ + ٤ = ٨$

٢ بفرض د (س) = $\frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ ∴ د (٢) = $\frac{٢^٣ - ٨}{٢^٢ - ٥ (٢) + ٦} = \frac{صفر}{صفر}$

∴ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٥ س + ٦} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢ س + ٤)}{(س - ٢)(س - ٣)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٢ س + ٤}{س - ٣} = \frac{٢^٢ + ٢ (٢) + ٤}{٢ - ٣} = -١٢$

٣ بفرض د (س) = $\frac{(٢ س + ٣)^٢ - ١}{س^٢ + س}$ ∴ د (−١) = $\frac{(-٢ + ٣)^٢ - ١}{(-١)^٢ - ١} = \frac{صفر}{صفر}$

∴ $\lim_{س \to -١} \frac{(٢ س + ٣)^٢ - ١}{س^٢ + س} = \lim_{س \to -١} \frac{(٢ س + ٣ - ١)(٢ س + ٣ + ١)}{س (س + ١)}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{(٢ س + ٢)(٢ س + ٤)}{س (س + ١)} = \lim_{س \to -١} \frac{٢ (س + ١) \times ٢ (س + ٢)}{س (س + ١)}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{٤ (س + ٢)}{س} = \frac{٤ (-١ + ٢)}{-١} = -٤$



مثال ٣

أوجد : $نهـا_{س \leftarrow ٢} \dfrac{س^٣ - ٧س + ٦}{٣س^٢ - ٨س + ٤}$

الحـل

بفرض د(س) $= \dfrac{س^٣ - ٧س + ٦}{٣س^٢ - ٨س + ٤}$

$\therefore$ د(٢) $= \dfrac{(٢)^٣ - ٧(٢) + ٦}{٣(٢)^٢ - ٨(٢) + ٤} = \dfrac{صفر}{صفر}$

$\therefore$ (س − ٢) عامل مشترك بين البسط والمقام

وبإجراء قسمة مطولة للبسط على (س − ٢)

$\therefore$ $س^٣ \quad - ٧س + ٦$ | س − ٢

$\ominus س^٣ \oplus ٢س^٢$ | $س^٢ + ٢س - ٣$

$٢س^٢ - ٧س + ٦$

$\ominus ٢س^٢ \oplus ٤س$

$-٣س + ٦$

$\oplus -٣س \ominus ٦$

$\therefore$ البسط $= (س - ٢)(س^٢ + ٢س - ٣)$

$\therefore$ $نهـا_{س \leftarrow ٢} \dfrac{س^٣ - ٧س + ٦}{٣س^٢ - ٨س + ٤} = نهـا_{س \leftarrow ٢} \dfrac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س - ٣)}{(س - ٢)(٣س - ٢)} = نهـا_{س \leftarrow ٢} \dfrac{س^٢ + ٢س - ٣}{٣س - ٢}$

$= \dfrac{٤ + ٤ - ٣}{٦ - ٢} = \dfrac{٥}{٤}$

تذكر أنه !

في عملية القسمة المطولة :

(١) نرتب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه بحسب قوى س ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا بنفس الطريقة مع ترك مكان فارغ للقوى غير الموجودة.

(٢) نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه ونكتب ناتج القسمة.

(٣) نضرب ناتج القسمة في المقسوم عليه ونطرح الناتج من المقسوم للحصول على الباقي.

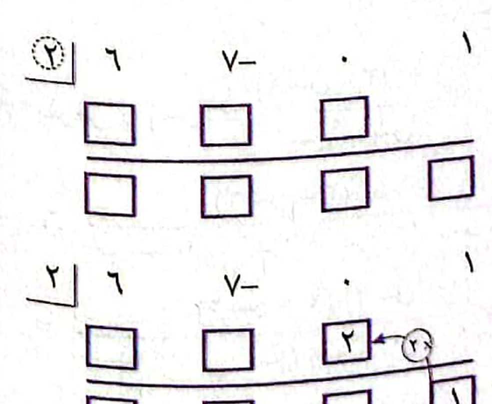
(٤) نستمر بنفس الطريقة حتى الانتهاء من عملية القسمة.

ملاحظة

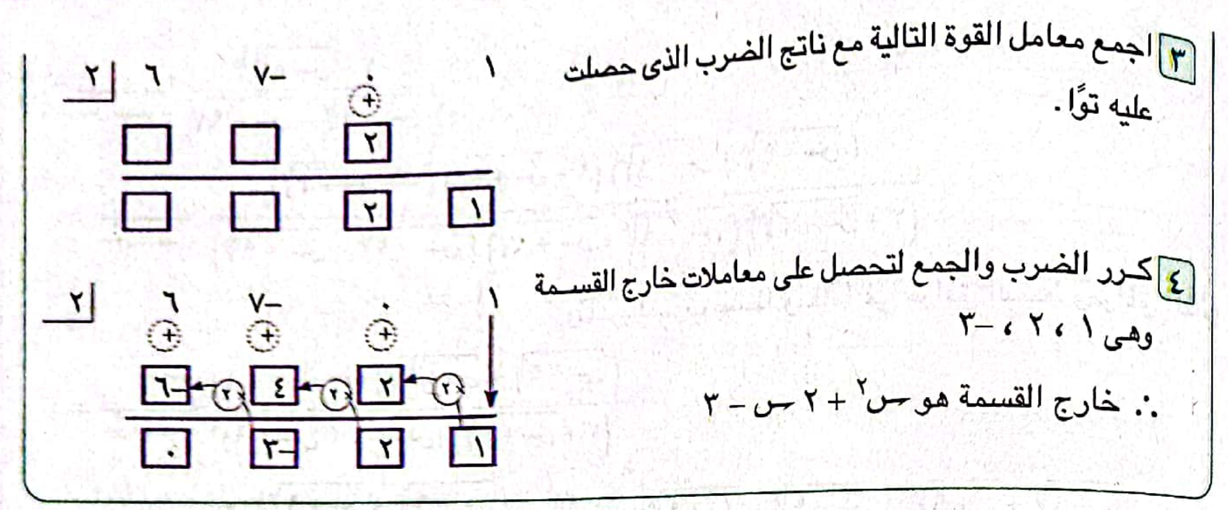
يمكن في حالة القسمة على مقدار من الدرجة الأولى ومعامل س = ١ أي على الصورة (س − ⓐ) استخدام طريقة القسمة التركيبية كتسهيل لطريقة القسمة المطولة ويمكن استخدامها في المثال السابق كما يلي لقسمة $(س^٣ - ٧س + ٦)$ على (س − ②)

١ نرتب المعاملات حسب قوى س التصاعدية أو التنازلية مع وضع (٠) كمعامل للقوى غير الموجودة مع وضع الـ ② (وهي صفر المقسوم عليه) في خانة المقسوم عليه.

٢ يترك معامل أكبر قوى لينزل للصف الثالث مباشرة ثم يضرب في الـ ٢ ونضع ناتج الضرب في خانة الصف الثاني بالعمود المجاور مباشرة.







حل آخر للمثال السابق :

يمكن استخدام التحليل بالتقسيم وذلك بمعلومية أن (س − ٢) عامل من عوامل البسط كالتالى.

$$\lim_{س \to 2} \frac{س^3 - 7س + 6}{3س^2 - 8س + 4} = \lim_{س \to 2} \frac{(س^3 - 8) + (-7س + 14)}{(س - 2)(3س - 2)}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{(س - 2)(س^2 + 2س + 4) - 7(س - 2)}{(س - 2)(3س - 2)}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{\cancel{(س - 2)}(س^2 + 2س + 4 - 7)}{\cancel{(س - 2)}(3س - 2)} = \frac{2^2 + 2 \times 2 - 3}{3 \times 2 - 2} = \frac{5}{4}$$

ملاحظة هامة

فى حالة وجود فرق بين جذرين تربيعيين لمقدارين جبريين (فى البسط أ، فى المقام أ، فى كليهما) فإننا نضرب كلاً من البسط والمقام فى مرافق (البسط أ، المقام أ، كليهما) وذلك عندما تكون نتيجة التعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$ والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال ٤

أوجد كلاً مما يأتى : ١ $\lim_{س \to 0} \frac{س^2 + 2س}{\sqrt{س + 9} - 3}$ ٢ $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{4 + س} - 2}{\sqrt{9 + س} - \sqrt{9 - س}}$

الحل

بالتعويض عن س = ٠ فى كل من الدالتين السابقتين سنجد أن قيمة كل منهما = $\frac{صفر}{صفر}$

١ $\lim_{س \to 0} \frac{س^2 + 2س}{\sqrt{س + 9} - 3} = \lim_{س \to 0} \frac{س^2 + 2س}{\sqrt{س + 9} - 3} \times \frac{\sqrt{س + 9} + 3}{\sqrt{س + 9} + 3}$

(وذلك بالضرب بسطًا ومقامًا فى مرافق المقام)

$$= \lim_{س \to 0} \frac{س(س + 2)(\sqrt{س + 9} + 3)}{(س + 9) - 9}$$

$$= \lim_{س \to 0} (س + 2)(\sqrt{س + 9} + 3) = (0 + 2)(\sqrt{0 + 9} + 3) = 12$$





٢ $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{4+س} - 2}{\sqrt{9+س} - \sqrt{9-س}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{(\sqrt{4+س} - 2)(\sqrt{4+س} + 2)(\sqrt{9+س} + \sqrt{9-س})}{(\sqrt{9+س} - \sqrt{9-س})(\sqrt{9+س} + \sqrt{9-س})(\sqrt{4+س} + 2)}$

(وذلك بالضرب بسطًا ومقامًا فى مرافق البسط ومرافق المقام)

$= \lim_{س \to 0} \frac{(4+س-4)(\sqrt{9+س} + \sqrt{9-س})}{(9+س-9+س)(\sqrt{4+س} + 2)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س(\sqrt{9+س} + \sqrt{9-س})}{2س(\sqrt{4+س} + 2)} = \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{9+س} + \sqrt{9-س}}{2(\sqrt{4+س} + 2)} = \frac{\sqrt{9+0} + \sqrt{9-0}}{2(\sqrt{4+0} + 2)} = \frac{3}{4}$

مما سبق نستنتج أن

لإيجاد $\lim_{س \to أ}$ د (س) نوجد د (أ) بالتعويض المباشر عن س = أ فى الدالة فإذا كان الناتج :

١ عدد حقيقى ب فإن : $\lim_{س \to أ}$ د (س) = ب

٢ $\frac{صفر}{صفر}$ «كمية غير معينة» نقوم بقسمة كل من البسط والمقام على (س − أ)

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\lim_{س \to -2} \frac{س - 3}{س^2 + 1}$

٢ $\lim_{س \to 2} \left(\frac{س^2 - س}{س - 2} - \frac{2}{س - 2}\right)$

الحل

التعويض المباشر يعطى عددًا حقيقيًا

١ ∵ د (−٢) = $\frac{-2-3}{(-2)^2+1} = -1$ ∴ $\lim_{س \to -2} \frac{س - 3}{س^2 + 1} = -1$

٢ بفرض د (س) = $\frac{س^2 - س}{س - 2} - \frac{2}{س - 2}$ ∴ د (س) = $\frac{س^2 - س - 2}{س - 2}$

∴ د (٢) = $\frac{4 - 2 - 2}{2 - 2} = \frac{صفر}{صفر}$

التعويض المباشر يعطى $\frac{صفر}{صفر}$ «كمية غير معينة»

∴ $\lim_{س \to 2} \left(\frac{س^2 - س}{س - 2} - \frac{2}{س - 2}\right) = \lim_{س \to 2} \frac{س^2 - س - 2}{س - 2}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{(س - 2)(س + 1)}{س - 2}$

$= \lim_{س \to 2} (س + 1) = 2 + 1 = 3$



مثال ٦

إذا كانت : $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{د}(\text{س}) - ٧}{\text{س} - ٣} = ٤$ **فأوجد :** $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \text{د}(\text{س})$

الحل

$\because \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{د}(\text{س}) - ٧}{\text{س} - ٣}$ موجودة وتساوى ٤

، $\because \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} (\text{س} - ٣) = \text{صفر}$ $\therefore \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} (\text{د}(\text{س}) - ٧) = \text{صفر}$

$\therefore \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} (٧) = ٧$

معلومة إثرائية

النهاية التى يعطى فيها التعويض المباشر $\frac{\text{عدد حقيقى} \neq \text{صفر}}{\text{صفر}}$ «كمية غير معرفة»

الشكل المقابل :

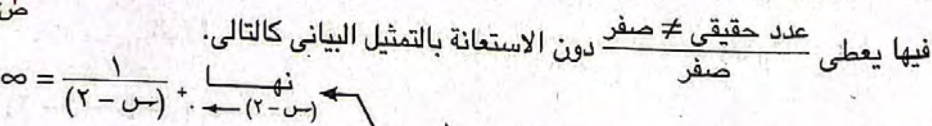
يمثل الدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$ بيانيًا ونلاحظ منه أن :

١ $\underset{\text{س} \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س}} = \infty$

٢ $\underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س}} = -\infty$

٣ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س}}$ غير موجودة لأن $\text{د}(٠)^+ \neq \text{د}(٠)^-$

ومما سبق يمكن ايجاد نهايات أخرى التعويض المباشر



فيها يعطى $\frac{\text{عدد حقيقى} \neq \text{صفر}}{\text{صفر}}$ دون الاستعانة بالتمثيل البيانى كالتالى:

١ $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س} - ٢} = \underset{(\text{س}-٢) \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{(\text{س} - ٢)}$

$\underset{(\text{س}-٢) \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{١}{(\text{س} - ٢)} = \infty$

$\underset{(\text{س}-٢) \to ٠^-}{\text{نها}} \frac{١}{(\text{س} - ٢)} = -\infty$

$\therefore$ النهاية اليمنى $\neq$ النهاية اليسرى. $\therefore \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س} - ٢}$ غير موجودة.

٢ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س}^٢}$

$\underset{\text{س} \to ٠^+}{\text{نها}} \left(\frac{١}{\text{س}}\right)^٢ = \left(\underset{\text{س} \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س}}\right)^٢ = (\infty)^٢ = \infty$

$\underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نها}} \left(\frac{١}{\text{س}}\right)^٢ = \left(\underset{\text{س} \to ٠^-}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س}}\right)^٢ = (-\infty)^٢ = \infty$

$\therefore$ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى. $\therefore \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س}^٢} = \infty$

٣ $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \frac{٣\text{س} + ٤}{\text{س} + ١}$

$= \underset{\text{س}+١ \to ٠}{\text{نها}} (٣\text{س} + ٤) \times \frac{١}{(\text{س} + ١)}$

$\underset{(\text{س}+١) \to ٠^+}{\text{نها}} (٣\text{س} + ٤) \times \frac{١}{(\text{س} + ١)} = ١ \times \infty = \infty$

$\underset{(\text{س}+١) \to ٠^-}{\text{نها}} (٣\text{س} + ٤) \times \frac{١}{(\text{س} + ١)} = ١ \times -\infty = -\infty$

$\therefore$ النهاية اليمنى $\neq$ النهاية اليسرى. $\therefore \underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \frac{٣\text{س} + ٤}{\text{س} + ١}$ غير موجودة.





تمارين 13 على إيجاد نهاية الدالة جبريًا

من أسئلة الكتاب المدرس • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim_{س \to \frac{1}{2}} (١٠) = ...$

(أ) ٥ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ (د) $\frac{1}{2}$ ١٠

② $\lim_{س \to ٤} (٢س - \sqrt{س}) = ...$

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د) ١٦

③ $\lim_{س \to ٢} (٣ أ^٢) = ...$

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٣ أ^٢ (د) ١٢

④ $\lim_{س \to أ} (٢س^٢ - أس - أ^٢) = ...$ حيث أ ∈ ح

(أ) صفر (ب) أ (جـ) ٤ أ^٢ (د) أ^٢ − ٢ أ

⑤ $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} (٢س - جاس) = ...$

(أ) π (ب) $\pi + ١$ (جـ) $\pi - ١$ (د) $٢\pi - ١$

⑥ $\lim_{س \to ٢} \sqrt{\frac{٣ + ٢س}{٤س - ١}} = ...$

(أ) −٣ (ب) ١ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $-\frac{1}{2}$

⑦ $\lim_{س \to ٣} \frac{٢س - ٦}{٧س - ٢١} = ...$

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٧}$ (جـ) $\frac{٣}{٧}$ (د) ٣

⑧ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - س}{س} = ...$

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) غير موجودة. (د) ١

⑨ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٧س + ١٢}{س - ٣} = ...$

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٧ (د) −٢



(١٠) $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^٢ + \text{س}}{\text{س}^٣ + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) -١ (د) ليس لها وجود.

(١١) 📖 $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}{\text{س}^٢ + \text{س} - ١٢}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (جـ) -١ (د) -٥

(١٢) $\underset{\text{س} \to -٤}{\text{نهــا}} \dfrac{٣\text{س}^٢ - ٤٨}{\text{س} + ٤}$ = ...

(أ) ٣٢ (ب) -٣٢ (جـ) ٢٤ (د) -٢٤

(١٣) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - ٤}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{-٢}{٥}$

(١٤) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{٣\text{س} + ٢\text{س}^{-١}}{\text{س} + ٤\text{س}^{-١}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(١٥) $\underset{\text{س} \to \sqrt{٥}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^٤ - \text{س}^٢ - ٢٠}{\text{س} - \sqrt{٥}}$ = ...

(أ) ٩ (ب) $٢\sqrt{٥}$ (جـ) $٩\sqrt{٥}$ (د) $١٨\sqrt{٥}$

(١٦) $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س} - ٣)^٢ - ١}{\text{س} - ٤}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٧) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ١} - ١}{\text{س}}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ليس لها وجود.

(١٨) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ١} - ٢}{\text{س} - ٣}$ = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٦ (د) $\frac{١}{٦}$

(١٩) $\underset{\text{س} \to ٩}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{٢} - \sqrt{\text{س} - ٧}}{\text{س} - ٩}$ = ...

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ (جـ) $\frac{-\sqrt{٢}}{٤}$ (د) $-٢\sqrt{٢}$

(٢٠) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{٤ - \sqrt{\text{س} + ١٥}}{١ - \text{س}^٢}$ = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٨}$ (جـ) $\frac{١}{١٦}$ (د) -٤



(٢١) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{٥ س^٢ - ٢٣ س + ١٢} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{١}{٩٢}$ (ب) $\frac{١}{٦٨}$ (جـ) ٦٨ (د) ٩٢

(٢٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٣)^٢ - ١}{\sqrt{س + ٢} - ٢} = \dots\dots\dots$

(أ) −٦ (ب) −٨ (جـ) −٢ (د) غير موجودة.

(٢٣) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٢ س - ١} - ١}{\sqrt{٣ س + ١} - ٢} = \dots\dots\dots$

(أ) ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٢٤) $\lim_{س \to ١} \left(\frac{س^٢}{س - ١} - \frac{١}{س - ١}\right) = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) غير موجودة.

(٢٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٧ س + ٦}{٣ س^٢ - ٨ س + ٤} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{١}{٣}$

(٢٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{٣ (س - ٢)^٣ + ٢ س^٢ - ٨}{س - ٢} = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(٢٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{٧ + ٢ س}{جا س} = \dots\dots\dots$

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١

(٢٨) 📖 $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{ظا س}{س} = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{٤}{\pi}$ (د) ليس لها وجود.

(٢٩) إذا كان : $\lim_{س \to ٥} د(س) = ٤$ فإن : $\lim_{س \to ٥} [د(س) - ٤] = \dots\dots\dots$

(أ) ٤ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ٨

(٣٠) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٣}{س - ٢} = \dots\dots\dots$

(أ) −١ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ليس لها وجود.

(٣١) إذا كانت : $\lim_{س \to م} \frac{٢ س^٢ - س - ٣}{٤ س^٢ - ٩} = \frac{٥}{١٢}$ فإن : م = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{-٢}{٣}$



(٣٢) إذا كانت : $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ٣س - ٤}{س + أ} = ٥$ فإن : أ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ٤

(٣٣) 📖 إذا كانت : $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٤أ}{س - ٢}$ لها وجود فإن : أ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٣٤) إذا كان : $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٢س + ك}{س^{٢} - ٩} = م$ حيث م ∈ ح فإن : ك × م = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) −١

(٣٥) إذا كانت : $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ك س + م}{س^{٢} - ١} = ٣$ فإن : ك + م = ...

(أ) −٤ (ب) −٥ (جـ) −٨ (د) −٩

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٢٥}{س - ٥}$ «١٠»

(٢) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٨س + ١٥}{س - ٣}$ «−٢»

(٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}}{٣س^{٣} - ٢س^{٢}}$ «$-\frac{١}{٢}$»

(٤) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٥س - ١٠}{٤س - ٨}$ «$\frac{٥}{٤}$»

(٥) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{٤س^{٢} - ٦٤}{س - ٤}$ «٣٢»

(٦) 📖 $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{٢س - ٨}{س^{٢} - س - ١٢}$ «$\frac{٢}{٧}$»

(٧) 📖 $\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ٤س + ٣}{س^{٢} - ٩}$ «$\frac{١}{٣}$»

(٨) 📖 $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٢س}{س^{٢} - س - ٢}$ «$\frac{٢}{٣}$»

(٩) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٣س - ٤}{س^{٢} - س - ٢}$ «$\frac{٥}{٣}$»

(١٠) $\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٢س^{٢} - ٥س + ٢}{٢س - ١}$ «$\frac{-٣}{٢}$»

(١١) 📖 $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \frac{٩ - س}{س^{٢} - ٨١}$ «$-\frac{١}{١٨}$»

(١٢) 📖 $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٣س^{٢} + س - ٤}{س^{٢} - ١}$ «$\frac{٧}{٢}$»

(١٣) $\underset{س \to \frac{٣}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{١٦س^{٢} - ٩}{٨س - ٦}$ «٣»

(١٤) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{٢س^{٢} - ٥س - ٣}{٢س^{٢} - ٣س - ٩}$ «$\frac{٧}{٩}$»

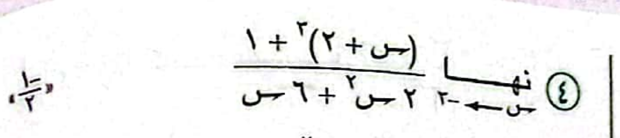
(١٥) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ٢س - ١٥}{٥س^{٢} - ٤٥}$ «$\frac{٤}{١٥}$»

(١٦) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٨}{٣س^{٢} - ١٢}$ «١»

٢ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)^{٢} - ٤}{س^{٢} + س}$ «٤»

(٢) 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(٢س - ١)^{٢} - ١}{٥س}$ «$\frac{-٤}{٥}$»



③ نهـا$_{س \to ٢}$ $\frac{(س - ٣)^{٢} - ١}{٢س^{٢} - ٣س - ٢}$ «$\frac{-٢}{٥}$»

④ نهـا$_{س \to -٢}$ $\frac{(س + ٢)^{٣} + ١}{٢س^{٢} + ٦س}$ «$\frac{-١}{٢}$»

⑤ نهـا$_{س \to ٢}$ $\frac{س^{٤} + س^{٢} - ٢٠}{س - ٢}$ «٣٦»

⑥ نهـا$_{س \to ٢}$ $\frac{(س^{٢} - ٤)^{٢}}{س - ٢}$ «صفر»

⑦ نهـا$_{س \to ١}$ $\frac{٢س - ٢}{(س - ١)^{٥} + ٢س - ٢}$ «١»

⑧ 📖 نهـا$_{س \to -٢}$ $\frac{س + ٢}{س^{٤} - ١٦}$ «$-\frac{١}{٣٢}$»

⑨ 📖 نهـا$_{س \to ٩}$ $\frac{س + \sqrt{س} - ١٢}{س - ٩}$ «$\frac{٧}{٦}$»

⑩ 📖 نهـا$_{س \to ٠}$ $\frac{\frac{١}{٢ + س} - \frac{١}{٢}}{س}$ «$-\frac{١}{٤}$»

⑪ نهـا$_{س \to ٢}$ $\frac{س^{٤} - ٢س^{٣} - ٦س + ١٢}{س^{٢} + س - ٦}$ «$\frac{٢}{٥}$»

⑫ نهـا$_{س \to ٣}$ $\left(\frac{٥}{س} + \frac{س^{٢} - ٣س}{س - ٣}\right)$ «$\frac{١٤}{٣}$»

⑬ نهـا$_{س \to -١}$ $\left(\frac{س^{٢}}{س^{٢} - ١} - \frac{٣س + ٤}{س^{٢} - ١}\right)$ «$\frac{٥}{٢}$»

⑭ 📖 نهـا$_{س \to ١}$ $\left(\frac{١}{س - ١} - \frac{٢}{س^{٢} - ١}\right)$ «١»

٣ أوجد كلاً مما يأتى :

① نهـا$_{س \to ٤}$ $\frac{س^{٣} - ١٥س - ٤}{س - ٤}$ «٣٣»

② نهـا$_{س \to ١}$ $\frac{س^{٣} - ٢س + ١}{س^{٢} + س - ٢}$ «$\frac{١}{٣}$»

③ نهـا$_{س \to ٤}$ $\frac{س^{٤} - ٢١س^{٢} + ٢٠س}{س - ٤}$ «١٠٨»

④ نهـا$_{س \to -٢}$ $\frac{٢س^{٣} + ٣س^{٢} + ٤}{س^{٣} + ٨}$ «١»

⑤ 📖 نهـا$_{س \to -٢}$ $\frac{س^{٢} + ٤س + ٤}{س^{٣} + س^{٢} - ٨س - ١٢}$ «$-\frac{١}{٥}$»

⑥ نهـا$_{س \to ١}$ $\frac{س^{٣} - ٥س^{٢} + ٧س - ٣}{س^{٣} - ٢س^{٢} + س}$ «−٢»

٤ أوجد كلاً مما يأتى :

① نهـا$_{س \to ٩}$ $\frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩}$ «$\frac{١}{٦}$»

② 📖 نهـا$_{س \to ٥}$ $\frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$ «$\frac{١}{٤}$»

③ 📖 نهـا$_{س \to -١}$ $\frac{س + ١}{\sqrt{س + ٥} - ٢}$ «٤»

④ نهـا$_{س \to ٠}$ $\frac{\sqrt{٣ - ٢س} - \sqrt{٣}}{س}$ «$-\frac{١}{\sqrt{٣}}$»

⑤ نهـا$_{س \to ٠}$ $\frac{\sqrt{٢س + ٩} - ٣}{س^{٢} + س}$ «$\frac{١}{٣}$»

⑥ 📖 نهـا$_{س \to ٥}$ $\frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣}$ «٣٠»



⑦ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - س - ٦}{\sqrt{٥س - ٦} - ٢}$ «٦»

⑧ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + س} - \sqrt{١ - س}}{٢س}$ «$\frac{١}{٢}$»

⑨ $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س}}$ «١»

⑩ 📖 $\lim_{س \to -١} \frac{\sqrt{س^٢ + ٨} - ٣}{س + ١}$ «$-\frac{١}{٣}$»

⑪ $\lim_{س \to ١} \frac{١ - س}{٢ - \sqrt{س^٢ + ٣}}$ «٢»

⑫ $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{\sqrt{س - ٢} - ١}$ «$\frac{١}{٢}$»

⑬ $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{٢٤ - ٥س} - ٢}{٣ - \sqrt{س + ٥}}$ «٧,٥»

⑭ $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س - \sqrt{س + ٦}}$ «$\frac{٦}{٥}$»

٥ 📖 إذا كانت : $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - ٥}{س - ٢} = ١$ فأوجد : $\lim_{س \to ٢} د(س)$ «٥»

٦ 📖 إذا كانت : $\lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س^٢} = ٥$ فأوجد :

① $\lim_{س \to ٠} د(س)$ ② $\lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س}$ «صفر ، صفر»

٧ إذا كانت : $\lim_{س \to -١} \frac{س^٢ - (أ - ١)س - أ}{س + ١} = ٤$ أوجد : قيمة أ «-٥»

٨ إذا كانت : $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + أس + ب}{س - ١} = ٥$ أوجد : قيمة كل من أ ، ب «٣ ، -٤»

٩ 📖 **الربط بالتجارة :** وجدت شركة أنها لو أنفقت س من الجنيهات للدعاية لمنتجها ، فإن ربحها يعطى بالعلاقة $د(س) = ٠,٢س^٢ + ٤٠س + ١٥٠$ ، أوجد مقدار ربح الشركة عندما يقترب إنفاقها على الدعاية من ١٠٠ جنيه. «٦١٥٠ جنيهًا»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د دالة تحقق أن : $س\left(د(س) + ١\right) = د(س) + س^٢$

فإن : $\lim_{س \to ١} د(س) = $ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

② إذا كانت : $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{مس + ك} - ٢}{س} = ٢$ فإن : $\frac{م}{ك} = $ ....

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) $\frac{٤}{٣}$



③ إذا كانت : $\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \left(٢\ \text{د}(\text{س}) - ٥\ \text{هـ}(\text{س})\right) = ١٠$

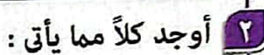
، $\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \left(\text{د}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\right) = ٦$ فإن : $\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})} =$ ....

(أ) $\frac{٤٠}{٧}$ (ب) $\frac{٢}{٧}$ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

④ إذا كانت : ى(س) دالة وكانت $\underset{\text{س}\to٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{ى}(\text{س}) - ٨}{\text{س} - ٢} = ٧$

فإن : $\underset{\text{س}\to٢}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٢} - \text{ى}(\text{س})}{\text{س} - ٢} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٥



٢ أوجد كلاً مما يأتي :

① $\underset{\text{س}\to٥}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٥}\right)^{٢}$ «$\frac{٩}{٤}$»

② $\underset{\text{س}\to١}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - \text{س}}}$ «٢»

③ $\underset{\text{س}\to\sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س}^{٢} + \sqrt{٢}\ \text{س} - ٤}$ «$\frac{٢}{٣}$»

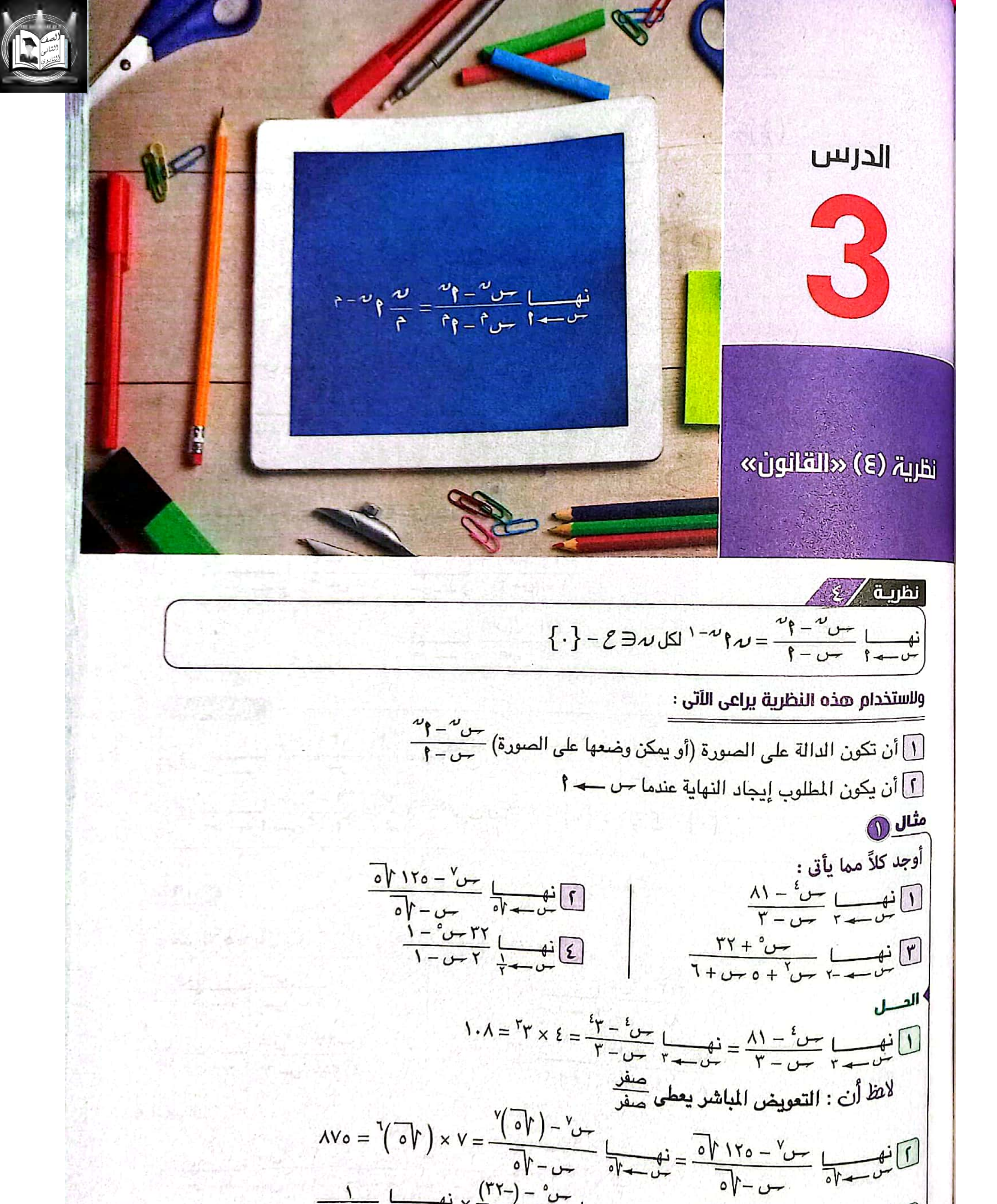
④ $\underset{\text{س}\to١}{\text{نهـا}} \frac{٥\text{س}^{-٣} + ٢\text{س}^{-١} - ٧}{٣\text{س}^{-٢} + \text{س}^{-٣} - ٤}$ «$\frac{١٧}{٩}$»

⑤ $\underset{\text{طا س}\to٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا}^{٢}\text{س} - ٢\ \text{طا س} - ٣}{\text{طا}^{٢}\text{س} - ٤\ \text{طا س} + ٣}$ «٢»

⑥ $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حتا}^{٢}\text{س} - ٥\ \text{حتا س} + ٤}{\text{حا}^{٢}\text{س}}$ «$\frac{٣}{٢}$»

⑦ $\underset{(\text{س}-٤)\to٤}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢)(\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤)}{\text{س}^{٢} - ٦٤}$ «$\frac{١}{١٦}$»

⑧ $\underset{\text{س}\to١}{\text{نهـا}} \left(\frac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣} + ٢}{\text{س}^{٢} - \text{س}} - \frac{٢}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣} - ٢}\right)$ «−٢»



نظرية ٤

$$\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن أ^{ن-١} \text{ لكل } ن \in ح - \{٠\}$$

ولاستخدام هذه النظرية يراعى الآتى :

١ أن تكون الدالة على الصورة (أو يمكن وضعها على الصورة) $\frac{س^ن - أ^ن}{س - أ}$

٢ أن يكون المطلوب إيجاد النهاية عندما $س \leftarrow أ$

مثال ١

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٤ - ٨١}{س - ٣}$

٢ $\underset{س \leftarrow \sqrt{٥}}{نهـا} \frac{س^٧ - ١٢٥\sqrt{٥}}{س - \sqrt{٥}}$

٣ $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \frac{س^٥ + ٣٢}{س^٢ + ٥س + ٦}$

٤ $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}}{نهـا} \frac{٣٢س^٥ - ١}{٢س - ١}$

الحل

١ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٤ - ٨١}{س - ٣} = \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٤ - ٣^٤}{س - ٣} = ٤ \times ٣^٣ = ١٠٨$

لاحظ أن : التعويض المباشر يعطى $\frac{صفر}{صفر}$

٢ $\underset{س \leftarrow \sqrt{٥}}{نهـا} \frac{س^٧ - ١٢٥\sqrt{٥}}{س - \sqrt{٥}} = \underset{س \leftarrow \sqrt{٥}}{نهـا} \frac{س^٧ - (\sqrt{٥})^٧}{س - \sqrt{٥}} = ٧ \times (\sqrt{٥})^٦ = ٨٧٥$

٣ $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \frac{س^٥ - ٣٢}{(س + ٢)(س + ٣)} = \underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \frac{س^٥ - (-٣٢)}{س - (-٢)} \times \underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \frac{١}{س + ٣}$

$= \underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \frac{س^٥ - (-٢)^٥}{س - (-٢)} \times ١ = ٥ \times (-٢)^٤ = ٨٠$



٤ $\lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{32 س^5 - 1}{2س - 1} = \lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{32\left[س^5 - \frac{1}{32}\right]}{2\left[س - \frac{1}{2}\right]} = 16 \times \lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{س^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{س - \frac{1}{2}}$

$= 16 \lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{س^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{س - \frac{1}{2}} = 16 \times 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5$

حل آخر :

عندما $س \leftarrow \frac{1}{2}$ فإن : $2س \leftarrow 1$

$\therefore \lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{32 س^5 - 1}{2س - 1} = \lim_{2س \to 1} \frac{(2س)^5 - (1)^5}{2س - 1} = 5 \times 1^4 = 5$

حل ثالث :

بوضع $2س = ص$ فعندما $س \leftarrow \frac{1}{2}$ فإن : $ص \leftarrow 1$

$\therefore \lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{32 س^5 - 1}{2س - 1} = \lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{(2س)^5 - (1)^5}{(2س) - 1}$

$= \lim_{ص \to 1} \frac{(ص)^5 - (1)^5}{ص - 1} = 5 \times 1^4 = 5$

نتيجتان

١ $\lim_{س \to 0} \frac{(س + أ)^ن - أ^ن}{س} = ن أ^{ن-1}$

٢ $\lim_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م} أ^{ن-م}$ حيث $ن \in ح - \{0\}$ ، $م \in ح - \{0\}$

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\lim_{س \to 1} \frac{س^5 - 1}{س^2 - 1}$

٢ $\lim_{س \to -3} \frac{س^5 + 243}{س^4 - 81}$

٣ $\lim_{س \to 3} \frac{س^4 - 27س}{3س^4 - 243}$

٤ $\lim_{س \to 1} \frac{(س + 1)^6 - 64}{(س + 1)^3 - 8}$

الحل

١ $\lim_{س \to 1} \frac{س^5 - 1}{س^2 - 1} = \lim_{س \to 1} \frac{س^5 - 1^5}{س^2 - 1^2} = \frac{5}{2} \times 1^{5-2} = \frac{5}{2}$

٢ $\lim_{س \to -3} \frac{س^5 + 243}{س^4 - 81} = \lim_{س \to -3} \frac{س^5 - (-3)^5}{س^4 - (-3)^4} = \frac{5}{4} \times (-3)^{5-4} = -\frac{15}{4}$



③ $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٤ - ٢٧س}{٣س^٤ - ٢٤٣} = \lim\limits_{س \to ٣} \frac{س(س^٣ - ٢٧)}{٣(س^٤ - ٨١)} = \lim\limits_{س \to ٣} \frac{س}{٣} \times \lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٣^٣}{س^٤ - ٣^٤}$

$= \frac{٣}{٣} \times \frac{٣}{٤} \times ٣^{٣-٤} = \frac{١}{٤}$

④ $\because$ س ← ١

$\therefore$ س + ١ ← ٢

$\therefore \lim\limits_{س \to ١} \frac{(س+١)^٦ - ٦٤}{(س+١)^٢ - ٨} = \lim\limits_{س+١ \to ٢} \frac{(س+١)^٦ - ٢^٦}{(س+١)^٣ - ٢^٣} = \frac{٦}{٣} \times ٢^{٦-٣} = ١٦$

حل آخر :

بتحليل البسط كفرق بين مربعين :

$\therefore \lim\limits_{س \to ١} \frac{(س+١)^٦ - ٦٤}{(س+١)^٣ - ٨} = \lim\limits_{س \to ١} \frac{[(س+١)^٣ - ٨][(س+١)^٣ + ٨]}{(س+١)^٣ - ٨}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \left((س+١)^٣ + ٨\right) = (١ + ١)^٣ + ٨ = ١٦$

مثال ③

أوجد كلاً مما يأتي :

① $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س+٥)^٤ - ٦٢٥}{س}$ ② $\lim\limits_{س \to ٦} \frac{(س-٥)^٧ - ١}{س - ٦}$ ③ $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{(أ + ٢هـ)^٦ - أ^٦}{٥هـ}$

الحل

① $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س+٥)^٤ - ٦٢٥}{س} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س+٥)^٤ - ٥^٤}{س} = ٤ \times ٥^٣ = ٥٠٠$

② $\lim\limits_{س \to ٦} \frac{(س-٥)^٧ - ١}{س - ٦} = \lim\limits_{س-٥ \to ١} \frac{(س-٥)^٧ - ١^٧}{(س-٥) - ١} = ٧ \times ١^٦ = ٧$

③ $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{(أ + ٢هـ)^٦ - أ^٦}{٥هـ} = \lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{\frac{٢}{٥}[(أ + ٢هـ)^٦ - أ^٦]}{\frac{٢}{٥} \times ٥هـ} = \lim\limits_{٢هـ \to ٠} \frac{\frac{٢}{٥}[(أ + ٢هـ)^٦ - أ^٦]}{٢هـ}$

$= \frac{٢}{٥} \times ٦ \times أ^٥ = \frac{١٢}{٥} أ^٥$

ملاحظتان

- $\sqrt[ن]{أ} = أ^{\frac{١}{ن}}$ حيث ن ∈ ص$^+$ - {١} ، أ ∈ ح$^+$

فمثلاً : $\sqrt{س} = س^{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt[٣]{٨} = ٨^{\frac{١}{٣}} = ٢$

- $\sqrt[ن]{أ^م} = أ^{\frac{م}{ن}}$ حيث ن ∈ ص$^+$ - {١} ، أ ∈ ح$^+$ ، م ∈ ص

فمثلاً : $\sqrt[٤]{س^٥} = س^{\frac{٥}{٤}}$ ، $\sqrt[٥]{٦٤} = \sqrt[٥]{٢^٦} = ٢^{\frac{٦}{٥}}$



مثال ٤

أوجد كلاً مما يأتي :

١) $\underset{\text{س} \to ٩}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ٣}{\text{س} - ٩}$

٢) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٥]{\text{س}} - ١}{\sqrt{\text{س}} - ١}$

٣) $\underset{\text{س} \to ١٦}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٤]{\text{س}^٥} - ٣٢}{\sqrt{\text{س}^٣} - ٦٤}$

الحل

١) $\underset{\text{س} \to ٩}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ٣}{\text{س} - ٩} = \underset{\text{س} \to ٩}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٩^{\frac{١}{٢}}}{\text{س} - ٩} = \frac{١}{٢} \times ٩^{\frac{١}{٢} - ١} = \frac{١}{٢} \times ٩^{-\frac{١}{٢}} = \dfrac{١}{٢\sqrt{٩}} = \frac{١}{٦}$

حل آخر :

بتحليل المقام كفرق بين مربعين :

$\therefore \underset{\text{س} \to ٩}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ٣}{\text{س} - ٩} = \underset{\text{س} \to ٩}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ٣}{(\sqrt{\text{س}} - ٣)(\sqrt{\text{س}} + ٣)} = \underset{\text{س} \to ٩}{\text{نها}} \dfrac{١}{(\sqrt{\text{س}} + ٣)}$

$= \dfrac{١}{\sqrt{٩} + ٣} = \frac{١}{٦}$

٢) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٥]{\text{س}} - ١}{\sqrt{\text{س}} - ١} = \underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{\frac{١}{٥}} - ١^{\frac{١}{٥}}}{\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ١^{\frac{١}{٢}}} = \dfrac{\frac{١}{٥}}{\frac{١}{٢}} \times ١^{\frac{١}{٥} - \frac{١}{٢}} = \frac{٢}{٥}$

٣) $\underset{\text{س} \to ١٦}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٤]{\text{س}^٥} - ٣٢}{\sqrt{\text{س}^٣} - ٦٤} = \underset{\text{س} \to ١٦}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{\frac{٥}{٤}} - (١٦)^{\frac{٥}{٤}}}{\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - (١٦)^{\frac{٣}{٢}}}$

$= \dfrac{\frac{٥}{٤}}{\frac{٣}{٢}} \times ١٦^{(\frac{٥}{٤} - \frac{٣}{٢})}$

$= \frac{٥}{٦} \times ١٦^{-\frac{١}{٤}} = \frac{٥}{١٢}$

لاحظ أن

$١٦^{\frac{٥}{٤}} = (٢^٤)^{\frac{٥}{٤}} = ٢^{٤ \times \frac{٥}{٤}}$

$= ٢^٥ = ٣٢$

أى أن $٣٢ = ١٦^{\frac{٥}{٤}}$

وكذلك : $٦٤ = ١٦^{\frac{٣}{٢}}$

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتي :

١) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٣ + \text{س}^٢ - ٣٦}{\text{س}^٤ - ٨١}$

٢) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٤]{٢\text{س} + ١٤} - ٢}{\text{س} - ١}$

٣) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{٣\text{س} + ٢} - ٢}{\sqrt[٥]{\text{س} - ٣} + ١}$



الحل

١ $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٣٦}{\text{س}^{٤} - ٨١} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٢٧ + \text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}^{٤} - ٨١}$

$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٣^{٣}}{\text{س}^{٤} - ٣^{٤}} + \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٣^{٢}}{\text{س}^{٤} - ٣^{٤}}$

$= \dfrac{٣}{٤} \times ٣^{٣-٤} + \dfrac{٢}{٤} \times ٣^{٢-٤} = \dfrac{١}{٤} + \dfrac{١}{١٨} = \dfrac{١١}{٣٦}$

٢ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt[٤]{٢\text{س} + ١٤} - ٢}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{(٢\text{س} + ١٤)^{\frac{١}{٤}} - (١٦)^{\frac{١}{٤}}}{\text{س} - ١} \times \dfrac{٢}{٢}$

$= ٢ \underset{٢\text{س}+١٤\to ١٦}{\text{نهــا}} \dfrac{(٢\text{س} + ١٤)^{\frac{١}{٤}} - (١٦)^{\frac{١}{٤}}}{(٢\text{س} + ١٤) - ١٦}$

$= ٢ \times \dfrac{١}{٤} (١٦)^{\frac{١}{٤} - ١} = \dfrac{١}{١٦}$

٣ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt[٣]{٣\text{س} + ٢} - ٢}{\sqrt[٥]{\text{س} - ٣} + ١} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{(٣\text{س} + ٢)^{\frac{١}{٣}} - ٨^{\frac{١}{٣}}}{٣\text{س} + ٢ - ٨} \times \dfrac{٣\text{س} + ٢ - ٨}{(\text{س} - ٣)^{\frac{١}{٥}} + ١}$

$= \underset{٣\text{س}+٢\to ٨}{\text{نهــا}} \dfrac{(٣\text{س} + ٢)^{\frac{١}{٣}} - ٨^{\frac{١}{٣}}}{(٣\text{س} + ٢) - ٨} \times \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{٣ (\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٣)^{\frac{١}{٥}} + ١}$

$= \dfrac{١}{٣} \times ٨^{\frac{١}{٣} - ١} \times ٣ \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س} - ٢}{(\text{س} - ٣)^{\frac{١}{٥}} - (-١)^{\frac{١}{٥}}}$

$= \dfrac{١}{٤} \underset{\text{س}-٣\to -١}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س} - ٣) - (-١)}{(\text{س} - ٣)^{\frac{١}{٥}} - (-١)^{\frac{١}{٥}}} = \dfrac{١}{٤} \times \dfrac{١}{\frac{١}{٥}} \times (-١)^{١ - \frac{١}{٥}} = \dfrac{٥}{٤}$





تمـارين 14 على نظرية (٤) «القانون»

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}}$ = ...

(أ) $\dfrac{\text{م}}{\text{ن}}$ (ب) $\dfrac{\text{م}}{\text{ن}} (\text{أ})^{\text{م} - \text{ن}}$ (جـ) $\dfrac{\text{ن}}{\text{م}} (\text{أ})^{\text{م} - \text{ن}}$ (د) $\dfrac{\text{ن}}{\text{م}} (\text{أ})^{\text{ن} - \text{م}}$

٢ $\underset{\text{ص} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ص}^{٥} - ٣٢}{\text{ص} - ٢}$ = ...

(أ) ٣١ $\text{ص}^{٤}$ (ب) ٣٢×٢^{٤} (جـ) ٦٤ (د) ٥×٢^{٤}

٣ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{١٠} - ١}{\text{س} - ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٩ (د) ١٠

٤ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{-١} - ٢^{-١}}{\text{س}^{-٤} - ٢^{-٤}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\dfrac{١}{٢}$ (جـ) $\dfrac{١}{٣٢}$ (د) ٨

٥ $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{٥} + ١}{\text{س} + ١}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) −٥ (د) −٤

٦ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{٥} - ٣٢}{\text{س}^{٣} - ٨}$ = ...

(أ) ٤ (ب) $\dfrac{٥}{٣}$ (جـ) صفر (د) $٦\dfrac{٢}{٣}$

٧ $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهـــا}} \dfrac{٤\text{س}^{٢} - ١}{٣٢\text{س}^{٥} - ١}$ = ...

(أ) $\dfrac{٢}{٥}$ (ب) $\dfrac{٥}{٢}$ (جـ) $\dfrac{٢}{٩}$ (د) $\dfrac{١}{٨}$

٨ $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{٧} + ١٢٨}{\text{س}^{٤} - ١٦}$ = ...

(أ) ٩ (ب) −٩ (جـ) −١٤ (د) ١٤

٩ $\underset{\text{س} \leftarrow ١٦}{\text{نهـــا}} \dfrac{\sqrt[٤]{\text{س}^{٥}} - ٣٢}{\text{س} - ١٦}$ = ...

(أ) ٥ (ب) $\dfrac{٥}{٢}$ (جـ) $\dfrac{٥}{٤}$ (د) $\dfrac{٥}{٨}$



(١٠) $\underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + \text{هـ})^{7} - \text{س}^{7}}{\text{هـ}} = \dots\dots$

(أ) س^{7} (ب) $7\,\text{س}^{6}$ (جـ) صفر (د) ١

(١١) $\underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{(2 - 3\,\text{هـ})^{7} - 128}{4\,\text{هـ}} = \dots\dots$

(أ) ٣٣٦ (ب) −٣٣٦ (جـ) ٤٤٨ (د) −٤٤٨

(١٢) $\underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{(3\,\text{هـ} - 1)^{5} + 1}{5\,\text{هـ}} = \dots\dots$

(أ) −٣ (ب) $\frac{3}{5}$ (جـ) ٣ (د) ٥

(١٣) $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{6} - 64}{\text{س} - 2} = \dots\dots$

(أ) $6\,(2)^{5}$ (ب) ١٢٨ (جـ) $64\,(2)^{5}$ (د) ٦٣

(١٤) $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\frac{13}{2}} - \text{س}^{\frac{1}{2}}}{\text{س}^{\frac{7}{2}} - \text{س}^{\frac{1}{2}}} = \dots\dots$

(أ) $\frac{13}{7}$ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) س

(١٥) $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{2} - \text{س}^{-2}}{\text{س} - \text{س}^{-1}} = \dots\dots$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) −٢

(١٦) $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + 2)^{5} - 32}{\text{س}} = \dots\dots$

(أ) ٢٥ (ب) ٦٤ (جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

(١٧) $\underset{\text{س} \to 5}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} - 3)^{7} - 128}{\text{س} - 5} = \dots\dots$

(أ) ٧ (ب) ٢٨ (جـ) ٦٤ (د) ٤٤٨

(١٨) $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + 1)^{4} - 81}{\text{س} - 2} = \dots\dots$

(أ) ١٨ (ب) ٨١ (جـ) −١٠٨ (د) ١٠٨

(١٩) $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{أ}} - \text{س}^{\text{حـ}}}{\text{س}^{\text{أ}} - \text{س}^{\text{ء}}} = \dots\dots$

(أ) $\dfrac{\text{أ} + \text{حـ}}{\text{أ} + \text{ء}}$ (ب) $\text{أ}\,\text{س}^{\text{حـ} - \text{ء}}$ (جـ) $\dfrac{\text{أ} - \text{حـ}}{\text{أ} - \text{ء}}$ (د) $\dfrac{\text{حـ}}{\text{ء}}$

(٢٠) $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{1 - \sqrt[\text{ن}]{\text{س}}}{1 - \sqrt[\text{م}]{\text{س}}} = \dots\dots$

(أ) ١ (ب) $\dfrac{\text{ن}}{\text{م}}$ (جـ) −١ (د) $\dfrac{\text{م}}{\text{ن}}$



(٢١) $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \frac{٣ - \sqrt{س}}{٢٧ - \sqrt{س^٣}} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{١}{٩}$ (ب) $\frac{١}{٢٧}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{-١}{٢٧}$

(٢٢) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٣)^٥ - ١}{س^٢ - ٤} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $-\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $-\frac{١}{٤}$

(٢٣) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٥ - ٣٢}{س^٢ + ٣س - ١٠} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ٨٠ (ب) $\frac{٨٠}{٧}$ (جـ) $\frac{٧}{٨٠}$ (د) $\frac{١}{٨٠}$

(٢٤) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٤]{س} + ٢\sqrt{س} - ٣}{س - ١} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٦}{٥}$ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٣

(٢٥) إذا كان : د (س) = $س^٥$ ، ر (س) = $س^٢ - ٤$

فإن : $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{د(س) - ٣٢}{ر(س)} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) −٢٠ (ب) ٢٠ (جـ) ± ٢٠ (د) ٣٢

(٢٦) إذا كان : $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م}$ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ن (جـ) م (د) $\frac{م}{ن}$

(٢٧) إذا كانت : $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س)^ن - (٢)^ن}{س - ٢} = ٣٢$ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٢٨) إذا كانت : $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \frac{س^٨ - أ^٨}{س^٦ - أ^٦} = ٤٨$ فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ± ٤ (د) ± ٦

(٢٩) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{س + ٣} - ٢}{س - ٥} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{١}{١٢}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) ١

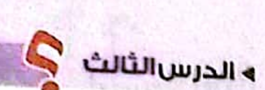
(٣٠) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ + س)^{\frac{٥}{٢}} - ١}{س} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) ليس لها وجود.

(٣١) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)^٦ - ٦٤}{س^٢ + ١٦س} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٦٤





(٣٢) $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \left(\frac{س^6 - س^7 + س^8 - س^9}{س - 1} \right) = \dots\dots\dots$

(أ) ٣٠ (ب) −٢ (ج) ٣ (د) ٩

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{س^3 - 8}{س - 2}$ «١٢»

② $\underset{س \to -5}{\text{نها}} \frac{س^4 - 625}{س + 5}$ «−٥٠٠»

③ $\underset{س \to أ}{\text{نها}} \frac{س^5 - أ^5}{س - أ}$ «٥ أ^٤»

④ $\underset{س \to -3}{\text{نها}} \frac{س^4 - 81}{س^5 + 243}$ «$-\frac{4}{15}$»

⑤ $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{س^6 - 64}{س^7 - 128}$ «$\frac{3}{7}$»

⑥ $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{2 س^6 - 128}{س^2 - 4}$ «٩٦»

⑦ $\underset{س \to -2}{\text{نها}} \frac{س^6 - 64}{3 س + 6}$ «−٦٤»

⑧ $\underset{س \to -1}{\text{نها}} \frac{س^{10} + س}{س^7 - س}$ «$\frac{-3}{2}$»

⑨ $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{1 - س^9}{س^7 - 1}$ «$\frac{-9}{7}$»

⑩ $\underset{س \to -\frac{1}{2}}{\text{نها}} \frac{32 س^5 + 1}{64 س^6 - 1}$ «$\frac{-5}{6}$»

⑪ $\underset{س \to -\frac{2}{3}}{\text{نها}} \frac{243 س^5 + 32}{27 س^3 + 8}$ «$\frac{20}{3}$»

⑫ $\underset{س \to \frac{3}{2}}{\text{نها}} \frac{16 س^5 - 81 س}{2 س^3 - 3 س^2}$ «٧٢»

٢ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{س^{-7} - (2)^{-7}}{س - 2}$ «$\frac{-7}{256}$»

② $\underset{س \to -1}{\text{نها}} \frac{س^{-4} - 1}{س^{-18} - 1}$ «$\frac{2}{9}$»

③ $\underset{س \to \sqrt{2}}{\text{نها}} \frac{س^7 - 8\sqrt{2}}{س^2 - 2}$ «$14\sqrt{2}$»

④ $\underset{س \to -\sqrt{2}}{\text{نها}} \frac{س^8 - 16}{س^5 + 4\sqrt{2}}$ «$\frac{-16\sqrt{2}}{5}$»

⑤ $\underset{س \to \frac{-3}{\sqrt{2}}}{\text{نها}} \frac{8 س^6 - 729}{\sqrt{2} س + 3}$ «−١٤٥٨»

⑥ $\underset{س \to \frac{\pi}{6}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^3 س - \frac{1}{8}}{\text{جا} س - \frac{1}{2}}$ «$\frac{3}{4}$»

⑦ $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{س^{-5} - \frac{1}{32}}{س^{-7} - \frac{1}{128}}$ «$\frac{20}{7}$»

⑧ $\underset{س \to -2}{\text{نها}} \frac{8 س^{-3} + 1}{س^{-8} - \frac{1}{256}}$ «−٩٦»

⑨ $\underset{س \to 2}{\text{نها}} \frac{س^{-8} - (16)^{-2}}{س - 2}$ «$\frac{-1}{64}$»

⑩ $\underset{س \to 4}{\text{نها}} \frac{س^{\frac{7}{2}} - 128}{س^{\frac{5}{2}} - 32}$ «$\frac{28}{5}$»

⑪ $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{\sqrt[7]{س} - 1}{س - 1}$ «$\frac{1}{7}$»

⑫ $\underset{س \to 4}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^3} - 8}{س^2 - 16}$ «$\frac{3}{8}$»

⑬ $\underset{س \to 16}{\text{نها}} \frac{\sqrt[4]{س^7} - 128}{س - 16}$ «١٤»

⑭ $\underset{س \to 1}{\text{نها}} \frac{س \sqrt[5]{س} - 1}{س^2 - 1}$ «$\frac{3}{5}$»



(١٥) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{\frac{٢١}{٢}} - س^{\frac{١}{٢}}}{س^{\frac{١٤}{٣}} - س^{\frac{٢}{٣}}}$ «$\frac{٥}{٢}$»

(١٦) $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{١}{٢} س^{٤} - ١٢٨}{س - ٤}$ «١٢٨»

(١٧) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٤} - \frac{١}{س^{٤}}}{س^{٣} - \frac{١}{س^{٣}}}$ «$\frac{-٤}{٣}$»

(١٨) $\lim_{٢س \to ١} \frac{٥ س^{٤} - \frac{٥}{١٦}}{٢ س - ١}$ «$\frac{٥}{٤}$»

(١٩) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{١٠} - ١٠٢٤}{س^{٢} - ٣ س + ٢}$ «٥١٢٠»

(٢٠) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{١٧} - ١}{٣ س^{٢} + ٢ س - ٥}$ «$\frac{١٧}{٨}$»

٣ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\lim_{س \to ٠} \frac{(١ + س)^{١٠} - ١}{(١ + س)^{٧} - ١}$ «$\frac{١٠}{٧}$»

(٢) $\lim_{س \to ٦} \frac{(س - ٥)^{٧} - ١}{س - ٦}$ «٧»

(٣) $\lim_{س \to -٢} \frac{(س + ٣)^{٥} - ١}{س + ٢}$ «٥»

(٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)^{٥} - ٣٢}{س}$ «٨٠»

(٥) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(٣ + هـ)^{٤} - ٨١}{٦ هـ}$ «١٨»

(٦) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(١ + ٤ هـ)^{٨} - ١}{هـ}$ «٣٢»

(٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{(١ - ٢ س)^{٥} - ١}{٥ س}$ «-٢»

(٨) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(س + ٣ هـ)^{٥} - س^{٥}}{هـ}$ «$١٥ س^{٤}$»

(٩) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(س - ٢ هـ)^{١٧} - س^{١٧}}{٥١ هـ}$ «$-\frac{٢}{٣} س^{١٦}$»

(١٠) $\lim_{س + ١ \to ٠} \frac{(٣ س + ٢)^{٩} + ١}{س + ١}$ «٢٧»

(١١) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{١ + ٣ س} - ١}{٢ س}$ «$\frac{١}{٢}$»

(١٢) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{٢٦ + س} - ٣}{س - ١}$ «$\frac{١}{٢٧}$»

(١٣) $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt[٥]{س + ٢٥} - ٢}{س - ٧}$ «$\frac{١}{٨٠}$»

(١٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٤)^{٥} + ٣٢}{س - ٢}$ «٨٠»

(١٥) $\lim_{س \to -٢} \frac{(س + ٣)^{٥} - ١}{س^{٢} - ٤}$ «$-\frac{٥}{٤}$»

(١٦) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{١٩} + س^{٨} - ٢}{س - ١}$ «٢٧»

(١٧) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٧} + س^{٩} + ٢}{س + ١}$ «١٦»

(١٨) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} + \sqrt[٣]{س} - ٢}{س - ١}$ «$\frac{٥}{٦}$»

(١٩) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} + س^{٢} - ٣٦}{س - ٢}$ «٨٤»

(٢٠) $\lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٣)^{٥} - ٣٢}{س^{٢} - ٥ س}$ «١٦»

(٢١) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٢ س - ٣)^{٥} + ٢٤٣}{٣ س (س - ٢)}$ «-١٣٥»



٤ أوجد قيمة أ إذا كانت : $\lim_{س \to أ} \frac{س^{١٢} - أ^{١٢}}{س^{١٠} - أ^{١٠}} = ٣٠$ «± ٥»

٥ أوجد قيمة ك إذا كانت : $\lim_{س \to -١} \frac{س^{١٥} + ١}{س + ١} = \lim_{س \to ك} \frac{س^{٥} - ك^{٥}}{س^{٣} - ك^{٣}}$ «± ٣»

٦ إذا كانت : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{ن} - ٦٤}{س - ٢} = ل$ أوجد قيمتى : ن ، ل «٦ ، ١٩٢»

٧ إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س^{٤}}$ أوجد : $\lim_{س \to ٢} \frac{د(س) - د(٢)}{س - ٢}$ «$\frac{-١}{٨}$»

٨ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٥} - ٣٢} + \frac{س^{٤} - ١٦}{س^{٧} - ١٢٨} \right)$ «$\frac{٣١}{١٤٠}$»

② $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{س^{٥} - ٢٤٣}{س^{٢} - ٤} \times \frac{س - ٢}{س - ٣} \right)$ «٨١»

③ $\lim_{س \to -٣} \left(\frac{س^{٤} - ٨١}{س^{٣} + ٢٧} \right)^{٢}$ «-٦٤»

④ $\lim_{س \to ١} \frac{(س^{٢٥} - ١)^{٢}}{س^{٢} - ٢س + ١}$ «٦٢٥»

⑤ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{١٢} - ٢س^{٦} + ١}{س^{٢} - ٢س + ١}$ «٣٦»

⑥ $\lim_{س \to ٢} \left[\frac{(س^{٤} - ١٦)^{٤}}{(س^{٣} - ٨)^{٣}} \times \frac{١}{س^{٨} - ٢٥٦} \right]$ «$\frac{١٦}{٢٧}$»

⑦ $\lim_{س \to ١} \frac{(\sqrt[٣]{س} - ١)(\sqrt[٥]{س^{٢}} - ١)}{(س - ١)^{٢}}$ «$\frac{٢}{١٥}$»

⑧ $\lim_{س \to ٠} \frac{(١ + س)^{١٥} - (١ - س)^{١٥}}{(١ + س)^{٩} - (١ - س)^{٩}}$ «$\frac{٥}{٣}$»

⑨ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{١٢} - ١}{س^{٣} - س^{٢} + س - ١}$ «٦»



ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٣}} - \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}^{١١}} - \sqrt{\text{س}}}$ «$\frac{١}{٥}$»

② $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(١ + ٥\,\text{س})^{١٠} - ١}{(١ + ٧\,\text{س})^{٨} - ١}$ «$\frac{٢٥}{٢٨}$»

③ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س} + ٨} - ٢}{(\text{س} + ٣)^{٥} - ٢٤٣}$ «$\frac{١}{٤٨٦٠}$»

④ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{٢\,\text{س} - ٣} - ١}{\sqrt[٥]{٣\,\text{س} - ٥} - ١}$ «$\frac{١٠}{٩}$»

⑤ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}^{٢} - ٣)^{٥} - ١}{\text{س} - ٢}$ «٢٠»

⑥ $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{(٤\,\text{س} + ٥)^{٦} + ٧\,\text{س} + ٦}{\text{س} + ١}$ «٣١»

⑦ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(٥\,\text{س} - ٤)^{١٠} + ٤\,\text{س} - ٥}{\text{س} - ١}$ «٥٤»

⑧ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٥]{\text{س} + ١} - \sqrt[٤]{\text{س} + ١}}{\text{س}}$ «$\frac{-١}{٢٠}$»

⑨ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٥]{\text{س} + ١} - (\text{س} + ١)^{٧}}{\text{س}}$ «$-٦\frac{٤}{٥}$»

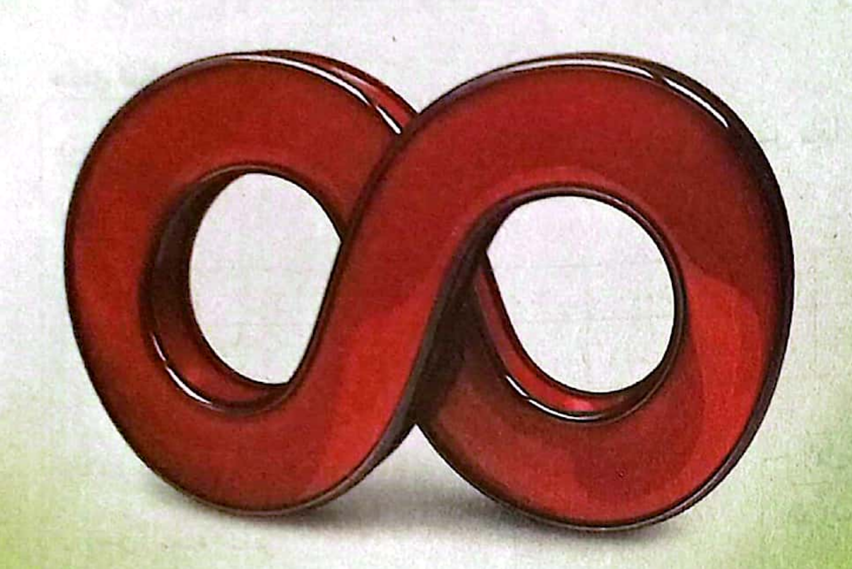
⑩ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\sqrt{\text{س} - ١} + \sqrt[٣]{\text{س} - ١} - ٦}{\text{س} - ٢}$ «$\frac{١٧}{٦}$»

⑪ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٧} + \text{س}^{٩} + \text{س}^{١١} - ٣}{\text{س} - ١}$ «٢٧»

⑫ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٤}\,(\text{س} - ١)^{٦} - ١٦}{\text{س} - ٢}$ «١٢٨»

⑬ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٥}\,\sqrt[٣]{\text{س} + ٦} - ٦٤}{\text{س} - ٢}$ «$١٦٢\frac{٢}{٣}$»







الدرس 4

نهاية الدالة عند اللا نهاية

المقصود ببحث نهاية الدالة عند اللانهاية هو التعرف على سلوك هذه الدالة عندما تكبر س (المتغير المستقل) كبرًا بلا حد ، فإذا كانت د (س) تقترب من عدد حقيقى معين (ل مثلاً) كلما كبرت س فإننا نقول إن الدالة د لها نهاية ل عندما تقترب س من اللانهاية ونكتب $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نها}}$ د (س) = ل

مثال توضيحى ①

إذا كانت د : د (س) = $\frac{٢ س + ١}{س}$ وأردنا دراسة سلوك الدالة د عندما تكبر س بدون حد أى عندما تقترب س من اللانهاية فإننا نفرض أن س تأخذ القيم ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ... إلخ فنحصل على الجدول الآتى :

س	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	....
د (س) = $\frac{٢ س + ١}{س}$	٣	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	....

ومن هذا الجدول نلاحظ أنه عندما تأخذ س قيمًا متدرجة فى الكبر فإن د (س) تقترب أكثر وأكثر من القيمة ٢ وبلغة النهايات فإننا نقول إن د (س) ← ٢ عندما س ← ∞

ونكتب $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نها}}$ د (س) = ٢

ونلاحظ فى هذا المثال :

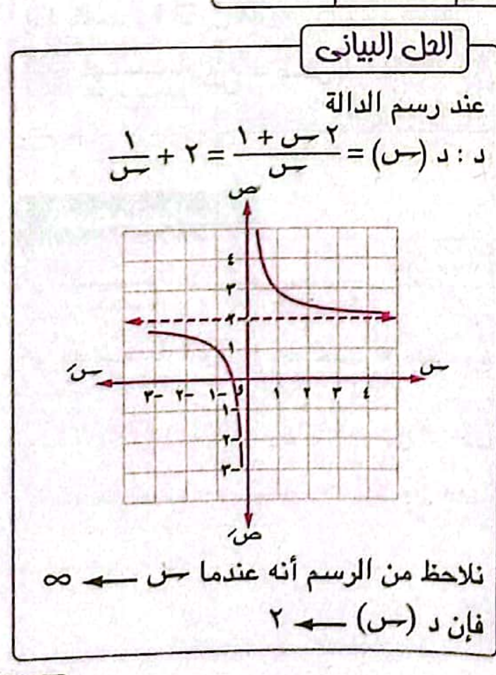
أننا لا نستطيع الحصول على نفس النتيجة عن طريق التعويض المباشر عن س = ∞

حيث سنحصل على $\frac{\infty}{\infty}$ (كمية غير معينة).

الحل البيانى

عند رسم الدالة

د : د (س) = $\frac{٢ س + ١}{س}$ = ٢ + $\frac{١}{س}$



نلاحظ من الرسم أنه عندما س ← ∞

فإن د (س) ← ٢



مثال توضيحى ٢

إذا أردنا دراسة سلوك الدالة د حيث د (س) = $\frac{1}{س}$ عندما تأخذ س قيمًا متدرجة فى الكبر فإننا نكون الجدول التالى :

س	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	....
د (س) = $\frac{1}{س}$	١	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	....

ونلاحظ من هذا الجدول أن :

د (س) ⟵ صفر

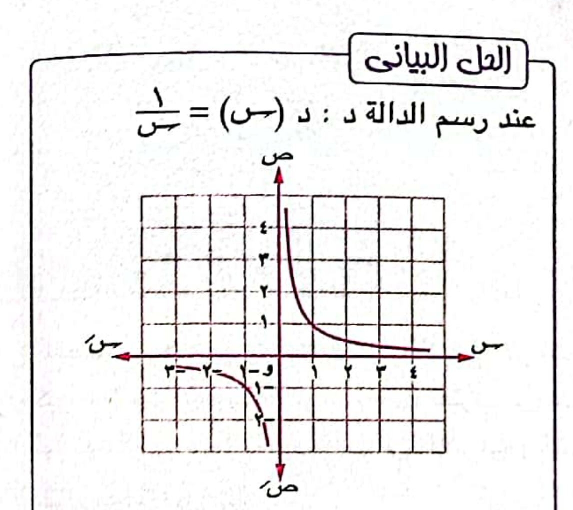
عندما س ⟵ ∞

أى أن : $\lim_{س \to \infty} \frac{1}{س} = صفر$

وهذا المثال التوضيحى يقودنا للنظرية الآتية :

الحل البيانى

عند رسم الدالة د : د (س) = $\frac{1}{س}$



نلاحظ من الرسم أنه عندما س ⟵ ∞

فإن د (س) ⟵ صفر

نظرية ٥

$\lim_{س \to \infty} \frac{1}{س} = صفر$

نتيجتان

إذا كانت : أ ∈ ح فإن :

١ $\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س} = صفر$

٢ $\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س^{ن}} = صفر$ ، ن ∈ $ح_+$

قواعد أساسية

* $\lim_{س \to \infty} حـ = حـ$ حيث حـ ثابت

* $\lim_{س \to \infty} س^{ن} = \infty$ حيث ن عدد موجب

* نظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضرب أو قسمة دالتين عند س = أ السابق دراستها صحيحة عندما نضع س ⟵ ∞ بدلًا من س ⟵ أ





مثال ١

أوجد كلاً مما يأتي : ١ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \left(\frac{١}{س} + ٢\right)$ ٢ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \left(٣ - \frac{١}{س^٢}\right)$

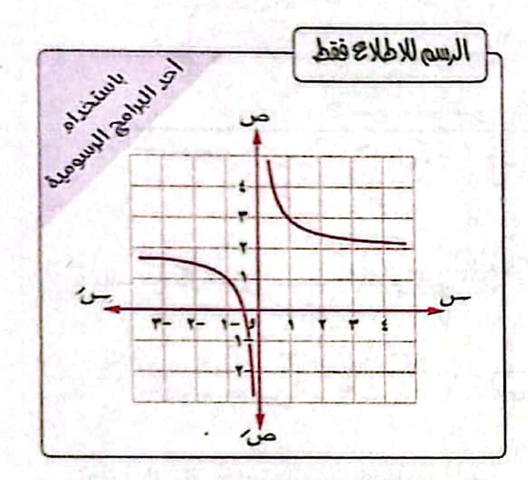
الحل

١ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \left(\frac{١}{س} + ٢\right)$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{١}{س} + \underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} ٢$

$= ٠ + ٢ = ٢$

الرسم للاطلاع فقط

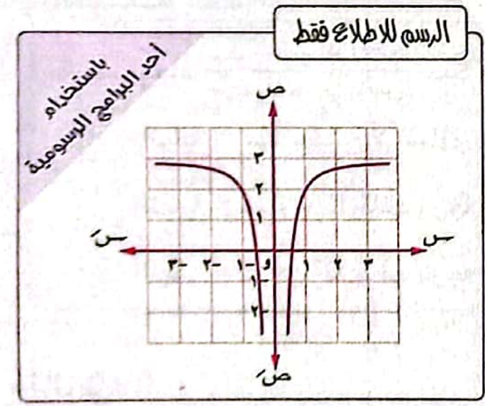


٢ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \left(٣ - \frac{١}{س^٢}\right)$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} ٣ - \underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{١}{س^٢}$

$= ٣ - \text{صفر} = ٣$

الرسم للاطلاع فقط



إيجاد نهاية دالة كسرية جبرية عند اللانهاية

إذا كان التعويض المباشر عن س = ∞ يعطى $\frac{\infty}{\infty}$ فإننا نقسم كلاً من البسط والمقام على المتغير س مرفوعًا لأعلى قوة فى المقام (درجة المقام) ، ثم نستخدم النظرية ونتيجتها لإيجاد النهاية (إن وجدت)

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{٢س - ٥}{٣س - ٧}$

٢ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{٥س^٢ - ٣س + ٦}{٢س - ٧س^٢}$

٣ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{٣س^٢ - ٥س}{٢س^٣ - ٦س^٢ + ٤س - ١}$

٤ $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{س^٥ - ٢س^٢}{س^٤ + ٣س^٣ - ١}$

الحل

١ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{٢س - ٥}{٣س - ٧} = \underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{٢ - \frac{٥}{س}}{٣ - \frac{٧}{س}} = \frac{٢ - ٠}{٣ - ٠} = \frac{٢}{٣}$



٢ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥س^٢ - ٣س + ٦}{٢س - ٧س^٢} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥ - \frac{٣}{س} + \frac{٦}{س^٢}}{\frac{٢}{س} - ٧} = -\frac{٥}{٧}$$

٣ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

$$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣س^٢ - ٥س}{٢س^٣ - ٦س^٢ + ٤س - ١} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\frac{٣}{س} - \frac{٥}{س^٢}}{٢ - \frac{٦}{س} + \frac{٤}{س^٢} - \frac{١}{س^٣}}$$

$$= \frac{٠}{٢} = ٠$$

٤ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٤$

$$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^٥ - ٢س^٢}{س^٤ + ٣س^٢ - ١} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س - \frac{٢}{س^٢}}{١ + \frac{٣}{س^٢} - \frac{١}{س^٤}} = \frac{\infty - ٠}{١ + ٠ - ٠} = \infty$$

ملاحظـة هامة

* عند إيجاد $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث كل من د (س) ، ر (س) دالة كثيرة حدود فإن :

١ النهاية = عدد حقيقي لا يساوى الصفر «إذا كانت درجة البسط = درجة المقام».

٢ النهاية = صفر «إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام».

٣ النهاية = $\pm \infty$ «إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام».

مثال ٣

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(س - ١)(س^٢ + ١)}{س^٢(٥س - ١)}$

٢ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(٣س^٣ + ٢)^٢(س^٢ - ١)^٣}{س^٥(س + ١)^٧}$

الحـل

١ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

$$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(س - ١)(س^٢ + ١)}{س^٢(٥س - ١)} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(١ - \frac{١}{س})(١ + \frac{١}{س^٢})}{١(٥ - \frac{١}{س})} = \frac{١ \times ١}{١ \times ٥} = \frac{١}{٥}$$

٢ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{١٢}$

$$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(٣س^٣ + ٢)^٢(س^٢ - ١)^٣}{س^٥(س + ١)^٧} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(٣ + \frac{٢}{س^٣})^٢(١ - \frac{١}{س^٢})^٣}{١(١ + \frac{١}{س})^٧}$$

$$= \frac{٣^٢ \times ١^٣}{١ \times ١^٧} = ٩$$



مثال ④

أوجد كلًّا مما يأتي :

① $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^٣ - ٩}{|٣س|^٣ + ٧}$

② $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥س - ٦}{\sqrt{٩س^٢ + ٧}}$

③ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{٨س^٣ - ٥س + ١}}{٣س - ٢}$

④ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٥]{س^٥ + س^٣}}{\sqrt[٧]{س^٧ - س^٢}}$

⑤ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^٢ - س + ١} - \sqrt{س^٢ + س + ١}\right)$

الحـل

① ∵ $س \to \infty$ ∴ $|س| = س$ ∴ النهاية $= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^٣ - ٩}{٢٧س^٣ + ٧}$

وبقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

∴ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^٣ - ٩}{٢٧س^٣ + ٧} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ - \frac{٩}{س^٣}}{٢٧ + \frac{٧}{س^٣}} = \dfrac{٢}{٢٧}$

② بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^٢}$

∴ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥س - ٦}{\sqrt{٩س^٢ + ٧}} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥ - \frac{٦}{س}}{\sqrt{٩ + \frac{٧}{س^٢}}}$

$= \dfrac{٥}{\sqrt{٩}} = \dfrac{٥}{٣}$

لاحظ أنه

عندما $س \to \infty$

فإن : $س = |س| = \sqrt{س^٢}$

$= \sqrt[٣]{س^٣} = \sqrt[٤]{س^٤} = ...$

③ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt[٣]{س^٣}$

∴ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{٨س^٣ - ٥س + ١}}{٣س - ٢} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{٨ - \frac{٥}{س^٢} + \frac{١}{س^٣}}}{٣ - \frac{٢}{س}} = \dfrac{\sqrt[٣]{٨}}{٣} = \dfrac{٢}{٣}$

④ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt[٥]{س^٥} = \sqrt[٧]{س^٧}$

∴ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٥]{س^٥ + س^٣}}{\sqrt[٧]{س^٧ - س^٢}} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٥]{١ + \frac{١}{س^٢}}}{\sqrt[٧]{١ - \frac{١}{س^٥}}} = \dfrac{\sqrt[٥]{١}}{\sqrt[٧]{١}} = ١$

⑤ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^٢ - س + ١} - \sqrt{س^٢ + س + ١}\right)$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left[\left(\sqrt{س^٢ - س + ١} - \sqrt{س^٢ + س + ١}\right) \times \dfrac{\sqrt{س^٢ - س + ١} + \sqrt{س^٢ + س + ١}}{\sqrt{س^٢ - س + ١} + \sqrt{س^٢ + س + ١}}\right]$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^٢ - س + ١ - (س^٢ + س + ١)}{\sqrt{س^٢ - س + ١} + \sqrt{س^٢ + س + ١}}$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{-٢س}{\sqrt{س^٢ - س + ١} + \sqrt{س^٢ + س + ١}}$

وبقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^٢}$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{-٢}{\sqrt{١ - \frac{١}{س} + \frac{١}{س^٢}} + \sqrt{١ + \frac{١}{س} + \frac{١}{س^٢}}} = \dfrac{-٢}{\sqrt{١} + \sqrt{١}} = -١$



مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٥}{س^{٢}} - \frac{٧ س^{٢}}{س^{٤}} + ٢\right)$

٢ $\lim_{س \to \infty} (٤ س^{٢} + ٣ س + ٧)$

٣ $\lim_{س \to \infty} (٥ س^{٤} - س^{٣} - ٣)$

٤ $\lim_{س \to \infty} (٤ س^{٢} - ٥ س^{٣} + ١٣)$

الحل

١ $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٥}{س^{٢}} - \frac{٧ س^{٢}}{س^{٤}} + ٢\right) =$ صفر − صفر + ٢ = ٢

٢ $\lim_{س \to \infty} (٤ س^{٢} + ٣ س + ٧)$ [لاحظ التعويض المباشر يعطى ∞ + ∞ + ٧]

∴ $\lim_{س \to \infty} (٤ س^{٢} + ٣ س + ٧) = \infty$

٣ $\lim_{س \to \infty} (٥ س^{٤} - س^{٣} - ٣)$ [لاحظ التعويض المباشر يعطى ∞ − ∞ − ٣ أى كمية غير معينة]

$= \lim_{س \to \infty} س^{٤} \left(٥ - \frac{١}{س} - \frac{٣}{س^{٤}}\right)$ [نأخذ س عامل مشترك بأكبر أس]

$= \lim_{س \to \infty} س^{٤} \times \lim_{س \to \infty} \left(٥ - \frac{١}{س} - \frac{٣}{س^{٤}}\right) = \infty \times ٥ = \infty$

٤ $\lim_{س \to \infty} (٤ س^{٢} - ٥ س^{٣} + ١٣)$ [لاحظ التعويض المباشر يعطى ∞ − ∞ أى كمية غير معينة]

$= \lim_{س \to \infty} س^{٣} \left(\frac{٤}{س} - ٥ + \frac{١٣}{س^{٣}}\right)$ [نأخذ س عامل مشترك بأكبر أس]

$= \lim_{س \to \infty} س^{٣} \times \lim_{س \to \infty} \left(\frac{٤}{س} - ٥ + \frac{١٣}{س^{٣}}\right) = \infty \times -٥ = -\infty$



تمارين 15 على نهاية الدالة عند اللانهاية


اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{٣}{س^{٢}} - ٢\right) = ...$

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) −٣ (د) −٢

② $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س}{٤س + ٥} = ...$

(أ) ∞ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) صفر

③ $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^{٢} + ١}{س^{٢} + ١} = ...$

(أ) صفر (ب) غير موجودة. (جـ) ∞ (د) ٢

④ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٢} + ٥}{٦} = ...$

(أ) صفر (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) ١ (د) ∞

⑤ $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س} = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −٢ (د) ∞

⑥ $\lim_{س \to \infty} (٣س^{-٥} + ٤س^{-٢} + ٥) = ...$

(أ) ١٢ (ب) ∞ (جـ) ٥ (د) صفر

⑦ $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{-٣} + ٤س^{-٢} - ٢}{٧س^{-٣} - س^{-٢} + ٦} = ...$

(أ) ∞ (ب) صفر (جـ) $\frac{٣}{٧}$ (د) $\frac{-١}{٣}$

⑧ $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٧} - ٢س^{٢}}{٢س^{٤} - ٣س^{٢} - ١} = ...$

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ∞ (د) $\frac{١}{٢}$

⑨ $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{٢}}{س(٢س - ١)} = ...$

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) صفر (د) ٣

⑩ $\lim_{س \to \infty} \sqrt{\frac{٣ + ٢س}{٤س - ١}} = ...$

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$



(١١) نهـــا (س ← ∞) $\frac{س^٣ + ٥}{س(٢س^٢ + ٣)}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

(١٢) نهـــا (س ← ∞) $\frac{١}{س}\sqrt{٨ + ٩س^٢}$ = ...

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) ٣ (جـ) $-٢\sqrt{٢}$ (د) −٣

(١٣) نهـــا (س ← ∞) $\frac{\sqrt[٣]{٦٤س^٣ + ٧س - ٢}}{٣س + ٢}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٤) نهـــا (س ← ∞) $\frac{\sqrt[٣]{٨س^٣ + ١}}{|س|}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) صفر (د) ٤

(١٥) نهـــا (س ← ∞) $\frac{\sqrt{٩س^٢ + ٣}}{\sqrt[٣]{١ - ٨س^٣}}$ = ...

(أ) $\frac{-٢}{٣}$ (ب) $\frac{-٩}{٨}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{-٣}{٢}$

(١٦) نهـــا (س ← ∞) $\frac{٤ - ٣س^٣}{\sqrt{س^٦ + ٩}}$ = ...

(أ) −٣ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ∞

(١٧) نهـــا (س ← ∞) $\frac{\sqrt{س + ٢} + \sqrt{س + ٣}}{\sqrt{٢س + ٥}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) $\frac{١}{\sqrt{٥}}$

(١٨) نهـــا (س ← ∞) $\left(\frac{٣س^٢ + ٢س + ١}{س^٢ - ٣س + ٢}\right)^٤$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

(١٩) نهـــا (س ← ∞) س $\left[(أ + \frac{١}{س})^ن - أ^ن\right]$ = ...

(أ) ن أ (ب) ن $أ^{ن-١}$ (جـ) صفر (د) غير موجودة.

(٢٠) نهـــا (س ← ∞) $\frac{(١٢)^{\frac{١}{س}}}{س + ٧}$ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١٢}{٧}$ (د) ∞

(٢١) نهـــا (س ← ∞) $\frac{ك^{\frac{١}{س}}}{٣}$ = ... حيث ك ثابت موجب.

(أ) $\frac{ك}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٣ (د) ٣ ك



(٢٢) إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{أ^2 س + ٧}{٢ س - ٥} = ٨$ فإن : أ = ... حيث أ ∈ ع

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) ± ٤ (د) ± ٨

(٢٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{أ س^2 - ٥ س}{٢ س + ٣ س^2} = ٣$ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٢٤) إذا كان : م ∈ ع وكان : $\lim_{س \to \infty} \frac{(م + ٢) س^3 - س + ٤}{٢ م س^3 - ٢ س + ٥} = ٢$ فإن : م = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ١

(٢٥) $\lim_{س \to \infty} (٣ + ٢ س - ٥ س^2) =$ ....

(أ) ∞ (ب) −∞ (جـ) صفر (د) ٧

(٢٦) $\lim_{س \to \infty} (س^3 + ٧ س^2 + ٨) =$ ....

(أ) ∞ (ب) صفر (جـ) − ∞ (د) ١

(٢٧) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{س^2 + س} - س) =$ ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) ليس لها وجود.

(٢٨) $\lim_{س \to \infty} س^{ن} =$ صفر إذا كانت ن ∈ ....

(أ) ط (ب) ص (جـ) $ع^+$ (د) $ع^-$

(٢٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{٤ س + \sqrt{س + \sqrt{س}}}}{٨ \sqrt{س}} =$ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٨}$

(٣٠) إذا كان : أ > ب فإن : $\lim_{س \to \infty} \frac{س^أ}{س^ب} =$ ....

(أ) صفر (ب) ∞ (جـ) ١ (د) أ − ب

(٣١) إذا كان : أ > ب > صفر فإن : $\lim_{س \to \infty} \frac{س^ب}{س^أ} =$ ....

(أ) ∞ (ب) − ∞ (جـ) صفر (د) أ − ب

(٣٢) إذا كانت : د (س) كثيرة حدود من الدرجة الثالثة ، ر (س) كثيرة حدود من الدرجة الخامسة

فإن : $\lim_{س \to \infty} \frac{ر(س)}{س^2 د(س)} =$ ....

(أ) ± ∞ (ب) صفر

(جـ) عدد حقيقى ≠ صفر (د) ليس لها وجود.



ثانيًا الأسئلة المقالية

1 أوجد كلاً من النهايات الآتية :

(1) $\lim_{س \to \infty} \frac{2س - 5}{3س + 8}$ «$\frac{2}{3}$»

(2) $\lim_{س \to \infty} \frac{2س - 5}{3س^2 + 8}$ «صفر»

(3) $\lim_{س \to \infty} \frac{2س^2 - 5}{3س + 8}$ «∞»

(4) 📖 $\lim_{س \to \infty} \frac{5 - 6س - 3س^2}{2س^2 + س + 4}$ «$-\frac{3}{2}$»

(5) 📖 $\lim_{س \to \infty} \frac{س^3 - 2}{|س|^3 + 1}$ «1»

(6) $\lim_{س \to \infty} \frac{7س^2 + 1}{4س^3 - 8س + 1}$ «صفر»

(7) $\lim_{س \to \infty} \frac{5س^7 + 2س - 1}{6س^4 + 13}$ «∞»

(8) $\lim_{س \to \infty} \frac{5 - 7س^8 + 3س^{14}}{7 - 6س^{14} + 2س^6}$ «$\frac{-1}{2}$»

(9) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{7}{س^2} + \frac{2}{س} - 3\right)$ «-3»

(10) $\lim_{س \to \infty} \frac{5س^{-3} + 4س^{-2} - 3}{7س^{-3} - 2س^{-2} + 8}$ «$\frac{-3}{8}$»

(11) 📖 $\lim_{س \to \infty} \frac{5س^3 - 4س^2 + 2}{7 - س + |2س|^3}$ «$\frac{5}{8}$»

(12) 📖 $\lim_{س \to \infty} (س^3 + 5س^2 + 1)$ «∞»

(13) $\lim_{س \to \infty} \left[\sqrt{س^2 + 5س + 7} + س\right]$ «∞»

(14) 📖 $\lim_{س \to \infty} (5 + س - س^2)$ «$-\infty$»

2 أوجد كلاً مما يأتى :

(1) $\lim_{س \to \infty} \frac{3س^2 - 4س + 5}{(س + 2)^2}$ «3»

(2) $\lim_{س \to \infty} \frac{6س^2 - 5س}{(3 - س)(2 + س)}$ «-6»

(3) $\lim_{س \to \infty} \frac{8س^3 - س + 1}{(س + 1)(2س^2 - 3)}$ «4»

(4) 📖 $\lim_{س \to \infty} \frac{س^3 - 4س + 5}{(2س - 1)^3}$ «$\frac{1}{8}$»

(5) $\lim_{س \to \infty} \frac{(2س + 3)(4س^2 - 5)}{(3س^2 - 8)(5س - 3)}$ «$\frac{8}{15}$»

(6) $\lim_{س \to \infty} \frac{(2س + 3)(5س - 1)(س - 2)}{س(س + 1)(3س - 1)}$ «$\frac{10}{3}$»

(7) $\lim_{س \to \infty} \frac{(7 + \sqrt{س})(3 + \sqrt{س})}{4س - 3}$ «$\frac{1}{4}$»

(8) $\lim_{س \to \infty} \frac{(6س - 5)(3س - 4)^2}{(3س - 2)^3}$ «2»

(9) 📖 $\lim_{س \to \infty} \frac{(س + 2)^2 (3 - 2س^2)}{3س(س^2 + 7)^2}$ «$-\frac{2}{3}$»

(10) $\lim_{س \to \infty} \frac{(3س^2 - 1)^3}{18س^6 + س^2 + 1}$ «$\frac{3}{2}$»

3 أوجد كلاً مما يأتى :

(1) $\lim_{س \to \infty} \frac{2س + 3}{\sqrt{9س^2 + 25}}$ «$\frac{2}{3}$»

(2) 📖 $\lim_{س \to \infty} \frac{1}{س} \sqrt{3 + 4س^2}$ «2»

(3) $\lim_{س \to \infty} \frac{2س + 1}{\sqrt{4س^2 + 3س - 4}}$ «1»

(4) $\lim_{س \to \infty} \frac{2س - 3}{\sqrt[3]{125س^3 + 5}}$ «$\frac{2}{5}$»

(5) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8س^3 + 5س - 2}}{3س + 2}$ «$\frac{2}{3}$»

(6) 📖 $\lim_{س \to \infty} \frac{4 - 3س^3}{\sqrt{س^6 + 9}}$ «-3»

⑦ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt{9س^2 - 3س + 8}}{\sqrt[3]{3س^2 + 125س^3 + 2}}$ «$\frac{3}{5}$»

⑧ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt{س^2 + 1}}{\sqrt[4]{س^4 + 2}}$ «1»

⑨ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{8س^3 + 1}}{\sqrt[5]{32س^5 + س}}$ «1»

⑩ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{8س^2 + 1}}{\sqrt[6]{س^4 - 3}}$ «2»

⑪ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt{3س - 2} - \sqrt{12س + 7}}{\sqrt{27س - 5}}$ «$\frac{-1}{3}$»

⑫ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt{4س^2 + 7} + 3س}{2س + 9}$ «$\frac{5}{2}$»

⑬ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt[4]{س^6 + 8} - \sqrt[6]{س^2 + 4}}{\sqrt{س^3 + 9}}$ «1»

⑭ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{3س^2 - س - 7}{(س + 1)\sqrt{25س^2 + 1}}$ «$\frac{3}{5}$»

٤ أوجد كلاً مما يأتى :

① 📖 $\lim\limits_{س \to \infty} \left[7 + \dfrac{2س^2}{(س + 3)^2}\right]$ «9»

② 📖 $\lim\limits_{س \to \infty} \left[\dfrac{س}{2س + 1} + \dfrac{3س^2}{(س - 3)^2}\right]$ «$\frac{7}{2}$»

③ 📖 $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{3س}{2س + 7}\right)$ «$\frac{-5}{6}$»

④ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\dfrac{2س^3}{2س^2 + 1} - س\right)$ «صفر»

⑤ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\dfrac{س^2 - 1}{س + 2} - \dfrac{س^2 + 1}{س - 2}\right)$ «-4»

⑥ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2 - 2} - \sqrt{س^2 + س}\right)$ «$-\frac{1}{2}$»

⑦ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{1}{س}\left(\sqrt{4س^2 + 1} - \sqrt{س^2 + 1}\right)$ «1»

⑧ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^2 + 5س} - س\right)$ «$\frac{5}{2}$»

⑨ 📖 $\lim\limits_{س \to \infty} س\left(\sqrt{4س^2 + 1} - 2س\right)$ «$\frac{1}{4}$»

⑩ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{(2س - 1)^5 (س^2 + 3)^6}{(س + 1)^7 (س^2 - 5)^5}$ «32»

⑪ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt{س + 1} - \sqrt{س - 1}}{\sqrt{4س + 1} - \sqrt{4س - 1}}$ «2»

٥ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\dfrac{3س^2 - 5س + 1}{4س^2 - 7}\right)^{\frac{1}{س}}$ «1»

② $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\dfrac{س + 1}{\sqrt{س^2 - 1}} + أ^{\frac{1}{س}}\right)$ حيث أ موجبة. «2»



③ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢\text{س} - ٣}{\sqrt[٣]{٢٧\text{س}^{٣} - ١٥\text{س} + ٢}} + ٨^{\frac{١}{\text{س}}} \right)$ «$١\frac{٢}{٣}$»

④ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٥\text{س}^{٢}}{١ - \text{س}^{٢}} - \sqrt[\text{س}]{١٣} \right)$ «−٦»

---

٦ أوجد قيمتي أ ، ن إذا كانت $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٤\text{أ}\text{س}^{\text{ن}} - ٤\text{س} + ٥}{٣ - ٩\text{س} + ٨\text{س}^{٢}} = ٣$ «٦ ، ٢»

---

٧ أوجد قيمة أ إذا كانت $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{\text{أ}\text{س}^{٣} + ٣}}{\sqrt{٤\text{س}^{٢} + ٧}} = -١$ «−٨»

---

٨ 📖 إذا كانت $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{\text{أ}\text{س}^{٢} + ٣\text{ب}\text{س} + ٥} - ٢\text{س} \right) = ٣$

أوجد قيمة كل من : أ ، ب «٤ ، ٤»

---

٩ أوجد قيمتي أ ، ب إذا كانت $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = ٥$ ، $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = ٢$

حيث $\text{د}(\text{س}) = \frac{٢ - \text{أ}\text{س}^{٢}}{٣ - \text{ب}\text{س} + \text{س}^{٢}}$ «−٥ ، ٢»

---

١٠ إذا كانت : $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س} + ١} - \text{أ}\text{س} - \text{ب} \right) = ٢$ أوجد قيمتي : أ ، ب «١ ، −٣»

---

١١ أوجد قيمتي أ ، ب إذا كانت $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣} + ٢\text{س} + ١}{(\text{أ} + ١)\text{س}^{٤} + (٧ - \text{ب})\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢}} = \infty$ «−١ ، ٧»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

أوجد كلاً مما يأتي :

① $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٢} + \text{س}^{-٤}}{(٢\text{س} + ٣)^{-٢}}$ «٤»

② $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـا}} \text{ن}\left[\left(\text{أ} + \frac{١}{\text{ن}}\right)^{٤} - \text{أ}^{٤} \right]$ «$٤\text{أ}^{٣}$»

③ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \text{س}\left[\left(٣ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٥} - ٢٤٣ \right]$ «٤٠٥»

④ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢} - \text{س} \right) \sqrt{٢\text{س}^{٢} + ١}$ «$\sqrt{٢}$»

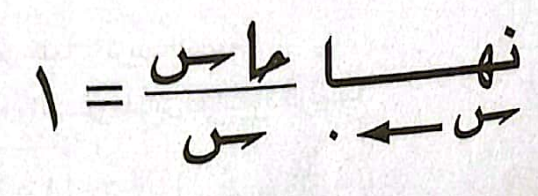
⑤ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(٢\text{س}^{-١} - \text{س}^{-٢} \right) \sqrt{٤\text{س}^{٢} + ١}$ «٤»

⑥ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٥\text{س}\sqrt{\text{س}} + ١٦\text{س} - ٣\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}{\text{س} + \sqrt{٤\text{س}^{٣} + ١}}$ «$\frac{٥}{٢}$»



الدرس 5

نهايات الدوال المثلثية





نظرية

إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى فإن :

١ $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا س}}{س} = ١$ **٢** $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{طا س}}{س} = ١$

* عند دراسة قيم الدالة د : د (س) = $\frac{\text{جا س}}{س}$ عندما س ← ٠

حيث س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى نكون الجدول الآتى :

س	± ١	± ٠,١	± ٠,٠١	صفر
$\frac{\text{جا س}}{س}$	٠,٨٤١٥	٠,٩٩٨٣	←------	١

ونلاحظ أنه

«كلما اقتربت س من الصفر كلما اقتربت النسبة $\frac{\text{جا س}}{س}$ من الواحد الصحيح»

والشكل المقابل يوضح ذلك بيانيًا.

أى أن $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا س}}{س} = ١$

* بالمثل عند دراسة قيم الدالة د : د (س) = $\frac{\text{طا س}}{س}$ عندما س ← ٠

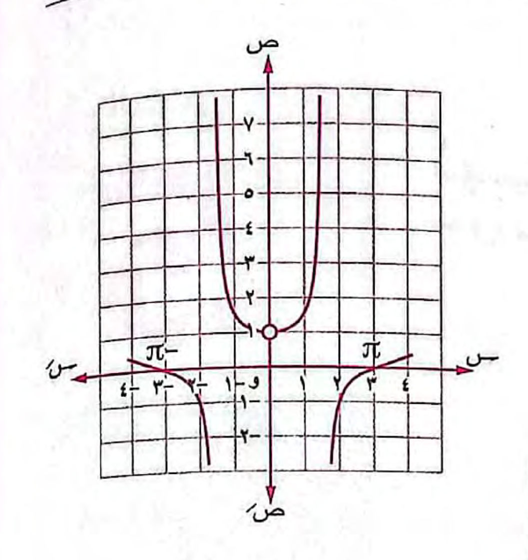
حيث س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى نكون الجدول الآتى :

س	± ١	± ٠,١	± ٠,٠١	صفر
$\frac{\text{طا س}}{س}$	١,٥٥٧٤	١,٠٠٣٣	←------	١



ونلاحظ أنه

«كلما اقتربت س من الصفر كلما اقتربت النسبة $\frac{\text{ظاس}}{\text{س}}$ من الواحد الصحيح» والشكل المقابل يوضح ذلك بيانيًا.



أى أن $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} = ١$

ملاحظتان

١ $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}}{\text{حاس}} = ١$

٢ $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}}{\text{ظاس}} = ١$ حيث س بالتقدير الدائرى.

نتيجة ١

إذا كانت س قياس زاوية بالتقدير الدائرى فإن :

١ $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا أس}}{\text{س}} = \text{أ}$ ومنها $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ب س}}{\text{حا أس}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

٢ $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ظا أس}}{\text{س}} = \text{أ}$ ومنها $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ظا أس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ب س}}{\text{ظا أس}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

فمثلًا :

* $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا ٣س}}{\text{س}} = ٣$ * $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ظا ٢س}}{\text{س}} = ٢$ * $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{-٥\text{س}}{\text{حا ٣س}} = \frac{-٥}{٣}$

* $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا ٢س}}{\text{٥س}} = \frac{٢}{٥}$ * $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ظا ٤س}}{\text{٣س}} = \frac{٤}{٣}$ * $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}}{\text{ظا ٧س}} = \frac{١}{٧}$

ملاحظتان

١ حاس ، حتاس معرفتان لجميع قيم س ∈ ح أما ظاس فهى معرفة لجميع قيم س عدا عند س = $\frac{٢ن+١}{٢}\pi$ ، ن ∈ ص لذلك فإن :

* $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{حاس} = \text{حاأ}$ ، أ ∈ ح * $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{حتاس} = \text{حتاأ}$ ، أ ∈ ح

* $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ظاس} = \text{ظاأ}$ ، أ ≠ $\frac{٢ن+١}{٢}\pi$ ، ن ∈ ص

٢ لاحظ الفرق بين : $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا أس}^٢}{\text{س}^٢}$ ، $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا}^٢ \text{أس}}{\text{س}^٢}$

حيث : $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا أس}^٢}{\text{س}^٢} = \text{أ}$ بينما $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا}^٢ \text{أس}}{\text{س}^٢} = \lim_{\text{س} \to ٠} \left(\frac{\text{حا أس}}{\text{س}}\right)^٢ = \text{أ}^٢$

فمثلًا : $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا ٣س}^٢}{\text{س}^٢} = ٣$ بينما $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا}^٢ \text{٣س}}{\text{س}^٢} = \lim_{\text{س} \to ٠} \left(\frac{\text{حا ٣س}}{\text{س}}\right)^٢ = ٣^٢ = ٩$



مثال ①

أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } ٢ س}{٣ س}$

② $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٤ س}{\text{جا } ٥ س}$

③ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } ٥ س}{٢ \text{ جا } ٣ س}$

④ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا } س}{\text{جا } ٢ س}$

الحـل

① $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } ٢ س}{٣ س} = \dfrac{٢}{٣}$

② $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٤ س}{\text{جا } ٥ س} = \dfrac{٤}{٥}$

③ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } ٥ س}{٢ \text{ جا } ٣ س} = \dfrac{١}{٢} \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{\text{جا } ٥ س}{س}}{\frac{\text{جا } ٣ س}{س}} = \dfrac{١}{٢} \times \dfrac{\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٥ س}{س}}{\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٣ س}{س}} = \dfrac{١}{٢} \times \dfrac{٥}{٣} = \dfrac{٥}{٦}$

④ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا } س}{\text{جا } ٢ س} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{\text{ظا } س}{س}}{\frac{\text{جا } ٢ س}{س}} = \dfrac{١}{٢}$

مثال ②

أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}^{٢} \, ٢ س}{٣ س^{٢}}$

② $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } ٣ س^{٢} \text{ جتا } س^{٢}}{٥ س^{٢}}$

الحـل

① $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}^{٢} \, ٢ س}{٣ س^{٢}} = \dfrac{١}{٣} \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{ظا } ٢ س}{س}\right)^{٢} = \dfrac{١}{٣} \times ٢^{٢} = \dfrac{٤}{٣}$

② $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } ٣ س^{٢} \text{ جتا } س^{٢}}{٥ س^{٢}} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } ٣ س^{٢}}{٥ س^{٢}} \times \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{ جتا } س^{٢} = \dfrac{٣}{٥} \times ١ = \dfrac{٣}{٥}$

مثال ③

أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ س - ٣ \text{ جا } س}{٣ س + \text{ظا } س}$

② $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} + ٥ \text{ ظا}^{٢} \, ٣ س}{٤ س^{٢} - \text{جا } ٢ س^{٢}}$

الحـل

① بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\therefore \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ س - ٣ \text{ جا } س}{٣ س + \text{ظا } س} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ - ٣ \frac{\text{جا } س}{س}}{٣ + \frac{\text{ظا } س}{س}} = \dfrac{٢ - ٣}{٣ + ١} = -\dfrac{١}{٤}$



[٢] بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ٥ ظا^٢ ٣س}{٤س^٢ - جا ٢س^٢} = \lim_{س \to ٠} \frac{١ + ٥ \left(\frac{ظا ٣س}{س}\right)^٢}{٤ - \frac{جا ٢س^٢}{س^٢}}$$

$$= \frac{١ + ٥(٣)^٢}{٤ - ٢} = \frac{٤٦}{٢} = ٢٣$$

نتيجة (٢)

$$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س}{س} = \text{صفر}$$

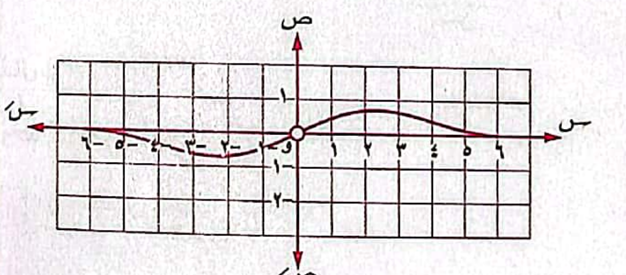
إثبات نتيجة (٢)

$$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س}{س} \times \frac{١ + جتا س}{١ + جتا س}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا^٢ س}{س (١ + جتا س)} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ س}{س (١ + جتا س)}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{١ + جتا س}$$

$$= ١ \times \text{صفر} = \text{صفر}$$



* الشكل المقابل يمثل الدالة د : $د(س) = \frac{١ - جتا س}{س}$ ونلاحظ فى الشكل أنه كلما اقتربت س من الصفر كلما اقتربت النسبة $\frac{١ - جتا س}{س}$ من الصفر أيضًا حيث س بالتقدير الدائرى.

أى أن $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س}{س} = \text{صفر}$

مثال (٤)

أوجد كلاً مما يأتى : [١] $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س}{جا س}$ [٢] $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س}{س^٢}$

الحـل

[١] $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س}{جا س} = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{١ - جتا س}{س} \times \frac{س}{جا س}\right) = \lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{س}{جا س}$

$= \text{صفر} \times ١ = \text{صفر}$



[٢] $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{حتا}\, س}{س^2} = \lim_{س \to 0} \left(\frac{1 - \text{حتا}\, س}{س^2} \times \frac{1 + \text{حتا}\, س}{1 + \text{حتا}\, س}\right)$

$\displaystyle = \lim_{س \to 0} \left(\frac{1 - \text{حتا}^2 س}{س^2} \times \frac{1}{1 + \text{حتا}\, س}\right)$

$\displaystyle = \lim_{س \to 0} \left(\frac{\text{حا}^2 س}{س^2} \times \frac{1}{1 + \text{حتا}\, س}\right)$

$\displaystyle = \lim_{س \to 0} \left(\frac{\text{حا}\, س}{س}\right)^2 \times \lim_{س \to 0} \left(\frac{1}{1 + \text{حتا}\, س}\right) = (1)^2 \times \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$

تذكر أن

- $\text{حا}^2 س + \text{حتا}^2 س = 1$
- $1 + \text{ظا}^2 س = \text{قا}^2 س$
- $1 + \text{ظتا}^2 س = \text{قتا}^2 س$

مثال ٥

أوجد كلاً مما يأتى :

[١] $\displaystyle \lim_{س \to 4} \frac{\text{حا}(3س - 12)}{س - 4}$

[٢] $\displaystyle \lim_{2س \to \pi} \frac{\text{حتا}\, س}{2س - \pi}$

[٣] $\displaystyle \lim_{س \to \pi} \frac{\text{ظا}\, س}{\pi - س}$

[٤] $\displaystyle \lim_{س \to \infty} س\, \text{حا}\, س^{-1}$

الحل

[١] $\displaystyle \lim_{س \to 4} \frac{\text{حا}(3س - 12)}{س - 4} = \lim_{(س - 4) \to 0} \frac{\text{حا}[3(س - 4)]}{س - 4} = 3$

[٢] $\displaystyle \lim_{2س \to \pi} \frac{\text{حتا}\, س}{2س - \pi} = \lim_{(\frac{\pi}{2} - س) \to 0} \frac{\text{حا}(\frac{\pi}{2} - س)}{-2(\frac{\pi}{2} - س)} = -\frac{1}{2}$

[٣] $\displaystyle \lim_{س \to \pi} \frac{\text{ظا}\, س}{\pi - س} = \lim_{(\pi - س) \to 0} \frac{-\text{ظا}(\pi - س)}{\pi - س} = -1$

[٤] $\displaystyle \lim_{س \to \infty} س\, \text{حا}\, س^{-1} = \lim_{\frac{1}{س} \to 0} \frac{\text{حا}\frac{1}{س}}{\frac{1}{س}} = 1$

مثال ٦

أوجد كلاً مما يأتى :

[١] $\displaystyle \lim_{س \to 0} 4س\, \text{قتا}\, 5س$

[٢] $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{\text{حتا}(\frac{\pi}{2} - س)}{س}$

[٣] $\displaystyle \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{حتا}\, س}{س - \frac{\pi}{2}}$

الحل

[١] $\displaystyle \lim_{س \to 0} 4س\, \text{قتا}\, 5س = \lim_{س \to 0} \frac{4س}{\text{حا}\, 5س} = \frac{4}{5}$

[٢] $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{\text{حتا}(\frac{\pi}{2} - س)}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{حا}\, س}{س} = 1$

[٣] $\displaystyle \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{حتا}\, س}{س - \frac{\pi}{2}} = \lim_{(\frac{\pi}{2} - س) \to 0} \frac{\text{حا}(\frac{\pi}{2} - س)}{-(\frac{\pi}{2} - س)} = -1$

معلومة

إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الستينى فإن :

[١] $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{\text{حا}\, س}{س} = \frac{\pi}{180}$

[٢] $\displaystyle \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}\, س}{س} = \frac{\pi}{180}$





على نهايات الدوال المثلثية



من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \ \text{طا س} =$ ....

(أ) صفر (ب) -١ (ج) $\frac{\pi}{٢}$ (د) π

② $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \ \text{حا ٢ س} =$ ....

(أ) صفر (ب) -١ (ج) ١ (د) $\frac{\pi}{٢}$

③ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \ \frac{\text{٢ س}}{\text{حا ٣ س}} =$ ....

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (ج) ٦ (د) ليس لها وجود.

④ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \ \frac{\text{طا } \pi \text{ س}}{\text{٦ س}} =$ ....

(أ) π (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (ج) $\frac{١}{٦}$ (د) غير موجودة.

⑤ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \ \frac{\text{حا } \frac{٣}{٤} \sqrt[٥]{\text{س}}}{\sqrt[٥]{\text{س}}} =$ ....

(أ) صفر (ب) $\frac{٣}{٤}$ (ج) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\sqrt[٥]{\frac{٣}{٤}}$

⑥ $\underset{(\text{٢ س} - ٣) \to ٠}{\text{نهـا}} \ \frac{\text{طا (٢ س} - ٣)}{\text{٢ س} - ٣} =$ ....

(أ) صفر (ب) -١ (ج) ١ (د) غير موجودة.

⑦ $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \ \frac{\text{حا ٣ هـ}^٢}{\text{٤ هـ}^٢} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

⑧ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \ \frac{\text{٣ س}^٥}{\text{طا ٤ س}^٥} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (ج) ١ (د) صفر

⑨ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \ \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{٣ س}} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) -١ (د) غير موجودة.



(١٠) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{٤ + ٥ س}}{\text{جتا ٣ س}}$ = ...

(أ) −٤　(ب) ٤　(جـ) ٣　(د) −٣

(١١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا } \frac{\text{س}}{٣}}{\text{٢ س}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$　(ب) $\frac{١}{٢}$　(جـ) $\frac{١}{٦}$　(د) $\frac{١}{١٢}$

(١٢) 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{٢ س + جا ٣ س}}{\text{ظا ٥ س}}$ = ...

(أ) ٥　(ب) $\frac{٦}{٥}$　(جـ) ١　(د) صفر

(١٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا ٢ س + ٥ جا ٣ س}}{\text{س}}$ = ...

(أ) ٧　(ب) ٥　(جـ) ١٧　(د) ١٠

(١٤) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{٢ س + جا ٣ س}}{\text{٥ س + ظا ٢ س}}$ = ...

(أ) ١　(ب) $\frac{٥}{٧}$　(جـ) $\frac{٧}{٥}$　(د) −١

(١٥) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا ٣ س}}{\text{٥ س}^{٢} \text{ − ٤ س}}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$　(ب) $\frac{-٣}{٤}$　(جـ) ٣　(د) $\frac{٣}{٥}$

(١٦) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س جا ٢ س}}{\text{س}^{٢}}$ = ...

(أ) صفر　(ب) ١　(جـ) ٢　(د) ٤

(١٧) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا ٢ س جتا ٣ س}}{\text{٦ س}}$ = ...

(أ) ١　(ب) ٣　(جـ) $\frac{١}{٣}$　(د) صفر

(١٨) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا ٣ س}}{\text{ظا } \frac{١}{٣} \text{ س}}$ = ...

(أ) ٩　(ب) $\frac{١}{٣}$　(جـ) ٣　(د) ١

(١٩) 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا } \frac{١}{٢} \text{ س}}{\text{جا } \frac{٣}{٤} \text{ س}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$　(ب) $\frac{٣}{٨}$　(جـ) $\frac{١}{٢}$　(د) $\frac{٢}{٣}$

(٢٠) 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}^{٢} \text{ ٢ س}}{\text{س جا ٣ س}}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٩}$　(ب) $\frac{١}{٢}$　(جـ) $\frac{٢}{٣}$　(د) $\frac{٤}{٣}$



(٢١) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س^٢ + \text{جا}^٢ \, ٢س}{س \, \text{ظا} \, ٢س} = \ldots\ldots$

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (جـ) ١ (د) ٥

(٢٢) $\lim\limits_{س \to ٠} \left(\frac{\text{جا} \, ٢س}{٣س} + \frac{س \, \text{جا} \, س^٢}{\text{جا} \, س^٢} \right) = \ldots\ldots$

(أ) ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

(٢٣) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{جا}^٢ \, ٩س + \text{ظا} \, ١٦س^٢}{٤س^٢} = \ldots\ldots$

(أ) $\frac{٩٧}{٤}$ (ب) $\frac{٩٧}{١٦}$ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) ٤

(٢٤) 📖 $\lim\limits_{س \to ٠} ٣س \, \text{قتا} \, ٢س = \ldots\ldots$

(أ) ٦ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) غير موجودة.

(٢٥) 📖 $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{جا} \, ٢س \, \text{ظا} \, ٣س}{٤س^٢} = \ldots\ldots$

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٦

(٢٦) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ - \text{ظا} \, س}{\text{جا} \, س - \text{جتا} \, س} = \ldots\ldots$

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) صفر (د) ليس لها وجود.

(٢٧) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١٢ - ١٢ \, \text{جتا} \, س}{س} = \ldots\ldots$

(أ) صفر (ب) ١٢ (جـ) ١ (د) ٢٤

(٢٨) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{جا} \, س - \text{جا} \, س \, \text{جتا} \, س}{س^٢} = \ldots\ldots$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٩) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\text{جتا} \, س + ٢س - ١}{٣س} = \ldots\ldots$

(أ) ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) صفر

(٣٠) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا} \, س + \text{جا} \, ٣س}{١ - \text{جتا} \, س + \text{ظا} \, ٢س} = \ldots\ldots$

(أ) صفر (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ١ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٣١) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ - \text{قا} \, س}{\text{جتا} \, س - ١} = \ldots\ldots$

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) -١



(٣٢) إذا كان : $\lim_{س \to ٠} \frac{(أ + ٣) س}{جا أ س} = \frac{٢}{٥}$ فإن : أ = ...

(أ) −٥ (ب) −٣ (جـ) −١ (د) ٣

(٣٣) إذا كانت : $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ أ س - ظا ٢ أ س^٢}{س^٢} = -١$ فإن : أ = ...

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٤

(٣٤) إذا كان : $\lim_{س \to ٠} \frac{جا أ س}{ب س} = \frac{١}{٣}$ ، $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ب س}{جـ س} = \frac{٤}{٣}$ فإن : $\frac{أ}{جـ}$ = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٩}$ (د) $\frac{١}{١٢}$

(٣٥) إذا كان : $\lim_{س \to ٠} \frac{جا أ س}{جا ب س} = \frac{٣}{٥}$ فإن : $\frac{أ + ب}{أ - ب}$ = ...

(أ) −٤ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) ٤

(٣٦) إذا كان : $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ ٤ س^٢}{س^ن} = ١٦$ فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

(٣٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{(جا س + جتا س)^٢ - ١}{٣ س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) صفر

(٣٨) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - جا^٣ س}{جتا^٢ س}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤} \pi$ (د) صفر

(٣٩) $\lim_{س \to ١} \frac{ظا (س - ١)}{(\sqrt{س} - ١)}$ = ...

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) −٢ (د) $\frac{١}{٢}$

(٤٠) $\lim_{س \to ١} \frac{جا (س - ١)}{س^٢ - ١}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) −١ (د) صفر

(٤١) $\lim_{س \to ٣} \frac{ظا (س - ٣)}{س^٢ - س - ٦}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٨}{٣}$ (جـ) ٣ (د) −٣

(٤٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٣ جتا س}{\pi - ٢ س}$ = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{-٣}{٢}$ (د) −٣



(٤٣) 📖 $\underset{\text{س} \to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا س}}{\pi - \text{س}} =$ ....

(أ) ١ (ب) $\pi^{٢}$ (جـ) π (د) $-\pi$

(٤٤) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{حتا س}}{\text{س}^{٢}} =$ ....

(أ) ١ (ب) ليس لها وجود. (جـ) صفر (د) $\frac{١}{٢}$

(٤٥) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا (حا س)}}{٣\,\text{س}} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ٣

(٤٦) 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا س}}{\text{س}} =$ .... حيث س بالتقدير الستينى.

(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{١٨٠}$ (جـ) $\frac{١٨٠}{\pi}$ (د) π

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد كلاً مما يأتى :

(١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا } ٢\text{س}}{\text{ظا } ٥\text{س}}$ «$\frac{٢}{٥}$»

(٢) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا } \frac{\text{س}}{٥}}{\text{ظا } \frac{٢\text{س}}{٣}}$ «$\frac{٣}{١٠}$»

(٣) 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا } ٣\text{س} - \text{حا } ٢\text{س}}{٥\,\text{س}}$ «$\frac{١}{٥}$»

(٤) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا س} + \text{ظا س}}{\text{حا س}}$ «٢»

(٥) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س حتا } ٣\text{س}}{\text{ظا } ٢\text{س}}$ «$\frac{١}{٢}$»

(٦) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٥\,\text{س}}{\text{حا س}} - \dfrac{\text{ظا } ٢\text{س}}{\text{س}}\right)$ «٣»

(٧) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\text{س} + \text{حا س}}{٢\text{س} + \text{ظا } ٣\text{س}}$ «$\frac{٤}{٥}$»

(٨) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ \text{ حا س} + ٤ \text{ ظا } ٢\text{س}}{٢\text{س} + \text{حا } ٣\text{س}}$ «٢»

(٩) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا س} - ٣ \text{ ظا س}}{٥ \text{ س حتا س}}$ «$\frac{-٢}{٥}$»

(١٠) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\,\text{س}}{٥ \text{ ظا س} - ٢ \text{ حا } ٢\text{س}}$ «٣»

(١١) 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} + \text{س حتا س}}{\text{حا س حتا س}}$ «٢»

(١٢) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا } ٣\text{س} - \text{حا } ٤\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}$ «$-\frac{١}{٢}$»

(١٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{حا } ٣\text{س}}{٥ \text{ س حتا } ٢\text{س}}$ «$\frac{٣}{٥}$»

(١٤) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا } ٢\text{س} + ٢ \text{ س حتا س}}{\text{حا } ٣\text{س}}$ «$\frac{٤}{٣}$»

(١٥) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢}{\text{س}} \text{ حا } \dfrac{\text{س}}{٧}$ «$\frac{٢}{٧}$»

(١٦) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{س}} \left(\text{حا } \dfrac{\text{س}}{٥} + \text{ظا } \dfrac{\text{س}}{٥}\right)$ «$\frac{٢}{٥}$»

(١٧) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٣}{٥\text{س}} + ٤\right) \text{حا } ٤\text{س}$ «$\frac{١٢}{٥}$»

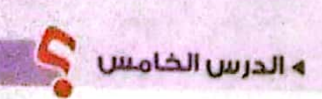
(١٨) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا } (٣\text{س} - ٩)}{٢\text{س} - ٦}$ «$\frac{٣}{٢}$»

(١٩) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا } ٢٤\text{س} \times \text{حتا } ٦\text{س}}{\text{ظا } ٦\text{س} \times \text{حتا } ٢٤\text{س}}$ «٤»

(٢٠) 📖 $\underset{\text{س} \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س حتا } (-٢\text{س} + ١)}{\text{س}^{٢} + \text{س}}$ «$\frac{٢}{٣}$»

(٢١) 📖 $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حا}^{٢}\text{س}}{\text{س}}$ «صفر»





٢ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حا^{٢}\,٣س}{٥س^{٢}}$ «$\frac{٩}{٥}$»

② $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حا^{٢}\,٣س}{طا^{٢}\,٢س}$ «$\frac{٩}{٤}$»

③ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حا^{٢}\frac{س}{٢}}{س\,طا\,٢س}$ «$\frac{١}{٨}$»

④ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{س\,حا\,٢س}{حاس\,طا\,٣س}$ «$\frac{٢}{٣}$»

⑤ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{طا^{٣}\,٢س}{٤س^{٣}}$ «٢»

⑥ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{س^{٢}\,طا\,٢س}{حا^{٤}\,٢س}$ «$\frac{١}{٨}$»

⑦ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حا\,٤س\,طا^{٢}\,٥س}{س^{٢}حاس}$ «١٠٠»

⑧ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{س\,طا\,٢س}{س^{٢}+حا^{٢}\,٣س}$ «$\frac{١}{٥}$»

⑨ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{س^{٢}+طا^{٢}\,٢س}{٢س^{٢}+حا^{٢}\,٣س}$ «$\frac{٥}{١١}$»

⑩ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{س\,طاس}{٤س^{٢}-حا^{٢}\,٣س}$ «$\frac{-١}{٥}$»

⑪ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{٢س^{٣}+س\,حا\,٥س}{س^{٢}-طا^{٢}\,٣س}$ «$\frac{-٥}{٨}$»

⑫ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{٢س+٥\,طاس+٣\,حاس}{حا\,٢س\,حتا\,٢س}$ «٥»

⑬ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{س\,حا\,٢س+حا^{٢}\,٢س}{طا^{٢}\,٣س+س^{٢}}$ «$\frac{٣}{٥}$»

⑭ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{طا\,٣س^{٢}+حا^{٢}\,٥س}{س^{٢}}$ «٢٨»

⑮ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حا\,٥س^{٣}+حا^{٣}\,٥س}{٢س^{٣}}$ «٦٥»

⑯ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \left(\frac{٢س^{٢}+حا\,٣س}{٢س^{٢}+طا\,٦س}\right)^{٤}$ «$\frac{١}{١٦}$»

⑰ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{طا^{٢}س+طا^{٢}\,٣س+طا^{٢}\,٥س}{س^{٢}}$ «٣٥»

⑱ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حاس \times حا^{٢}\,٢س \times حا^{٣}\,٤س}{س^{٦}}$ «٢٥٦»

⑲ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{طا\,٦س-حا\,(-٣س)}{س\,(حتا\,٥س+حتا\,٢س)}$ «$\frac{٩}{٢}$»

⑳ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حاس}{\sqrt{س+٢}-\sqrt{٢}}$ «$٢\sqrt{٢}$»

㉑ $\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{طا\,(س-٣)}{س^{٣}-٢٧}$ «$\frac{١}{٢٧}$»

㉒ $\underset{س \to ١}{نهـا} \frac{حا\,(س-١)}{س^{٢}+س-٢}$ «$\frac{١}{٣}$»

٣ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{٣\,(١-حتاس)}{س}$ «٠»

② $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حتاس-١}{حاس}$ «٠»

③ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{١-حتاس+حاس}{١-حتاس-حاس}$ «-١»

④ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{٢-حتا\,٣س-حتا\,٤س}{س}$ «٠»

⑤ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{حاس\,(١-حتاس)}{س^{٢}}$ «٠»

⑥ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{س-س\,حتاس}{حا^{٢}\,٣س}$ «٠»

⑦ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{١-حتا^{٢}\,٣س}{٤س^{٢}}$ «$\frac{٩}{٤}$»

⑧ $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{٤س^{٢}}{١-حتا^{٢}\frac{١}{٢}س}$ «١٦»

٩) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{3 - 3\,\text{جتا}^2\,4\text{س}}{8\,\text{س}^2}$ «٦»

١٠) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{قا}^2\,\text{س} - 1}{\text{س}^2}$ «١»

١١) 📖 $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1 - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}^2}$ «$\frac{1}{2}$»

١٢) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{4 - 4\,\text{جتا}\,\text{س}}{\text{جا}^2\,3\text{س}}$ «$\frac{2}{9}$»

١٣) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1 - \text{جتا}\,2\text{س}}{\text{س}\,\text{ظا}\,2\text{س}}$ «١»

١٤) 📖 $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1 - \text{جتا}\,3\text{س}}{\text{جتا}^2\,2\text{س} - 1}$ «$-\frac{9}{8}$»

---

٤ أوجد كلاً مما يأتى :

١) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \text{ظتا}\,3\text{س}\;\text{جا}\,5\text{س}$ «$\frac{5}{3}$»

٢) 📖 $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \text{س}\,(\text{قتا}\,2\text{س} - \text{ظتا}\,3\text{س})$ «$\frac{1}{6}$»

٣) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} 3\text{س}\;\text{ظا}\,2\text{س}\;\text{قتا}^2\,3\text{س}$ «$\frac{2}{3}$»

٤) 📖 $\lim\limits_{\text{س}\to 0} 6\,\text{س}^2\;\text{قتا}\,2\text{س}\;\text{ظتا}\,\text{س}$ «٣»

٥) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \text{قتا}\,4\text{س}\;\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)$ «$\frac{1}{4}$»

٦) 📖 $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{س}}{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}$ «١»

٧) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{س}\;\text{ظتا}^2\,2\text{س}}{\text{قتا}\,3\text{س}}$ «$\frac{3}{4}$»

٨) $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{ظا}\left(2\text{س} - \frac{\pi}{2}\right)}{8\text{س} - 2\pi}$ «$\frac{1}{4}$»

٩) $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{جا}\left(2\text{س} - \frac{\pi}{2}\right)}{\text{ظا}\,(4\text{س} - \pi)}$ «$\frac{1}{2}$»

١٠) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)}{\text{ظتا}\left(\frac{\pi}{2} - 3\text{س}\right)}$ «$\frac{1}{3}$»

١١) $\lim\limits_{(\text{س}-\pi)\to 0} \dfrac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س} - \pi}$ «-1»

١٢) $\lim\limits_{\text{س}\to -\pi} \dfrac{\text{ظا}\,\text{س}}{\text{س} + \pi}$ «١»

١٣) 📖 $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2\text{س} - \pi}{\text{جتا}\,\text{س}}$ «-2»

١٤) $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{ظتا}\,\text{س}}{\pi - 2\text{س}}$ «$\frac{1}{2}$»

١٥) 📖 $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{جا}\,\pi\text{س}}{\text{س} - 1}$ «π»

١٦) $\lim\limits_{\text{س}\to -1} \dfrac{1 + \text{س}}{\text{جتا}\,\frac{\pi}{2}\text{س}}$ «$\frac{2}{\pi}$»

١٧) $\lim\limits_{\text{س}\to 1} (1 - \text{س})\;\text{ظا}\,\dfrac{\pi\text{س}}{2}$ «$\frac{2}{\pi}$»

---

٥ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}}$ أوجد :

١) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \text{د}(\text{س})$ «١»

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{2}} \text{د}(\text{س})$ «$\frac{2}{\pi}$»

٣) $\lim\limits_{\text{س}\to \pi} \text{د}(\text{س})$ «صفر»

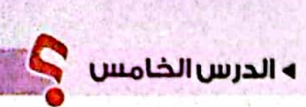
---

٦ أوجد كلاً مما يأتى :

١) $\lim\limits_{\text{س}\to 5} \dfrac{\text{جا}\,(\text{س} - 5)}{\text{س}^2 - 25}$ «$\frac{1}{10}$»

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to 5} \dfrac{\text{جا}^2\,(\text{س} - 5)}{(\text{س} - 5)^2}$ «١»

٣) $\lim\limits_{\text{س}\to 5} \dfrac{\text{جا}\,(\text{س} - 5)^2}{(\text{س} - 5)}$ «صفر»





ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا} س - \text{جتا}^{أ} س}{س^{٢}} = ١$ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٣

② $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ س\ \text{قا} \left(\frac{٢س + \pi}{٢} \right) = $ ....

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) صفر (جـ) -١ (د) $\frac{١}{٢}$

③ $\underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{ظا} س}{\text{جتا} س - \text{جا} س} = $ ....

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٢ (د) $\sqrt{٢}$

④ $\underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س^{٢} - ٥)}{\text{ظا}\ \pi س^{٢}} = $ ....

(أ) $\frac{٥}{\pi}$ (ب) $\frac{٢}{\pi}$ (جـ) $\frac{١}{\pi}$ (د) $\frac{-٥}{\pi}$

⑤ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا} س + \text{جا} ٢س + \text{جا} ٣س + \cdots + \text{جا} ١٠س}{\text{ظا} س + \text{ظا} ٢س + \text{ظا} ٣س + \cdots + \text{ظا} ١٠س} = $ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١٠ (د) ٥٥

---

٢ أوجد كلاً مما يأتي :

① $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٣\ \text{ظا}^{٢} س - ٤\ \text{ظا} س + ٧}{٥ + ٢\ \text{ظا}^{٢} س}$ «$\frac{٣}{٢}$»

② $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س^{٢} - س - ٢)}{س + ١}$ «-٣»

③ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}\ س \left(\text{ظا} \frac{٤}{س} + \text{جا} \frac{٣}{س} \right)$ «٧»

④ 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\text{جا} س)}{٥\ \text{جا} س}$ «$\frac{١}{٥}$»

⑤ 📖 $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(١ - \text{جتا} س)}{١ - \text{جتا} س}$ «١»

⑥ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}(\text{ظا}\ ٥س)}{٤س}$ «$\frac{٥}{٤}$»

⑦ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} \left(\frac{٢\ \text{ظا} س}{١ + \text{ظا}^{٢} س} \right)$ «٢»

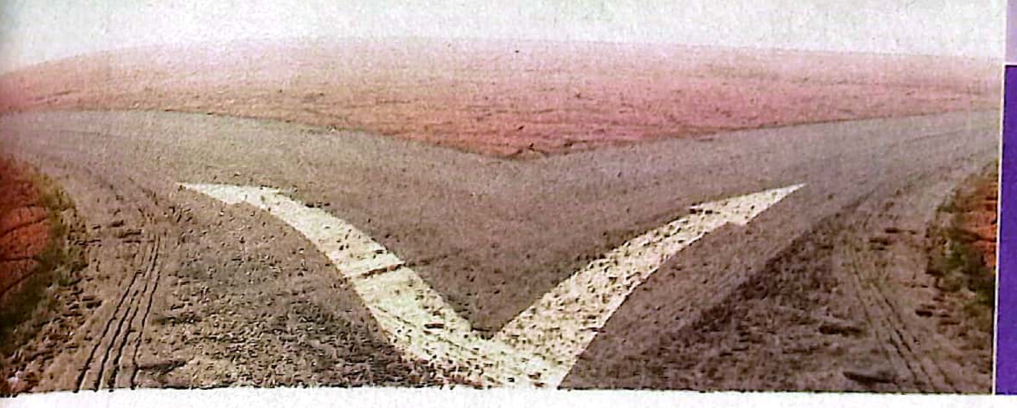
⑧ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}(\text{جتا} س)}{٢س - \pi}$ «$\frac{-١}{٢}$»

⑨ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جا} س}{٢س - \pi}$ «صفر»

⑩ $\underset{٢س \to \pi}{\text{نهـا}} \left(\frac{\pi}{٢} - س \right) \text{ظتا}(\pi - ٢س)$ «$\frac{١}{٢}$»

⑪ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا} س}{\text{جتا}\ ٣س}$ «$\frac{-١}{٣}$»





الدرس 6

بحث وجود نهاية للدالة مجزأة المجال

نلاحظ أن الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢س + ١ & ، س < ٢ \\ ٣ - س^٢ & ، س \geq ٢ \end{cases}$ مجزأة المجال

أى أن د (س) = ٢ س + ١ لقيم س ∈]- ∞ ، ٢[

د (س) = ٣ - $س^٢$ لقيم س ∈ [٢ ، ∞[

فمثلاً : د (-٣) = ٢ (-٣) + ١ = -٥ ، د (٤) = ٣ - $(٤)^٢$ = -١٣

وقد سبق وشرحنا كيفية إيجاد قيمة النهاية اليمنى واليسرى لمثل هذه الدوال بيانيًا ولكننا الآن نشرح كيفية تحقيق ذلك جبريًا (إن أمكن)

تعريف

الدالة د : د (س) تؤول للنهاية ل عندما س ← ا إذا وفقط إذا كانت نهايتاها اليمنى واليسرى عند ا موجودتين وكل منهما تساوى ل

أى أن $\lim_{س \to ا}$ د (س) = ل ⟺ د ($ا^+$) = د ($ا^-$) = ل

ملاحظات

١ عند إيجاد $\lim_{س \to ا}$ د (س) ليس من الضرورى أن تكون الدالة معرفة عند س = ا ، فقط يجب أن تكون معرفة فى فترة على يسار ا وفترة أخرى على يمين ا

٢ عند إيجاد $\lim_{س \to ا}$ د (س) يراعى بحث كل من النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة ثم المقارنة بين النهايتين (إن وجدتا) كما يلى :

* إذا كان : د ($ا^+$) = د ($ا^-$) = ل فإن : $\lim_{س \to ا}$ د (س) = ل

* إذا كان : د ($ا^+$) ≠ د ($ا^-$) فإن : $\lim_{س \to ا}$ د (س) غير موجودة

٣ أما إذا كانت قاعدة الدالة واحدة على يمين ويسار ا مباشرة فيمكن بحث نهاية الدالة مباشرة دون بحث النهاية اليمنى واليسرى.



مثال ١

إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} ٣س + ١ & ، س < ١ \\ ٥ - س & ، س > ١ \end{cases}$ فأوجد كلًا من :

[١] $\lim_{س \to -٢} د(س)$ [٢] $\lim_{س \to ٢} د(س)$ [٣] $\lim_{س \to ١} د(س)$

الحل

[١] ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين ويسار س = -٢ مباشرة وهى د (س) = ٣ س + ١

∴ $\lim_{س \to -٢} د(س) = \lim_{س \to -٢} (٣س + ١) = ٣(-٢) + ١ = -٥$

[٢] ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين ويسار س = ٣ مباشرة وهى : د (س) = ٥ - س

∴ $\lim_{س \to ٣} د(س) = \lim_{س \to ٣} (٥ - س) = ٥ - ٣ = ٢$

[٣] ∵ قاعدة الدالة على يسار ١ تختلف عن قاعدتها على يمين ١ لذلك يجب بحث كل من النهاية اليمنى واليسرى للدالة عند س = ١

∵ $د(١^-) = \lim_{س \to ١^-} (٣س + ١) = ٣ \times ١ + ١ = ٤$

، $د(١^+) = \lim_{س \to ١^+} (٥ - س) = ٥ - ١ = ٤$

∴ $د(١^-) = د(١^+) = ٤$

∴ $\lim_{س \to ١} د(س) = ٤$

لاحظ أن

الدالة د قاعدتها على يسار س = ١
هى : د (س) = ٣ س + ١
وقاعدتها على يمين س = ١
هى : د (س) = ٥ - س

مثال ٢

إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ & ، س \leq -٢ \\ ٢س + ٣ & ، س > -٢ \end{cases}$ فابحث وجود : $\lim_{س \to -٢} د(س)$

الحل

∵ $د(-٢^-) = \lim_{س \to -٢^-} (س^٢ + ٢) = (-٢)^٢ + ٢ = ٦$

، $د(-٢^+) = \lim_{س \to -٢^+} (٢س + ٣) = ٢(-٢) + ٣ = -١$

∵ $د(-٢^-) \neq د(-٢^+)$

∴ $\lim_{س \to -٢} د(س)$ غير موجودة.

لاحظ أنه

رغم أن الدالة معرفة عند س = -٢
حيث د (-٢) = ٦ إلا أن ذلك
لا دخل له فى وجود أو عدم
وجود نهاية للدالة عند س = -٢



مثال ③

إذا كانت : د (س) = $\frac{|س - ٣|}{س - ٣}$ ابحث وجود : $\lim_{س \to ٣}$ د (س)

الحل

∵ |س - ٣| = $\begin{cases} س - ٣ &، س \geq ٣ \\ -(س - ٣) &، س < ٣ \end{cases}$

∴ د (س) = $\begin{cases} \frac{س - ٣}{س - ٣} &، س > ٣ \\ \frac{-(س - ٣)}{س - ٣} &، س < ٣ \end{cases}$ = $\begin{cases} ١ &، س > ٣ \\ -١ &، س < ٣ \end{cases}$

∴ د (٣^+) = ١ ، د (٣^-) = -١ ∴ د (٣^+) ≠ د (٣^-)

∴ $\lim_{س \to ٣}$ د (س) غير موجودة.

مثال ④

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س |س| - ١ &، س < ٠ \\ \frac{|س|}{س} - ٢ &، س > ٠ \end{cases}$ فأوجد : $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

الحل

∵ |س| = $\begin{cases} س &، س \geq ٠ \\ -س &، س < ٠ \end{cases}$

∴ د (س) = $\begin{cases} س (-س) - ١ &، س < ٠ \\ \frac{س}{س} - ٢ &، س > ٠ \end{cases}$ = $\begin{cases} -س^٢ - ١ &، س < ٠ \\ -١ &، س > ٠ \end{cases}$

∵ د (٠^-) = $\lim_{س \to ٠^-}$ ($-س^٢$ - ١) = -١ ، د (٠^+) = $\lim_{س \to ٠^+}$ (-١) = -١

∴ د (٠^-) = د (٠^+) = -١ ∴ $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = -١

ملاحظة

إذا كانت : ص = |د (س)| حيث د دالة كثيرة حدود فإن : $\lim_{س \to أ}$ ص = |د (أ)|

وذلك باستخدام التعويض المباشر (ولا داعى لإعادة تعريف المقياس).

فمثلًا : إذا كانت : د (س) = |$س^٢$ - ٤ س + ٣| فإن : $\lim_{س \to ٣}$ د (س) = صفر

، إذا كانت : د (س) = |س + ١| - |س - ٣| فإن : $\lim_{س \to ٣}$ د (س) = ٤



مثال ⑤

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٢س + ٤ &، س < -٣ \\ ٣س + ٧ &، -٣ < س < ٥ \\ ٥ - س &، س > ٥ \end{cases}$

فابحث وجود : ١ نهـا د (س) حيث س ← -٣   ٢ نهـا د (س) حيث س ← ٥

الحل

١ د (-٣⁻) = نهـا$_{س ← -٣^-}$ (٢س + ٤) = -٦ + ٤ = -٢

، د (-٣⁺) = نهـا$_{س ← -٣^+}$ (٣س + ٧) = ٣ (-٣) + ٧ = -٢

∴ د (-٣⁻) = د (-٣⁺) = -٢   ∴ نهـا$_{س ← -٣}$ د (س) = -٢

٢ د (٥⁻) = نهـا$_{س ← ٥^-}$ (٣س + ٧) = ١٥ + ٧ = ٢٢

، د (٥⁺) = نهـا$_{س ← ٥^+}$ (٥ - س) = ٥ - ٥ = صفر

∵ د (٥⁻) ≠ د (٥⁺)   ∴ نهـا$_{س ← ٥}$ د (س) غير موجودة.

مثال ⑥

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{جا (س - ٤)}{(س - ٤)} &، س < ٤ \\ ظا \frac{\pi}{١٦} س &، ٤ < س < ٨ \end{cases}$ أوجد : نهـا$_{س ← ٤}$ د (س)

الحل

د (٤⁻) = نهـا$_{س ← ٤^-}$ $\frac{جا (س - ٤)}{(س - ٤)}$ = نهـا$_{(س - ٤) ← ٠}$ $\frac{جا (س - ٤)}{(س - ٤)}$ = ١

، د (٤⁺) = نهـا$_{س ← ٤^+}$ ظا $\frac{\pi}{١٦}$ س = ظا $\frac{\pi}{٤}$ = ١

∴ د (٤⁻) = د (٤⁺) = ١   ∴ نهـا$_{س ← ٤}$ د (س) = ١

نهاية الدالة المعرفة على فترة عند أحد طرفيها

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة]أ ، ب[أو المغلقة [أ ، ب] فإننا نلاحظ أن :

١ الدالة ليست معرفة على يسار النقطة أ فإننا نبحث النهاية اليمنى فقط [د (أ⁺)]

وتكون في هذه الحالة : نهـا$_{س ← أ^-}$ د (س) ، نهـا$_{س ← أ}$ د (س) غير موجودتين.



٢ الدالة ليست معرفة على يمين النقطة ب فإننا نبحث النهاية اليسرى فقط [د (ب⁻)]

وتكون فى هذه الحالة : $\lim_{س \to ب^+}$ د (س) ، $\lim_{س \to ب}$ د (س) غير موجودتين.

أى أن : نهاية الدالة عند النقطة الطرفية غير موجودة ويكون للدالة عند هذه النقطة نهاية من جهة واحدة فقط [يمنى أو يسرى]

مثال ٧

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{٢ س}{جا س} & ، \frac{-\pi}{٢} < س < ٠ \\ ٢ جتا \frac{٤}{٣} س & ، ٠ < س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

ابحث وجود : ١ د $(-\frac{\pi}{٢}^+)$ ، د $(-\frac{\pi}{٢}^-)$ ، $\lim_{س \to -\frac{\pi}{٢}}$ د (س)

٢ $\lim_{س \to ٠}$ د (س) ٣ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ د (س)

الحل

مجال الدالة د هو $]-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}[- \{٠\}$

١ د $(-\frac{\pi}{٢}^+)$ = $\lim_{س \to -\frac{\pi}{٢}^+}$ د (س) = $\lim_{س \to -\frac{\pi}{٢}^+} \frac{٢ س}{جا س} = \frac{-\pi}{جا \frac{-\pi}{٢}} = \frac{-\pi}{-١} = \pi$

، د $(-\frac{\pi}{٢}^-)$ غير موجودة.

∴ $\lim_{س \to -\frac{\pi}{٢}}$ د (س) غير موجودة [لأن الدالة غير معرفة على يسار س = $\frac{-\pi}{٢}$]

٢ ∵ د معرفة على يسار ويمين س = ٠ بقاعدتين مختلفتين

∴ د (٠^-) = $\lim_{س \to ٠^-} \frac{٢ س}{جا س} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{٢ \times ١}{\frac{جا س}{س}} = ٢ \times ١ = ٢$

، د (٠^+) = $\lim_{س \to ٠^+}$ ٢ جتا $\frac{٤ س}{٣}$ = ٢ جتا ٠ = ٢ × ١ = ٢

∵ د (٠^-) = د (٠^+) = ٢ ∴ $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = ٢

٣ ∵ د معرفة فقط على يسار س = $\frac{\pi}{٢}$

∴ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ د (س) غير موجودة.

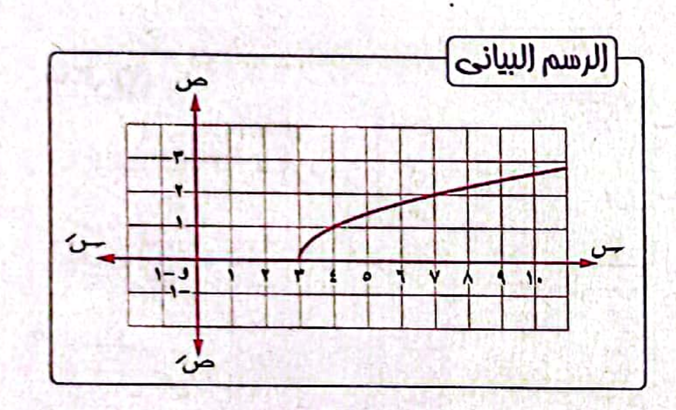


مثال ٨

ابحث وجود نهاية للدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٣}$ عندما س ← ٣

الحل

مجال الدالة هو [٣ ، ∞[



∴ الدالة د معرفة فقط على يمين س = ٣

∴ $\lim_{س \to ٣^+}$ د (س) = $\lim_{س \to ٣^+} \sqrt{س - ٣}$

= صفر

، $\lim_{س \to ٣^-}$ د (س) غير موجودة

[لأن الدالة غير معرفة على يسار ٣]

∴ $\lim_{س \to ٣}$ د (س) غير موجودة.

مثال ٩

إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{(س + ٢)^٢ - ٤}{س^٢ + س} & ، س > ٠ \\ \frac{١ - جتا^٢ ٢س}{س^٢} & ، س < ٠ \end{cases}$ أوجد : $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

الحل

∵ د (٠⁺) = $\lim_{س \to ٠^+} \frac{(س + ٢)^٢ - ٤}{س^٢ + س} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{س^٢ + ٤س + ٤ - ٤}{س (س + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{س (س + ٤)}{س (س + ١)} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{س + ٤}{س + ١} = ٤$

، د (٠⁻) = $\lim_{س \to ٠^-} \frac{١ - جتا^٢ ٢س}{س^٢} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{جا^٢ ٢س}{س^٢} = ٢^٢ = ٤$

∴ د (٠⁺) = د (٠⁻) = ٤ ∴ $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = ٤

مثال ١٠

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ظا ٤س قتا ٩س & ، -\frac{\pi}{٩} < س < ٠ \\ \frac{١}{٩} (أ^٢ + ٢) & ، س > ٠ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٠

أوجد قيمة أ :



◀ الحل

د (0^-) = نهـــا ـــس ← 0^- طا ٤ ـــس قتا ٩ ـــس = نهـــا ـــس ← 0^- $\frac{\text{طا ٤ ـــس}}{\text{طا ٩ ـــس}}$ = نهـــا ـــس ← 0^- $\frac{\frac{\text{طا ٤ ـــس}}{\text{ـــس}}}{\frac{\text{طا ٩ ـــس}}{\text{ـــس}}}$ = $\frac{4}{9}$

، د (0^+) = $\frac{1}{9}$ $(أ^2 + 2)$

، ∵ الدالة لها نهاية عند ـــس = ٠ ∴ د (0^-) = د (0^+) ∴ $\frac{1}{9}$ $(أ^2 + 2)$ = $\frac{4}{9}$

∴ $أ^2 + 2 = 4$ ∴ $أ^2 = 2$ ∴ أ = $\pm\sqrt{2}$

مثال ١١

إذا كانت الدالة د : د (ـــس) = $\begin{cases} \text{ـــس} & \text{، ـــس} \geq 0 \\ \frac{1}{\text{ـــس}} & \text{، ـــس} < 0 \end{cases}$

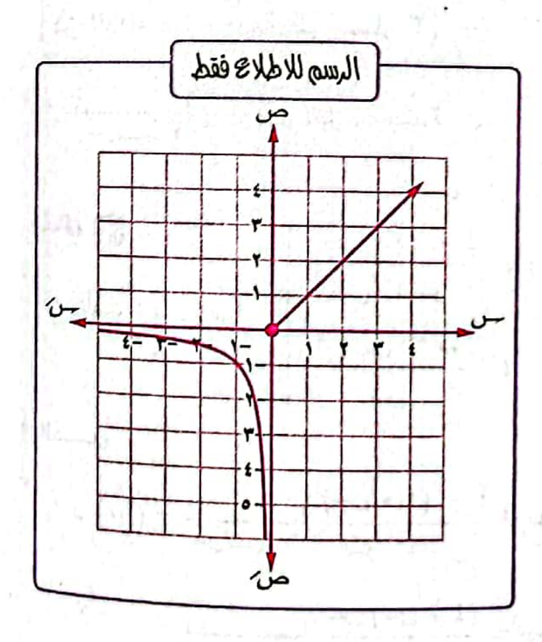
أوجد : [١] نهـــا ـــس ← 0^+ د (ـــس) [٢] نهـــا ـــس ← 0^- د (ـــس) [٣] نهـــا ـــس ← ٠ د (ـــس)

◀ الحل

[١] نهـــا ـــس ← 0^+ د (ـــس) = نهـــا ـــس ← 0^+ ـــس = صفر

[٢] نهـــا ـــس ← 0^- د (ـــس) = نهـــا ـــس ← 0^- $\frac{1}{\text{ـــس}}$ = $-\infty$

[٣] نهـــا ـــس ← ٠ د (ـــس) غير موجودة.



مثال ١٢

ابحث وجود : نهـــا ـــس ← ٠ $\frac{\text{طا |ـــس|}}{\text{ـــس}}$

◀ الحل

∵ |ـــس| = $\begin{cases} \text{ـــس} & \text{، ـــس} \geq 0 \\ \text{ـــس}- & \text{، ـــس} < 0 \end{cases}$ ∴ نهـــا ـــس ← 0^+ $\frac{\text{طا (ـــس)}}{\text{ـــس}}$ = ١

، نهـــا ـــس ← 0^- $\frac{\text{طا (ـــس-)}}{\text{ـــس}}$ = ١- ∴ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

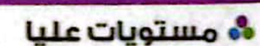
∴ نهـــا ـــس ← ٠ $\frac{\text{طا |ـــس|}}{\text{ـــس}}$ غير موجودة.



تمارين 17 على بحث وجود نهاية للدالة مجزأة المجال



من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا



أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} -٢ &، س < ٠ \\ ١ &، س > ٠ \end{cases}$ فإن :

أولًا : $\lim_{س \to -٢} د(س) = ...$

(أ) −٢ (ب) ١ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

ثانيًا : $\lim_{س \to ٤} د(س) = ...$

(أ) −٢ (ب) ١ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

ثالثًا : $\lim_{س \to ٠} د(س) = ...$

(أ) −٢ (ب) ١ (جـ) −١ (د) غير موجودة.

(٢) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} س^٢ - ١ &، س < ٢ \\ ٣س + ١ &، س \geq ٢ \end{cases}$ فإن : $\lim_{س \to ٢} د(س) = ...$

(أ) ليس لها وجود. (ب) ٣ (جـ) ٨ (د) ٧

(٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{|س - ٢|}{س - ٢} = ...$ ، $\lim_{س \to ١} \frac{|س - ٢|}{س - ٢} = ...$

(أ) غير موجودة ، صفر (ب) غير موجودتين. (جـ) غير موجودة ، −١ (د) ١ ، −١

(٤) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} ٣س - ١ &، س \neq ٢ \\ ٦ &، س = ٢ \end{cases}$ فإن : $\lim_{س \to ٢} د(س) = ...$

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ليس لها وجود.

(٥) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} ٣ - س &، س < ١ \\ ٤ &، س = ١ \\ س^٢ + ١ &، س > ١ \end{cases}$ فإن : $\lim_{س \to ١} د(س) = ...$

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) غير موجودة.



⑥ إذا كانت د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{جا} س}{س} & ، -\frac{\pi}{2} < س < 0 \\ \text{جتا} س & ، 0 < س < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ فإن : $\lim_{س \to صفر}$ د (س) = ...

(أ) $\frac{2}{\pi}$ (ب) $\frac{\pi}{2}$ (جـ) ١ (د) صفر

⑦ إذا كانت د (س) = $\begin{cases} \frac{س^2 - 4}{س - 2} & ، س \neq 2 \\ \text{ظا} \frac{\pi}{2س} & ، س = 2 \end{cases}$ فإن : $\lim_{س \to 2}$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

⑧ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{2 \text{جا} س}{\pi - س} & ، س < \pi \\ 1 - \text{جتا} س & ، س > \pi \end{cases}$ فإن : $\lim_{س \to \pi}$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) غير موجودة. (د) صفر

⑨ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{جا}(س - 1)}{(س - 1)} & ، س < 1 \\ \text{ظا} \frac{\pi س}{4} & ، 1 < س < 2 \end{cases}$ فإن : $\lim_{س \to 1}$ د (س) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{1}{4}$ (جـ) $\frac{\pi}{4}$ (د) غير موجودة.

⑩ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{2س + \text{جا} س}{\text{ظا} 2س + 4س} & ، 0 < س < \frac{\pi}{4} \\ 5س + \frac{1}{2} & ، س < 0 \end{cases}$ فإن : $\lim_{س \to 0}$ د (س) = ...

(أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) غير موجودة.

⑪ د (س) = $\begin{cases} س + 1 & \text{عندما } س > أ \\ 3س - 1 & \text{عندما } س < أ \end{cases}$ ، $\lim_{س \to أ}$ د (س) موجودة فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑫ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{جا} 4س \text{ ظتا} 9س & ، \frac{-\pi}{18} < س < 0 \\ 4س + أ^2 & ، س > 0 \end{cases}$ وكانت : $\lim_{س \to 0}$ د (س) موجودة

فإن : أ = ...

(أ) $\frac{4}{9}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (جـ) $\pm\frac{2}{3}$ (د) $\pm\frac{4}{9}$

⑬ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} أ + \text{جتا} س & ، س < 0 \\ \frac{\text{ظا} 2س}{أس} & ، 0 < س < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ وكانت $\lim_{س \to 0}$ د (س) موجودة

فإن : أ = ...

(أ) صفر أ، ١ (ب) ١ أ، -٢ (جـ) ٢ أ، ٣ (د) ١ أ، ٢



(١٤) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{طا}\,٢س}{\text{لو}_٢\,٨س} & ، \ \dfrac{-\pi}{٤} < س < ٠ \\ س + \dfrac{٢}{٣} & ، \ س > ٠ \end{cases}$ فإن : $\lim\limits_{س \to ٠} د(س) =$ ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) غير موجودة.

(١٥) 📖 إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{طا}\,س}{\pi - ٢س} & ، \ ٠ < س < \dfrac{\pi}{٢} \\ \text{حا}(\pi - س) & ، \ س > \dfrac{\pi}{٢} \end{cases}$

فإن : $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}} د(س) =$ ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) غير موجودة.

(١٦) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{حا}^٢\,٢س}{س^٢} & ، \ س \le ٠ \\ ٢أ + ٣\,\text{حتا}\,س & ، \ س > ٠ \end{cases}$ وكانت $\lim\limits_{س \to ٠} د(س)$ موجودة.

فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) $-\frac{١}{٢}$

(١٧) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \dfrac{٣س - |س^٢|}{س} & ، \ س < ٠ \\ ٣أ + ٤س & ، \ س > ٠ \end{cases}$ وكانت : $\lim\limits_{س \to ٠} د(س)$ موجودة.

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) ١

(١٨) $\lim\limits_{س \to ٠^-} \dfrac{\sqrt{١ - \text{حتا}^٢ س}}{س} =$ ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) صفر

(١٩) إذا كانت : $د(س) = \dfrac{٢س - ٦}{|س - ٣|}$ فإن : $\left(د(٣^+)\right)^٢ + \left(د(٣^-)\right)^٢ =$ ....

(أ) ٨ (ب) صفر (جـ) ٤ (د) −٤

(٢٠) إذا كان : $\lim\limits_{س \to أ} \dfrac{س^٢ - أ^٢}{س - أ} = \lim\limits_{س \to -٢} (|س| + ٨)$ فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ٤ (د) ١٠

(٢١) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٦ - ٦٤}{س^٤ - ١٦} & ، \ س < ٢ \\ أس & ، \ س > ٢ \end{cases}$ حيث $\lim\limits_{س \to ٢} د(س)$ لها وجود

فإن : قيمة أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦



(٢٢) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} أ جتا س + \frac{١٠ جا س}{س} & ، س > ٠ \\ \frac{س^٦ - ٦٤}{س^٣ - ٨} & ، س < ٠ \end{cases}$ وكانت د (س) لها نهاية عندما س = ٠

فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) −٥ (جـ) −٧ (د) ٧

(٢٣) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} ٣ س^٢ + أ س - ٢ & ، س > ٣ \\ ٢ س + ب & ، س < ٣ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٣ وتساوى ١٦

فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) ١٠ (جـ) −١٣ (د) ٧

(٢٤) إذا كانت الدالة د نهايتها موجودة عندما س ⟵ −٣ حيث

$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ٢ س - ٣}{س + ٣} & \text{عندما } س < -٣ \\ س + أ & \text{عندما } س > -٣ \end{cases}$ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) −١

(٢٥) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} ٣ س - ٢ & ، س < -١ \\ أ س + ب & ، -١ < س < ٣ \\ ٦ - س & ، س > ٣ \end{cases}$ لها نهاية عند س = −١ ، س = ٣

فإن : أ + ب = ...

(أ) ٢ (ب) −٣ (جـ) −١ (د) صفر

(٢٦) إذا كانت الدالة د : $د(س) = \begin{cases} \frac{أ س}{\sqrt{س + ٤} - ٢} & ، س > ٠ \\ \frac{جا ٢ س}{أ س} & ، س < ٠ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٠

فإن : أ = ...

(أ) $\pm \frac{١}{٢}$ (ب) $\pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جـ) $\pm \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٢٧) إذا كانت $\underset{س \to أ^+}{نهـا} د(س) = ٣$ ، $\underset{س \to أ^-}{نهـا} د(س) = ٦$

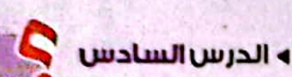
، $\underset{س \to أ^+}{نهـا} ر(س) = ٨$ ، $\underset{س \to أ^-}{نهـا} ر(س) = ٤$

فإن $\underset{س \to أ}{نهـا} (د(س) . ر(س)) = ...$

(أ) ١٨ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٢ (د) غير موجودة







ثانيًا الأسئلة المقالية

١ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \text{س} < ٣ \\ ٣\text{س} + ١ & ، \text{س} \geq ٣ \end{cases}$ أوجد : $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س})$ «١٠»

---

٢ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١٢}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} > ٣ \\ ٢\text{س} - ٧ & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$ ابحث وجود : $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س})$ «−١»

---

٣ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٣\text{س}}{\text{جاس}} & ، -\pi < \text{س} < ٠ \\ \text{جتا}\ ٣\text{س} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$ ابحث وجود : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س})$ «غير موجودة»

---

٤ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٥\text{س} + \text{ظا}\ ٢\text{س}}{٦\text{س} + \text{جاس}} & ، ٠ < \text{س} < \dfrac{\pi}{٤} \\ \text{جتاس} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$ ابحث وجود : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س})$ «١»

---

٥ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ٢ & ، \text{س} < ٠ \\ \text{س}^{٢} & ، ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \\ ٢\text{س} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$ فابحث وجود كل مما يأتى :

(١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س})$ (٢) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س})$ (٣) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س})$ «غير موجودة ، ١ ، ٤»

---

٦ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س} - ٣| & ، \text{س} \neq ٣ \\ ٢ & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$ ابحث وجود : $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س})$ «صفر»

---

٧ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{س} + ١} - ١} & ، \text{س} > ٠ \\ \dfrac{٢\text{س}}{\text{جاس}} & ، -\pi < \text{س} < ٠ \end{cases}$ أوجد : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س})$ «٢»

---

٨ إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{(\text{س} - ٣)^{٦} - ١}{\text{س} - ٤} & ، \text{س} > ٤ \\ \text{س} + ٢ & ، \text{س} < ٤ \end{cases}$ أوجد : $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س})$ «٦»

---

٩ أوجد قيمة كل من : م ، ك إذا كانت :

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٧$ ، $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٣\text{م} & ، \text{س} < ٢ \\ ٥\text{س} + \text{ك} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$ «١ ، −٣»



١٠ إذا كانت : $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = ٢ حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{جا } ٢س}{س} & ، س > ٠ \\ أ \text{ جتا } ٢س & ، س < ٠ \end{cases}$

فأوجد قيمة : أ «٢»

---

١١ إذا كانت : $\lim_{س \to أ}$ | ٣س + ٢ | = ١٤ فما قيمة : (أ) ؟ «٤ ، $\frac{-١٦}{٣}$»

---

١٢ ابحث وجود نهاية للدالة د : د(س) = $\begin{cases} \frac{٣س}{\text{ظا } س} & ، -\frac{\pi}{٣} < س < ٠ \\ ٣ \text{ جتا } س & ، ٠ < س < \frac{\pi}{٣} \end{cases}$

(١) عندما س ← $\frac{-\pi}{٣}$ (٢) س ← $\frac{\pi}{٣}$

(٣) س ← ٠

«غير موجودة ، غير موجودة ، ٣»

---

١٣ إذا كانت : د(س) = $س^٢ + \frac{\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩}}{س - ٣}$ ابحث وجود : $\lim_{س \to ٣}$ د(س) «غير موجودة»

---

١٤ إذا كانت : د(س) = $\frac{س^٢ + ٢\sqrt{س^٢}}{س}$ ابحث وجود : $\lim_{س \to ٠}$ د(س) «غير موجودة»

---

١٥ إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} س|س| + ٢ & ، س < ٠ \\ \frac{|س|}{س} + ١ & ، س > ٠ \end{cases}$ أوجد : $\lim_{س \to ٠}$ د(س) «٢»

---

١٦ أوجد قيمة م حتى تكون د(س) لها نهاية عندما س ← ١ حيث :

د(س) = $\begin{cases} \frac{(س - ١)^٢}{|س - ١|} & ، س < ١ \\ ٦س - ٣م & ، س > ١ \end{cases}$

«٢»

---

١٧ ابحث وجود $\lim_{س \to ١}$ [(د + ر)(س)] حيث :

د(س) = $\begin{cases} س^٢ + ٣ & ، س \geq ١ \\ ٤ - ٢س & ، س < ١ \end{cases}$ ، ر(س) = $\begin{cases} -٣س & ، س \geq ١ \\ ٢س^٢ - ٣س & ، س < ١ \end{cases}$ «١»

---

١٨ إذا كانت الدالة د : د(س) = $\begin{cases} \frac{أس}{\sqrt{س + ٤} - ٢} & ، س > ٠ \\ \frac{١}{أس \text{ قتا } ٣س} & ، -\pi < س < ٠ \end{cases}$ لها نهاية عند س = ٠

أوجد قيمة : أ «$\pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$»





١٩ أوجد قيمة النهاية اليمنى واليسرى ثم استنتج قيمة النهاية إن وجدت لكل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة :

① $د(س) = \sqrt{س - ٥}$ عند $س = ٥$

② 📖 $د(س) = \sqrt{٣ - س}$ عند $س = ٣$

③ $د(س) = \sqrt{س^{٢} - ١}$ عند $س = -١$ ، $س = ١$

④ $د(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$ عند $س = -٢$ ، $س = ٢$

---

٢٠ ابحث وجود نهاية كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين عند النقطة المبينة :

① $د(س) = \begin{cases} \dfrac{(س+٢)^{٦} - ٦٤}{س^{٢} + ٣٢س} & ، -٥ < س < ٠ \\ \dfrac{-١٢س}{١ - (حاس + حتاس)^{٢}} & ، ٠ < س < \dfrac{\pi}{٢} \end{cases}$ عند $س = ٠$ «٦»

② $د(س) = \begin{cases} \dfrac{١ - حتاس}{حا^{٢}٣س} & ، \dfrac{-\pi}{٣} < س < ٠ \\ -\dfrac{١}{٢}س^{٢} حا٦س (١ - قتا^{٢}٣س) & ، ٠ < س < \dfrac{\pi}{٣} \end{cases}$ عند $س = ٠$ «$\frac{١}{١٨}$»

---

٢١ ابحث وجود كل مما يأتى :

① $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{حا|س|}{س}$

② $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{حتا|س|}{س + ١}$ حيث س بالتقدير الدائرى. «غير موجودة ، ١»

---

٢٢ ابحث وجود : $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\sqrt{قا^{٢}س - ١}}{س}$ «غير موجودة»

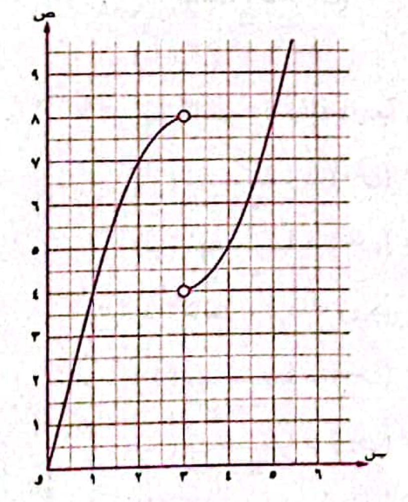
---

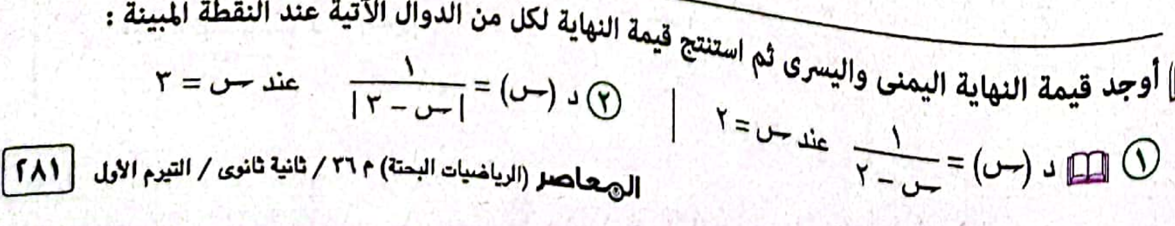
٢٣ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة هـ (س)


وكان :

$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س < ٣ \\ ٤س + ٢ & ، س > ٣ \end{cases}$

أوجد : $\lim\limits_{س \to ٣} \left(ق(س) + هـ(س)\right)$ «١٨»





٢٤ أوجد قيمة النهاية اليمنى واليسرى ثم استنتج قيمة النهاية لكل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة :

① 📖 $د(س) = \dfrac{١}{س - ٢}$ عند $س = ٢$

② $د(س) = \dfrac{١}{|س - ٣|}$ عند $س = ٣$



③ د (س) = { س − ٢ ، س > ١ ؛ $\frac{١}{س − ١}$ ، س < ١ } عند س = ١

٢٥ إذا كانت : د (س) = { ١ + $\frac{س^٢ + ٢ س}{|س + ٢|}$ ، س ∈]−٣ ، ٠[− {−٢} ؛ ٢ س + ١ ، س ∈ [٠ ، ٣[}

أوجد : ① نهـا س ← −٢ د (س) ② نهـا س ← −٢ د (س)

③ نهـا س ← ٠ د (س) ④ نهـا س ← ٢ د (س)

٢٦ إذا كانت : د (س) = { $\frac{\sqrt[٣]{٢ س − ٣} − ١}{\sqrt[٥]{٣ س − ٥} − ١}$ ، س > ٢ ؛ ك س ، س < ٢ } لها نهاية عند س = ٢ أوجد قيمة : ك «$\frac{٥}{٩}$»

٢٧ إذا كانت : د (س) = { $\frac{س^٢ + أ س + ب}{س^٢ − ٤ س + ٣}$ ، س < ٣ ؛ ٤ س ، س > ٣ } لها نهاية عند س = ٣

أوجد قيمتى : أ ، ب «١٨ ، −٦٣»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = س^٢ فإن : نهـا س ← ٢ د (د (س)) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٣٢

② إذا كانت : د دالة فردية وكان نهـا س ← ٢ د (س) = ٧ أى الجمل الآتية صحيحة ؟

(أ) نهـا س ← −٢ د (س) = ٧ (ب) نهـا س ← −٢ د (س) = −٧

(جـ) نهـا س ← −٢ د (س) = −٣ (د) نهـا س ← −٢ د (س) = صفر

③ إذا كانت : د دالة زوجية وكان نهـا س ← ٢ د (س) = ٥ أى الجمل الآتية صحيحة ؟

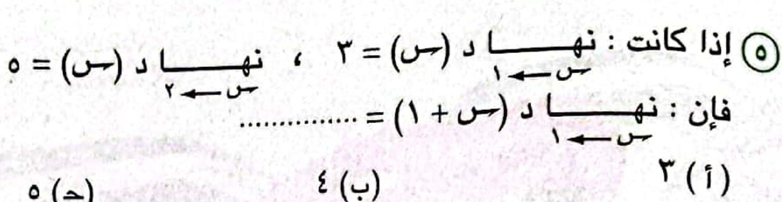
(أ) نهـا س ← −٢ د (س) = ٥ (ب) نهـا س ← −٢ د (س) = −٥

(جـ) نهـا س ← −٢ د (س) = صفر (د) نهـا س ← −٢ د (س) = −٢

④ إذا كانت د دالة أحادية كثيرة حدود وكانت : نهـا س ← ٢ د (س) = ٣

فإن : نهـا س ← ٢ د^{−١} (س) = ...

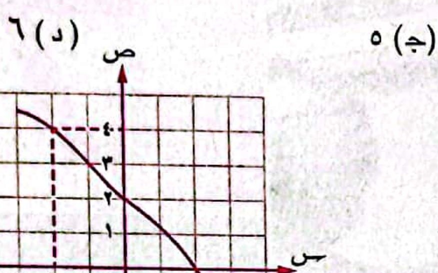
(أ) −٢ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) ٣



⑤ إذا كانت : $\underset{س \leftarrow ١}{نهـــا}$ د (س) = ٣ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا}$ د (س) = ٥

فإن : $\underset{س \leftarrow ١}{نهـــا}$ د (س + ١) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

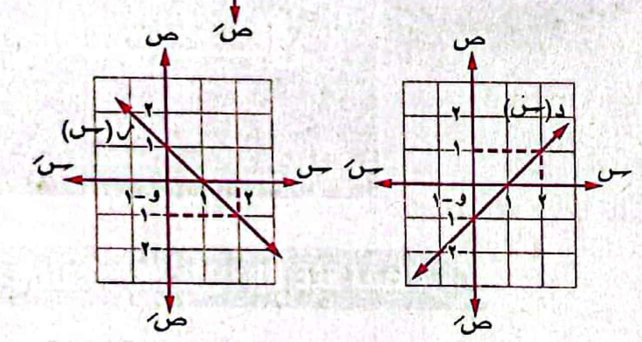


⑥ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـــا} \frac{[د(س)]^{٢} - ٦٤}{د(س) - ٤}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١٦

(جـ) ٣٢ (د) ٤٨



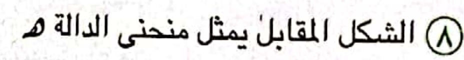
⑦ الشكلان المقابلان يمثلان

منحنيي الدالتين د ، ر

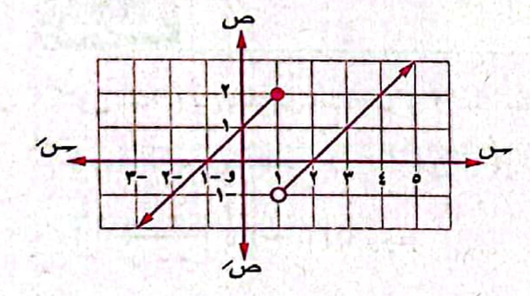
فإن : $\underset{س \leftarrow ١}{نهـــا} \frac{د(س)}{ر(س)}$ = ...

(أ) ١ (ب) -١

(جـ) صفر (د) غير موجودة.



⑧ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة هـ

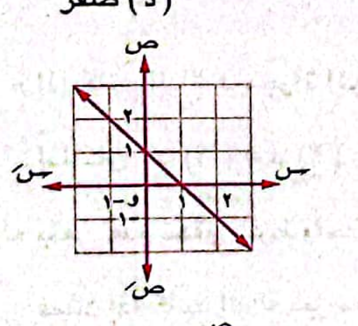


، ر (س) = { س ، س > ١ ؛ س - ٣ ، س < ١ }

، د (س) = هـ (س) + ر (س)

فإن : $\underset{س \leftarrow ١}{نهـــا}$ د (س) = ...

(أ) ليس لها وجود. (ب) ٢ (جـ) -١ (د) صفر

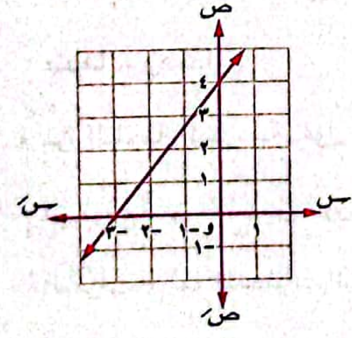


⑨ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا}$ | د (س) | = ...

(أ) -١ (ب) صفر.

(جـ) ١ (د) غير موجودة.



⑩ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا} \frac{د(س)}{د^{-١}(س)}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٤}{٣}$

(جـ) $\frac{-١٦}{٩}$ (د) $\frac{١٦}{٩}$





الدرس

7

الاتصـــــال

أولًا اتصال دالة عند نقطة

تعريف

تكون الدالة د متصلة عند $س = أ$ إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية مجتمعة :

١ الدالة معرفة عند $س = أ$ أى د (أ) لها وجود

٢ $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ د (س) لها وجود

٣ $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ د (س) = د (أ)

* إذا كانت الدالة د مجزأة المجال فإن د تكون متصلة عند $س = أ$

إذا كان : د $(أ^+)$ = د $(أ^-)$ = د (أ)

* يكفى عدم تحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة للحكم على عدم اتصال الدالة عند النقطة $س = أ$

فمثلًا إذا كانت الدالة غير معرفة عند $س = أ$ فهى بالقطع غير متصلة عندها ولا داعى لأن نبحث النهاية عندها ، وهكذا...

* من الناحية الهندسية نقول إن دالة متصلة فى فترة ما إذا أمكن أن نرسم منحنى الدالة فى هذه الفترة دون أن نرفع سن القلم عن الورقة التى نرسم عليها ، أى يكون منحنى الدالة فى هذه الحالة خاليًا من الثغرات أو القفزات ، أما المنحنيات التى بها ثغرات أو قفزات تكون لدوال غير متصلة (منفصلة)





فمثلًا :

١ $د(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ ، س ≠ ١

* د (١) غير موجودة لأن الدالة غير معرفة عند س = ١
* منحنى الدالة به ثغرة عند س = ١ لأن الدالة غير معرفة عند س = ١

وبالتالى تكون الدالة د غير متصلة عند س = ١

على الرغم من وجود نهاية للدالة [د (١^{+}) = د (١^{-}) = ٢]

٢ د (س) = { −١ ، س ≤ ٠ ؛ ١ ، س > ٠ }

* د (٠) = −١ (موجودة)
* د (٠^{+}) = ١ ، د (٠^{-}) = −١ ∴ د (٠^{+}) ≠ د (٠^{-})

∴ الدالة ليس لها نهاية عند س = ٠

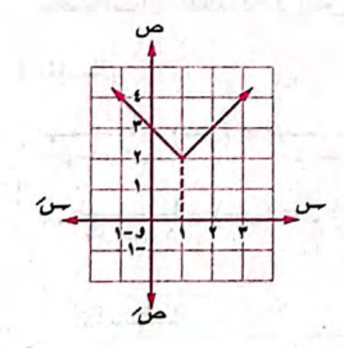
* منحنى الدالة به قفزة عند س = ٠ وبالتالى تكون الدالة د غير متصلة عند س = ٠



٣ د (س) = { ٢ − $س^{٢}$ ، س < ١ ؛ ٢ ، س = ١ ؛ س ، س > ١ }

* د (١) = ٢ (موجودة)
* د (١^{+}) = د (١^{-}) = ١ (موجودة) ∴ $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ١
* منحنى الدالة به ثقب عند س = ١ لأن $\lim_{س \to ١}$ د (س) ≠ د (١)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ١



٤ د (س) = { س + ١ ، س ≥ ١ ؛ ٣ − س ، س < ١ }

* د (١) = ٢ (موجودة)
* د (١^{+}) = د (١^{-}) = ٢ (موجودة) ∴ $\lim_{س \to ١}$ د (س) = د (١)
* منحنى الدالة ليس به ثقوب أو قفزات ، $\lim_{س \to ١}$ د (س) = د (١)

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

مثال ١

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = { ٢س + ٣ ، س > ٢ ؛ ٥س − ٣ ، س < ٢ } عند س = ٢

الحل

∵ الدالة غير معرفة عند س = ٢ أى أن د (٢) غير موجودة.

∴ د ليست متصلة عند س = ٢



مثال ②

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = { ٥ س − ٦ ، س ≥ ٣ ؛ ٣ س + ٤ ، س < ٣ } عند س = ٣

الحل

∵ د (٣) = ٥ × ٣ − ٦ = ٩ ، د (٣⁺) = نهـا س ← ٣⁺ د (س) = نهـا س ← ٣⁺ (٥ س − ٦) = ٩

، د (٣⁻) = نهـا س ← ٣⁻ د (س) = نهـا س ← ٣⁻ (٣ س + ٤) = ١٣

∴ د (٣⁺) ≠ د (٣⁻) ∴ الدالة ليس لها نهاية عند س = ٣

∴ د ليست متصلة عند س = ٣

مثال ③

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = { $\frac{س^٧ − ١٢٨}{س^٤ − ١٦}$ ، س ≠ ٢ ؛ ١٤ ، س = ٢ } عند س = ٢

الحل

∵ د (٢) = ١٤

، نهـا س ← ٢ د (س) = نهـا س ← ٢ $\frac{س^٧ − ١٢٨}{س^٤ − ١٦}$ = نهـا س ← ٢ $\frac{س^٧ − ٢^٧}{س^٤ − ٢^٤}$ = $\frac{٧}{٤}$ $(٢)^٣$ = ١٤

∴ نهـا س ← ٢ د (س) = د (٢) ∴ د متصلة عند س = ٢

مثال ④

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = | س − ١ | + ٢ عند س = ١

الحل

نهـا س ← ١ د (س) = نهـا س ← ١ (| س − ١ | + ٢) = ٢ ، د (١) = | ١ − ١ | + ٢ = ٢

∴ نهـا س ← ١ د (س) = د (١) ∴ د متصلة عند س = ١

ملاحظة

إذا كانت نهـا س ← أ د (س) موجودة ولكن الدالة د غير متصلة عند س = أ

بسبب أن : د (أ) غير معرفة أو نهـا س ← أ د (س) ≠ د (أ)

فإنه يمكن إعادة تعريف الدالة د لتصبح متصلة عند أ

أما إذا كانت نهـا س ← أ د (س) غير موجودة فإنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند أ



فمثلًا : أعد تعريف كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية لكى تصبح متصلة عند $س = ٢$ إن أمكن

قاعدة الدالة	$د(س) = \begin{cases} س + ٢ ، & س \neq ٢ \\ ١ ، & س = ٢ \end{cases}$	$د(س) = \frac{س^٢ + ٤س - ١٢}{س - ٢}$	$د(س) = \begin{cases} ١ ، & س > ٢ \\ صفر ، & س = ٢ \\ -١ ، & س < ٢ \end{cases}$
د (٢)	١	غير معرفة	صفر
$\lim_{س \to ٢}$ د (س)	٤	٨	غير موجودة
سبب عدم الاتصال عند $س = ٢$	د (٢) $\neq \lim_{س \to ٢}$ د (س)	الدالة غير معرفة عند $س = ٢$	$\lim_{س \to ٢}$ د (س) ليس لها وجود
إعادة التعريف لتصبح د متصلة عند $س = ٢$	$د(س) = \begin{cases} س + ٢ ، & س \neq ٢ \\ ٤ ، & س = ٢ \end{cases}$	$د(س) = \begin{cases} س + ٦ ، & س \neq ٢ \\ ٨ ، & س = ٢ \end{cases}$	لايمكن إعادة تعريفها لكى تصبح متصلة عند $س = ٢$

مثال ⑤

ابحث اتصال الدالة د : $د(س) = \frac{٢س^٢ - ٧س - ٤}{س - ٤}$ عند $س = ٤$

، إذا كانت د غير متصلة فهل يمكن إعادة تعريف الدالة د بحيث تكون متصلة عند $س = ٤$

الحل

∵ د غير معرفة عند $س = ٤$ ∴ د غير متصلة عند $س = ٤$

، ∵ $\lim_{س \to ٤} د(س) = \lim_{س \to ٤} \frac{٢س^٢ - ٧س - ٤}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(٢س + ١)}{(س - ٤)} = \lim_{س \to ٤} (٢س + ١) = ٩$

ولكى تكون الدالة متصلة عند $س = ٤$ لابد أن تكون د (٤) $= \lim_{س \to ٤}$ د (س) $= ٩$

∴ يمكن إعادة تعريف الدالة كما يلى $د(س) = \begin{cases} \frac{٢س^٢ - ٧س - ٤}{س - ٤} ، & س \neq ٤ \\ ٩ ، & س = ٤ \end{cases}$

مثال ⑥

هل يمكن إعادة تعريف الدالة د : $د(س) = \begin{cases} \frac{|س - ٢|}{س - ٢} ، & س \neq ٢ \\ صفر ، & س = ٢ \end{cases}$ لكى تكون متصلة عند $س = ٢$

الحل

∵ $|س - ٢| = \begin{cases} (س - ٢) ، & س \geq ٢ \\ -(س - ٢) ، & س < ٢ \end{cases}$ ∴ $د(س) = \begin{cases} \frac{س - ٢}{س - ٢} ، & س > ٢ \\ صفر ، & س = ٢ \\ \frac{-(س - ٢)}{س - ٢} ، & س < ٢ \end{cases}$





∴ د (س) = { ١ ، س > ٢ ؛ صفر ، س = ٢ ؛ -١ ، س < ٢ }

∴ د (٢) = صفر ، د (٢^+) = ١ ، د (٢^-) = -١

∴ د (٢^+) ≠ د (٢^-) ∴ نهـا (س ← ٢) د (س) ليس لها وجود

∴ لا يمكن إعادة تعريف الدالة عند س = ٢ لتصبح متصلة

مثال ٧

إذا كانت الدالة د : د (س) = { $\frac{\text{س جا ٥ س}}{\text{جا ٣ س + ظا ٤ س}}$ ، ٠ < س < $\frac{\pi}{٨}$ ؛ ٢ ب ، س = ٠ ؛ ٣ أ - $\frac{٢}{٧}$ جتا س ، س < ٠ } متصلة عند س = ٠

أوجد قيمة كل من : أ ، ب

الحل

∵ د (٠^+) = نهـا (س ← ٠^+) $\frac{\text{س جا ٥ س}}{\text{جا ٣ س + ظا ٤ س}}$ = نهـا (س ← ٠^+) $\frac{\text{جا ٥ س}}{\frac{\text{جا ٣ س}}{\text{س}} + \frac{\text{ظا ٤ س}}{\text{س}}}$ = $\frac{١}{٣ + ٤}$ = $\frac{١}{٧}$

، د (٠^-) = نهـا (س ← ٠^-) (٣ أ - $\frac{٢}{٧}$ جتا س) = ٣ أ - $\frac{٢}{٧}$ ، د (٠) = ٢ ب

، ∵ د متصلة عند س = ٠ ∴ د (٠^+) = د (٠^-) = د (٠) ∴ ٣ أ - $\frac{٢}{٧}$ = $\frac{١}{٧}$

∴ ٣ أ = $\frac{٣}{٧}$ ∴ أ = $\frac{١}{٧}$ ، ٢ ب = $\frac{١}{٧}$ ∴ ب = $\frac{١}{١٤}$

مثال ٨

إذا كانت الدالة د : د (س) = { $\text{س}^٢$ + أ س - ٢ ، س > ٢ ؛ ٤ ، س = ٢ ؛ ٥ أ + ب س ، س < ٢ } متصلة عند س = ٢ أوجد قيمة : ب

الحل

∵ د (٢) = ٤ ، ∵ د (٢^+) = نهـا (س ← ٢^+) ($\text{س}^٢$ + أ س - ٢) = ٢ + ٢ أ

، ∵ د (٢^-) = نهـا (س ← ٢^-) (٥ أ + ب س) = ٥ أ + ٢ ب ، ∵ د متصلة عند س = ٢

∴ د (٢^+) = د (٢^-) = د (٢) ∴ ٢ + ٢ أ = ٤ ∴ أ = ١ ، ٥ أ + ٢ ب = ٤

∴ ٥ + ٢ ب = ٤ ∴ ٢ ب = -١ ∴ ب = - $\frac{١}{٢}$

مثال ٩

إذا كانت د : د (س) = { $\text{س}^٢$ - ٢ س + ٢ ، س ≤ ٢ ؛ |س - ٣| ، س > ٢ } ابحث اتصال د عند س = ٢ ، س = ٣

الحل

عندما ٢ < س < ٣ يكون |س - ٣| = ٣ - س ، وعندما س ≥ ٣ يكون |س - ٣| = س - ٣

∴ د (س) = { $\text{س}^٢$ - ٢ س + ٢ ، س ≤ ٢ ؛ ٣ - س ، ٢ < س < ٣ ؛ س - ٣ ، س ≥ ٣ }



* عند $س = ٢$:

$د(٢) = ٢^٢ - ٢(٢) + ٢ = ٢$ ، $د(٢^-) = \lim_{س \to ٢^-} (س^٢ - ٢س + ٢) = ٢$

، $د(٢^+) = \lim_{س \to ٢^+} (٣ - س) = ١$ ∴ $د(٢^+) \ne د(٢^-)$

∴ $\lim_{س \to ٢}$ د(س) ليس لها وجود. ∴ د غير متصلة عند $س = ٢$

* عند $س = ٣$:

$د(٣) = ٣ - ٣ =$ صفر ، $د(٣^-) = \lim_{س \to ٣^-} (٣ - س) =$ صفر ، $د(٣^+) = \lim_{س \to ٣^+} (س - ٣) =$ صفر

∴ $د(٣^+) = د(٣^-) = د(٣)$ ∴ د متصلة عند $س = ٣$

مثال ١٠

أعد تعريف الدالة د : $د(س) = \frac{٤ \text{جتا} س}{\pi - ٢س}$ لكي تصبح متصلة عند $س = \frac{\pi}{٢}$

الحل

∵ الدالة د غير معرفة عند $س = \frac{\pi}{٢}$

، $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} د(س) = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٤ \text{جتا} س}{\pi - ٢س} = \lim_{(\frac{\pi}{٢} - س) \to ٠} \frac{٤ \text{جا} (\frac{\pi}{٢} - س)}{٢ (\frac{\pi}{٢} - س)} = \frac{٤}{٢} = ٢$

ولكن تكون الدالة متصلة عند $س = \frac{\pi}{٢}$ لابد أن يكون $د(\frac{\pi}{٢}) = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} د(س) = ٢$

∴ يمكن إعادة تعريف الدالة كما يلي د : $د(س) = \begin{cases} \frac{٤ \text{جتا} س}{\pi - ٢س} & ، س \ne \frac{\pi}{٢} \\ ٢ & ، س = \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

ثانيًا اتصال دالة على فترة

تعريف

١ إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة ف =]أ ، ب[

فإن د تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمى لهذه الفترة.

٢ إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المغلقة ف = [أ ، ب]

فإن الدالة د تكون متصلة على ف إذا كان :

* د متصلة على]أ ، ب[
* د متصلة من اليمين عند أ أى أن $د(أ) = \lim_{س \to أ^+} د(س)$
* د متصلة من اليسار عند ب أى أن $د(ب) = \lim_{س \to ب^-} د(س)$



بعض أنماط الدوال المتصلة

من معرفتنا للأشكال البيانية للدوال الجبرية أمكن استنتاج أنماط لبعض الدوال المتصلة مثل :

١ الدالة كثيرة الحدود : $د(س) = أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + ... + أ_ن س^ن$

متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

٢ الدالة الكسرية : $د(س) = \frac{أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + ... + أ_ن س^ن}{ب_٠ + ب_١ س + ب_٢ س^٢ + ... + ب_ن س^ن}$

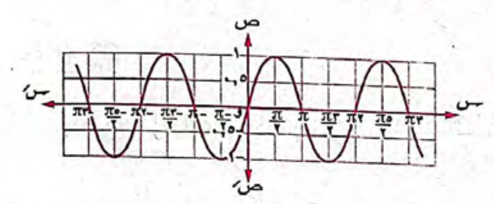
متصلة على ح − {أصفار المقام} أو أى فترة جزئية من ح عدا أصفار المقام

٣ الدالة المثلثية :

(أ) دالة الجيب : د(س) = جاس متصلة على ح

أو أى فترة جزئية من ح ويتضح ذلك من

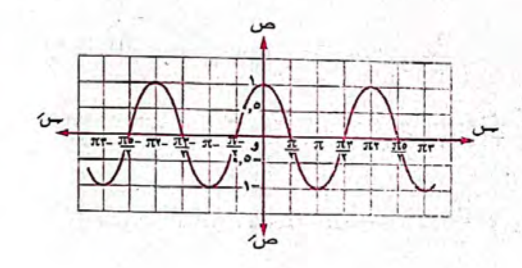
التمثيل البيانى فى الشكل المقابل :



(ب) دالة جيب التمام : د(س) = جتاس متصلة على ح

أو أى فترة جزئية من ح ويتضح ذلك من

التمثيل البيانى فى الشكل المقابل :



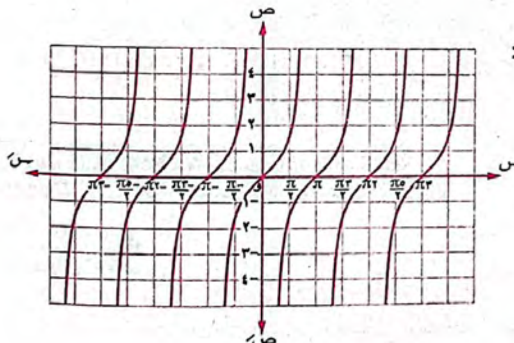
(جـ) دالة الظل : د(س) = ظاس متصلة على ح ما عدا النقط :

$..... ، \frac{٥\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢} ، \frac{-\pi}{٢} ، \frac{-٣\pi}{٢} ، \frac{-٥\pi}{٢} ، .....$

أى أن الدالة متصلة على

$ح - \{س : س = \frac{\pi}{٢} + ن\pi ، ن \in ص\}$

ويتضح ذلك من التمثيل البيانى فى الشكل المقابل.



معلومة إثرائية

كل من الدوال الآتية تكون متصلة على أى فترة مفتوحة جزئية من مجالها :

١ الدالة د : د(س) = |هـ(س)| حيث هـ(س) كثيرة حدود مجالها = ح

٢ الدالة د : $د(س) = \sqrt[ن]{هـ(س)}$ حيث $ن \in ص_+$ وأكبر من ١ ، هـ(س) كثيرة حدود

* مجالها = ح إذا كان ن عددًا فرديًا أكبر من ١

* مجالها الفترة التى تحقق هـ(س) ≥ ٠ إذا كان ن عددًا زوجيًا



مثال (١١)

ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية على ح :

[١] د (س) = س^{٣} + ٤ س − ٥ | [٢] د (س) = ٣

[٣] د (س) = $\frac{\text{س} - ٤}{\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} + ٦}$ | [٤] د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٢٥}$

الحل

[١] د (س) = س^{٣} + ٤ س − ٥ (دالة كثيرة حدود) ∴ د متصلة على ح

[٢] د (س) = ٣ (دالة كثيرة حدود) ∴ د متصلة على ح

[٣] د (س) = $\frac{\text{س} - ٤}{\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} + ٦}$ (دالة كسرية)

∵ س^{٢} − ٥ س + ٦ = ٠ عندما (س − ٢) (س − ٣) = ٠ أى عندما س = ٢ أ، س = ٣

∴ د متصلة على ح − {٢ ، ٣}

[٤] د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٢٥}$ (دالة كسرية) ∵ س^{٢} + ٢٥ > ٠ لجميع قيم س ∈ ح

∴ لا توجد أصفار للمقام. ∴ د متصلة على ح

ملاحظة

إذا كانت الدالتان د$_{١}$ ، د$_{٢}$ معرفتين على الفترة ف =]أ ، ب[وكانتا متصلتين على الفترة ف ، فإن كلًا من الدوال الآتية تكون متصلة على الفترة ف :

[١] د$_{١}$ ± د$_{٢}$ [٢] د$_{١}$ · د$_{٢}$ [٣] $\frac{\text{د}_{١}}{\text{د}_{٢}}$ بشرط د$_{٢}$ (س) ≠ صفر

مثال (١٢)

ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :

[١] د (س) = (س + ٢) جا س | [٢] د (س) = (س + ١)^{٢} − جا س

[٣] د (س) = $\frac{\text{جتا س} + \text{جا س}}{\text{س} + ٣}$ | [٤] د (س) = س^{٢} + ٥ + ٣ س$^{-٢}$

[٥] د (س) = $\frac{\text{طا س}}{\text{س}^{٢} - ١}$

الحل

[١] ∵ كل من (س + ٢) ، جا س متصلة على ح ∴ د متصلة على ح

[٢] ∵ كل من (س + ١)^{٢} ، جا س متصلة على ح ∴ د متصلة على ح

[٣] ∵ كل من جتا س ، جا س ، (س + ٣) متصلة على ح

∴ د متصلة على ح − {أصفار المقام} ∴ د متصلة على ح − {−٣}



[٤] ∵ د (س) = $س^٣ + ٥ + \frac{٣}{س^٢}$ ∴ د متصلة على ح − {٠}

[٥] ∵ طا س متصلة على ح − {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π ، ن ∈ ص}

، ($س^٢$ − ١) متصلة على ح ، ∵ $س^٢$ − ١ = ٠ عند س = ± ١

∴ الدالة د متصلة على ح − {١ ، −١ ، $\frac{\pi}{٢}$ + ن π} حيث ن ∈ ص

مثال ١٣

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٣ س + ٢ ، & -٣ \leq س < ٢ \\ س^٢ + ٤ ، & ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

الحـــل

∵ د معرفة على الفترة [−٣ ، ٥]

ولكى نبحث اتصالها على هذه الفترة نبحث :

[١] اتصالها فى كل من الفترتين]−٣ ، ٢[،]٢ ، ٥[

[٢] اتصالها عند النقطة س = ٢ التى تتغير عندها قاعدة الدالة.

[٣] اتصالها من اليمين عند س = −٣ ، اتصالها من اليسار عند س = ٥

أولًا : * لكل س ∈]−٣ ، ٢[

∴ د (س) = ٣ س + ٢ (كثيرة حدود) ∴ د متصلة على]−٣ ، ٢[

* لكل س ∈]٢ ، ٥[

∴ د (س) = $س^٢$ + ٤ (كثيرة حدود) ∴ د متصلة على]٢ ، ٥[

ثانيًا : ∵ د (٢) = $٢^٢$ + ٤ = ٨

، د (٢^-) = $\lim_{س \to ٢^-}$ (٣ س + ٢) = ٨ ، د (٢^+) = $\lim_{س \to ٢^+}$ ($س^٢$ + ٤) = ٨

∴ د (٢^-) = د (٢^+) = د (٢) ∴ د متصلة عند س = ٢

ثالثًا : ∵ د (−٣) = ٣ (−٣) + ٢ = −٧ ، د (-٣^+) = $\lim_{س \to -٣^+}$ (٣ س + ٢) = −٧

∴ د (-٣^+) = د (−٣) ∴ د متصلة من اليمين عند س = −٣

وكذلك ∵ د (٥) = $٥^٢$ + ٤ = ٢٩ ، د (٥^-) = $\lim_{س \to ٥^-}$ ($س^٢$ + ٤) = ٢٩

∴ د (٥^-) = د (٥) ∴ د متصلة من اليسار عند س = ٥

من أولًا وثانيًا وثالثًا نستنتج أن د متصلة على [−٣ ، ٥]



مثال ١٤

ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية على مجالها :

[١] د (س) = $\sqrt{س + ٢}$ [٢] د (س) = $\sqrt[3]{٢ - س^٢}$ [٣] د (س) = $\frac{١}{\sqrt[3]{س^٢ - ٢٥}}$

الحل

[١] ∵ د (س) = $\sqrt{س + ٢}$ [دليل الجذر = ٢ (زوجى)]

∴ د معرفة إذا كان س + ٢ ≥ ٠ أى س ≥ −٢ ∴ مجال د = [−٢ ، ∞[

نفرض أن أ ∈]−٢ ، ∞[

، ∵ $\lim_{س \to أ}$ د (س) = $\lim_{س \to أ} \sqrt{س + ٢} = \sqrt{أ + ٢}$ = د (أ)

∴ الدالة د متصلة لجميع قيم أ ∴ د متصلة على الفترة]−٢ ، ∞[

، ∵ د (−٢) = ٠ ، د $(−٢^+)$ = $\lim_{س \to −٢^+} \left(\sqrt{س + ٢}\right)$ = ٠

∴ د $(−٢^+)$ = د (−٢) ∴ د متصلة من اليمين عند س = −٢

∴ د متصلة على [−٢ ، ∞[

[٢] ∵ د (س) = $\sqrt[3]{٢ - س^٢}$ [دليل الجذر = ٣ (فردى)] ∴ د متصلة على ح

[٣] ∵ د (س) = $\frac{١}{\sqrt[3]{س^٢ - ٢٥}}$ [دليل الجذر = ٣ (فردى)] ∴ د متصلة على ح − {أصفار المقام}

، ∵ $س^٢$ − ٢٥ = ٠ عندما س = ± ٥ ∴ د متصلة على ح − {٥ ، −٥}

مثال ١٥

ابحث اتصال الدالة د : د (س) = $\begin{cases} جاس - جتاس ، ٠ \le س \le \pi \\ ٢ جتا^٢ س - ١ ، س > \pi \end{cases}$

الحل

∵ كل من جاس ، جتاس متصلة فى الفترة]٠ ، π[

∴ د (س) = جاس − جتاس متصلة فى الفترة]٠ ، π[

وبالمثل د (س) = ٢ $جتا^٢$ س − ١ متصلة فى الفترة]π ، ∞[(١)

، ∵ د (π) = جا π − جتا π = ١ ، د (π^-) = $\lim_{س \to \pi^-}$ (جاس − جتاس) = جا π − جتا π = ١

، د (π^+) = $\lim_{س \to \pi^+}$ (٢ $جتا^٢$ س − ١) = ٢ $جتا^٢$ π − ١ = ١

∴ د (π^-) = د (π^+) = د (π) ∴ د متصلة عند س = π (٢)

، ∵ د (٠) = جا ٠ − جتا ٠ = −١ ، د (٠^+) = $\lim_{س \to ٠^+}$ (جاس − جتاس) = −١

∴ د (٠^+) = د (٠) ∴ د متصلة من اليمين عند س = ٠ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن د متصلة على [٠ ، ∞[



مثال ١٦

ابحث اتصال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين على ح :

١ د (س) = $\frac{س - ١}{جتا س}$ ٢ د (س) = $\frac{س^٢ + ٣}{١ + جا س}$

الحل

١ ∵ كل من (س – ١) ، جتا س متصلة على ح

، ∵ جتا س = ٠ عندما س = $\frac{\pi}{٢} + \pi ن$

∴ د متصلة على

ح – {س : س = $\frac{\pi}{٢} + \pi ن$ ، ن ∈ ص}

٢ ∵ كل من (س^٢ + ٣) ، (١ + جا س)

متصلة على ح

، ∵ ١ + جا س = ٠ .

أى جا س = –١ عندما س = $\frac{٣\pi}{٢} + ٢ \pi ن$

∴ د متصلة على ح – {س : س = $\frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi ن$ ، ن ∈ ص}

تذكر أن

المعادلة	الحل العام
• جا س = ٠	س = $\pi ن$
• جا س = ١	س = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi ن$
• جا س = –١	س = $\frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi ن$
• جتا س = ٠	س = $\frac{\pi}{٢} + \pi ن$
• جتا س = ١	س = $٢\pi ن$
• جتا س = –١	س = $\pi + ٢\pi ن$

مثال ١٧

إذا كانت الدالة د : د (س) = { ٣ س – ٢ ، س ≤ –٢ ؛ أ س + ب ، –٢ < س < ٥ ؛ س^٢ – ١٢ ، س ≥ ٥ } متصلة على ح

أوجد : أ ، ب

الحل

∵ د متصلة على ح ∴ د متصلة عند س = –٢

∴ د (–٢^–) = د (–٢^+) = د (٢)

∵ نهـا_{س ← –٢^+} (أ س + ب) = ٣ (–٢) –٢ ∴ –٢ أ + ب = –٨ (١)

، د متصلة عند س = ٥ ∴ د (٥^–) = د (٥^+) = د (٥)

∵ نهـا_{س ← ٥^–} (أ س + ب) = (٥)^٢ – ١٢ ∴ ٥ أ + ب = ١٣ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ = ٣ ، ب = –٢







تمارين 18 على الاتصال

من أسئلة الكتاب المدرسي • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت د : د (س) دالة فإنها تكون متصلة عند س = أ إذا كان ....

(أ) د (أ) موجودة. (ب) د (أ) = د ($أ^+$) = د ($أ^-$)

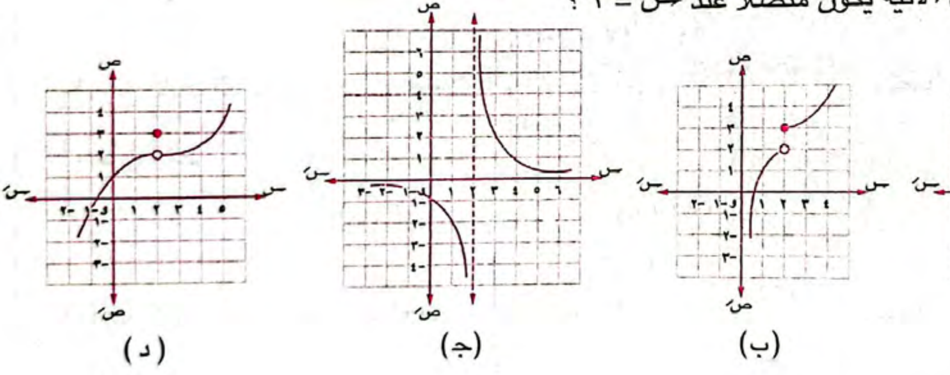
(جـ) د (س) لها نهاية عند س ⟵ أ (د) أ ، جـ معًا.

② إذا كانت : $\lim_{س \to أ^+}$ د (س) = ل ، $\lim_{س \to أ}$ د (س) = م وكانت الدالة متصلة عند س = أ

فإن : $ل^2 + م^2 - 2$ ل م = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) ٢

③ أى من الأشكال الآتية يكون متصلًا عند س = ٢ ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

④ فى الشكل المقابل :

جميع العبارات التالية صحيحة ما عدا ....

(أ) نهـا د (س) = ٠ عندما س ⟵ ١

(ب) الدالة ليست متصلة عند س = ١

(جـ) د (١) = ٢

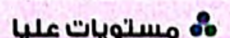
(د) لا يمكن إعادة تعريف الدالة لكى تصبح متصلة.

⑤ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^2 - 1}{س - 1} & ، س \neq 1 \\ 2أ & ، س = 1 \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤





⑥ إذا كانت د : د(س) = { أس^{٢} − ٣ ، س ≠ ٢ ؛ ٢أ ، س = ٢ } متصلة عند س = ٢ فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٦

⑦ إذا كانت : د(س) = { س^{٢} − ٢س عندما س ≥ ١ ؛ ك س − ٣ عندما س < ١ } متصلة عند س = ١ فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑧ إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ٢ حيث : د(س) = { أس^{٢} + ٥ عندما س ≤ ٢ ؛ ٩ − ب س عندما س > ٢ }

فإن : ٢أ + ب = ...

(أ) ٧ (ب) ١٤ (جـ) ٢ (د) −٢

⑨ إذا كانت د : د(س) = { س^{٢} + ب س + ٣ ، س < ١ ؛ أس + ب ، س ≥ ١ } متصلة عند س = ١ ، د(١) = ٧

فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{٧}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ٧

⑩ إذا كانت الدالة د حيث : د(س) = { $\frac{(س + ٢)^{٦} - ٦٤}{٢س}$ ، س ≠ ٠ ؛ ك ، س = ٠ } متصلة عند س = ٠

فإن : ك = ...

(أ) ٩٦ (ب) ١٩٢ (جـ) ٣٨٤ (د) ٩٢

⑪ إذا كانت د دالة حيث : د(س) = { $\frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س - ١}$ ، س ≠ ١ ؛ أ ، س = ١ } متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٢

⑫ إذا كانت الدالة د : د(س) = { $\frac{|س|}{س}$ + ٦ ، س < ٠ ؛ أ^{٢} + جا ٣س ، س ≥ ٠ } متصلة عند س = ٠

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ± $\sqrt{٦}$ (جـ) ± ٢ (د) ± $\sqrt{٥}$

⑬ إذا كانت : د(س) = { $\frac{ظا(س - ٢)}{س - ٢}$ ، س > ٢ ؛ جا($\frac{١}{٤}$ π س) ، س < ٢ } فإن : ....

(أ) الدالة متصلة عند س = ٢ (ب) الدالة ليس لها نهاية عند س ⟵ ٤

(جـ) الدالة لها نهاية عند س ⟵ ٢ (د) د(٢$^{+}$) ≠ د(٢$^{-}$)



⑭ إذا كانت الدالة د : د (س) = { $\frac{\text{جا } ٢ \text{ س} + \text{ظا س}}{١ + \text{جا } ٤ \text{ س}}$ ، س ∈]صفر ، $\frac{\pi}{٣}$[− { $\frac{\pi}{٤}$ } ؛ ك ، س = $\frac{\pi}{٤}$

متصلة عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) ٣ (د) ٢

⑮ إذا كانت الدالة د : د (س) = { جا ٩ س ظتا ٤ س ، س ∈]$\frac{-\pi}{٨}$ ، $\frac{\pi}{٨}$[− {٠} ؛ $ك^٢$ ، س = ٠

متصلة عند س = ٠ فإن : ك = ...

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ± $\frac{٣}{٢}$ (د) ± $\frac{٢}{٣}$

⑯ الدالة الزوجية المتصلة عند النقطة (أ ، ب) تكون متصلة أيضا عند النقطة ....

(أ) (−أ ، ب) (ب) (−أ ، −ب) (جـ) (أ ، −ب) (د) غير ذلك.

⑰ إذا كانت : د (س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٢٥}{\text{س} - ٥}$ حيث س ≠ ٥

فإن قيمة د (٥) التى تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع تساوى ....

(أ) ١٠ (ب) صفر (جـ) ٢٥ (د) غير معرفة.

⑱ إذا كانت د : د (س) = $\frac{\text{س}^٨ - \text{أ}^٨}{\text{س}^٥ - \text{أ}^٥}$ عند س ≠ أ ، د (أ) = ٢٠٠ متصلة عند س = أ

فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٨}{٥}$ (جـ) ١٢٥ (د) $\frac{١}{٥}$

⑲ إذا كانت : د (س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٥ \text{س} + ٦}{\text{س}^٢ - ٩}$ حيث س ≠ ± ٣

فإن قيمة د (٣) التى تجعل الدالة متصلة عند هذا الموضع تساوى ....

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) غير معرفة.

⑳ الدالة د : د (س) = ٤ $\text{س}^{-٣}$ + $\frac{\text{س}}{\text{س}^٢ - ٩}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب) ح − {٠}

(جـ) ح − {٣ ، −٣} (د) ح − {٣ ، −٣ ، ٠}

㉑ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س}^٢ + \text{أ}}$ متصلة على ح فإن : أ ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح^+$ (جـ) $ح^-$ (د) $ح^-$ ∪ {٠}



(٢٢) الدالة د : د (س) = $\frac{1}{\sqrt{س + 2}}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب) ح − {−٢} (ج) $]-2 ، \infty[$ (د) $[-2 ، \infty[$

(٢٣) الدالة د : د (س) = $\frac{س}{|س - 1| - 3}$ متصلة على ....

(أ) ح − {٣} (ب) ح − {−٣ ، ٣} (ج) ح − {−٢ ، ٤} (د) ح

(٢٤) الدالة د : د (س) = $\sqrt[3]{4 - س^2}$ متصلة على ....

(أ) $[-2 ، 2]$ (ب) ح − $]-2 ، 2[$ (ج) $]4 ، \infty[$ (د) ح

(٢٥) الدالة د : د (س) = $\sqrt[3]{2س - 5} + \sqrt[4]{س^2 + 4}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح^+$ (ج) $[\frac{5}{2} ، \infty[$ (د) $[-4 ، \frac{5}{2}]$

(٢٦) الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - 1}$ متصلة في ....

(أ) $[1 ، \infty[$ (ب) $[-1 ، \infty[$ (ج) $]-\infty ، 1]$ (د) $]-\infty ، -1]$

(٢٧) الدالة د : د (س) = ٤ س $\sqrt{-س}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب) $]-\infty ، 4]$ (ج) $]-\infty ، 0]$ (د) $[0 ، \infty[$

(٢٨) الدالة د : د (س) = $\frac{س + 2}{\sqrt{س} - 2}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) $[4 ، \infty[$ (ب) $[0 ، \infty[$ (ج) $[0 ، \infty[$ − {٤} (د) $]-\infty ، 2]$

(٢٩) الدوال الآتية متصلة على ح ماعدا ....

(أ) د (س) = جا س (ب) د (س) = $س^2 - 2$

(جـ) د (س) = ظا س (د) د (س) = $\frac{5س + 3}{س^2 + 4}$

(٣٠) الدالة د : د (س) = ظا ٢ س متصلة لكل س ∈ ح − {س : س = ... ، ن ∈ ص}

(أ) $\frac{\pi}{2} + ن\pi$ (ب) $\frac{\pi}{4} + \frac{ن\pi}{2}$ (ج) $\frac{\pi}{4} + ن\pi$ (د) $\frac{\pi}{2} + 2ن\pi$

(٣١) إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} \frac{جا أس}{2س} & ، س \neq 0 \\ 5 & ، س = 0 \end{cases}$ متصلة على ح فإن : أ = ...

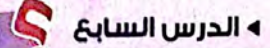
(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ٢ (د) صفر

(٣٢) إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} س + 1 & ، 1 < س < 3 \\ س^2 + ب س + جـ & ، س \in ح -]1 ، 3[\end{cases}$ متصلة على ح

فإن : ب − جـ = ...

(أ) −٣ (ب) ١ (ج) ٤ (د) −٧





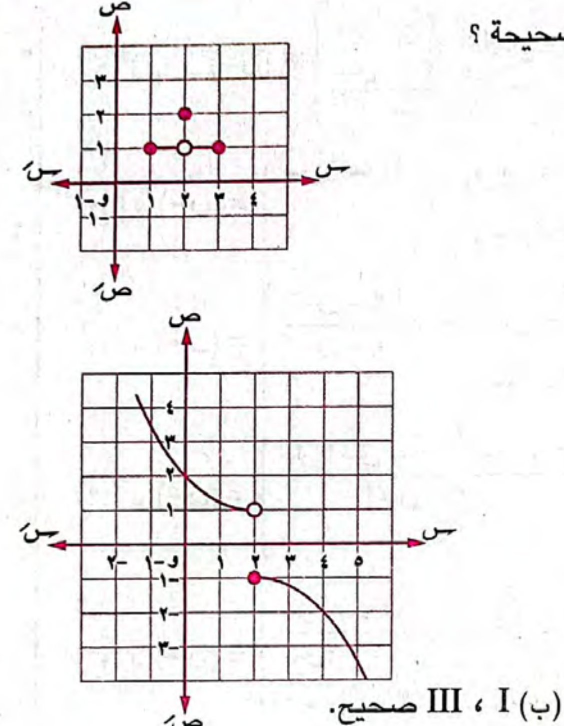
㉝ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د أى الجمل الآتية صحيحة ؟

(أ) د متصلة على الفترة [١ ، ٣]

(ب) د متصلة على الفترة]١ ، ٣[

(جـ) نهـــا د (س) موجودة حيث أ ∈ [١ ، ٣] (س ← أ)

(د) نهـــا د (س) موجودة حيث أ ∈]١ ، ٣[(س ← أ)



㉞ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

، ر (س) = | د (س) |

فإن : (I) ر (س) متصلة على ح

(II) نهـــا د (س) = ± ١ (س ← ٢)

(III) نهـــا ر (س) = ١ (س ← ٢)

(أ) I ، II صحيح.

(ب) I ، III صحيح.

(جـ) I ، II ، III صحيح.

(د) II صحيح.

ثانيًا الأسئلة المقالية

تمارين على الاتصال عند نقطة

١ ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية عند النقط المبينة :

① د (س) = س^{٢} + س − ٣ عند س = −١

② د (س) = $\sqrt[٣]{س − ١}$ عند س = ٩

③ 📖 د (س) = $\frac{س^{٢} − ٤}{س − ٢}$ عند س = ١ ، س = ٢

④ 📖 د (س) = ٥ − | س − ٣ | عند س = ٣

⑤ د (س) = | س − ٤ | + | س + ٢ | عند س = ٤ ، س = −٢

⑥ د (س) = { ٤ س^{٢} + ٣ ، س ≤ $\frac{١}{٢}$ ؛ ٥ − ٢ س ، س > $\frac{١}{٢}$ } عند س = $\frac{١}{٢}$

⑦ د (س) = { ٢ س ، س < ١ ؛ ٤ − ٢ س ، س > ١ } عند س = −١ ، س = ١

⑧ 📖 د (س) = { س + ٤ ، س < −٢ ؛ ١ ، −٢ ≤ س < −١ ؛ ٢ س + ٣ ، س ≥ −١ } عند س = −٢ ، س = −١

⑨ 📖 $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٣ & ، س \le ١ \\ \dfrac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س - ١} & ، س > ١ \end{cases}$ عند $س = ١$

⑩ $د(س) = \begin{cases} س|س| & ، س \ne ٠ \\ ٢ & ، س = ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

⑪ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{|س - ٣|}{س - ٣} & ، س \ne ٣ \\ ٢ & ، س = ٣ \end{cases}$ عند $س = ٣$

⑫ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س|س - ٢| - س + ٢}{|س - ٢|} & ، س > ٢ \\ ٣ & ، س \le ٢ \end{cases}$ عند $س = ٢$

⑬ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٧} - ١٢٨}{س^{٤} - ١٦} & ، س \ne ٢ \\ ٣س^{٢} + ٢ & ، س = ٢ \end{cases}$ عند $س = ٢$

⑭ 📖 $د(س) = \begin{cases} \dfrac{١ - جتا س}{س} & ، س > ٠ \\ ٢ جا س & ، س \le ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

⑮ 📖 $د(س) = \begin{cases} \dfrac{جا(س - ٢)}{س^{٢} - ٤} & ، س \in]-\infty ، ٢[- \{-٢\} \\ ١ - \dfrac{٣}{س^{٢}} & ، س \in [٢ ، \infty[\end{cases}$ عند $س = ٢$

⑯ $د(س) = \begin{cases} س|س| + ٤ & ، س \le ٠ \\ \dfrac{|س|}{س} + ٣ & ، س > ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

⑰ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} + ٢س - ٣}{|س + ٣|} & ، س \ne -٣ \\ ٢ & ، س = -٣ \end{cases}$ عند $س = -٣$ ، عند $س = ١$

⑱ $د(س) = \begin{cases} |س + ٣| & ، س \le ٢ \\ ١١ - ٣س & ، س > ٢ \end{cases}$ عند $س = -٣$ ، $س = ٢$

⑲ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{٥س^{٢} + جا^{٢} ٢س}{س ظا ٣س} & ، \dfrac{-\pi}{٦} < س < ٠ \\ \dfrac{س + ٣}{س + ١} & ، س \ge ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

⑳ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{جا س}{\pi - س} & ، س \ne \pi \\ ١ & ، س = \pi \end{cases}$ عند $س = \pi$



٢ أوجد قيم ك ، أ ، ب ، حـ التى تجعل كلًا من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية متصلة عند النقطة المبينة أمام كل منها :

① د(س) = { (س² + ٢س − ٣)/(س + ٣) ، س ≠ −٣ ؛ س + أ ، س = −٣ } عند س = −٣ «−١»

② د(س) = { (س² − ٥س + ٦)/(س³ − ٨) ، س ≠ ٢ ؛ −٢/|أ| ، س = ٢ } عند س = ٢ «± ٢٤»

③ د(س) = { (√(س + ٣) − ٢)/(س² − ١) ، س ≠ ١ ؛ ك ، س = ١ } عند س = ١ «$\frac{1}{8}$»

④ د(س) = { (جا² ٢س)/(س ظا ٣س) ، س ∈] −π/٦ ، π/٦ [− {٠} ؛ أ + ١ ، س = ٠ } عند س = ٠ «$\frac{1}{3}$»

⑤ د(س) = { ٣س − ٢ ، س ≤ −٢ ؛ أس + ب ، −٢ < س < ٥ ؛ س² − ١٢ ، س ≥ ٥ } عند س = −٢ ، س = ٥ «٣ ، −٢»

⑥ د(س) = { أ + ب س ، س > ٢ ؛ ٣ ، س = ٢ ؛ ب − أس² ، س < ٢ } عند س = ٢ «−$\frac{1}{3}$ ، $\frac{5}{3}$»

⑦ د(س) = { (جتا ٢س − ١)/س² ، س ≠ ٠ ؛ ك ، س = ٠ } عند س = ٠ «−٢»

⑧ د(س) = { ٢ − س² ، س ≤ حـ ؛ س ، س > حـ } عند س = حـ «١ أ −٢»

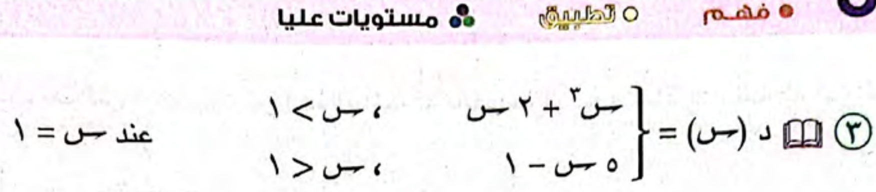
⑨ د(س) = { (١ − جتا س)/(ك س) ، س ≠ ٠ ؛ جا س ، س = ٠ } عند س = ٠ «ح − {٠}»

---

٣ أعد تعريف كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية عند النقط المبينة بحيث تصبح متصلة عند هذه النقط (إن أمكن) :

① د(س) = (س² − س − ٦)/(س − ٣) عند س = ٣

② د(س) = (س³ − ١)/(س² − ٣س + ٢) عند س = ١



③ 📖 $د(س) = \begin{cases} س^{٣} + ٢س & ،\ س > ١ \\ ٥س - ١ & ،\ س < ١ \end{cases}$ عند $س = ١$

④ 📖 $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ،\ س \geq ٢ \\ \dfrac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} & ،\ س < ٢ \end{cases}$ عند $س = ٢$

⑤ 📖 $د(س) = \begin{cases} \dfrac{٣س + ١ - جتا\,س}{٥س} & ،\ س > ٠ \\ \dfrac{٣}{٥}\ جتا\,س & ،\ س < ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

⑥ $د(س) = \dfrac{|س - ٣|}{س - ٣}$ عند $س = ٣$

⑦ $د(س) = \dfrac{س^{٢} - ٦٤}{\sqrt[3]{س} - ٢}$ عند $س = ٨$

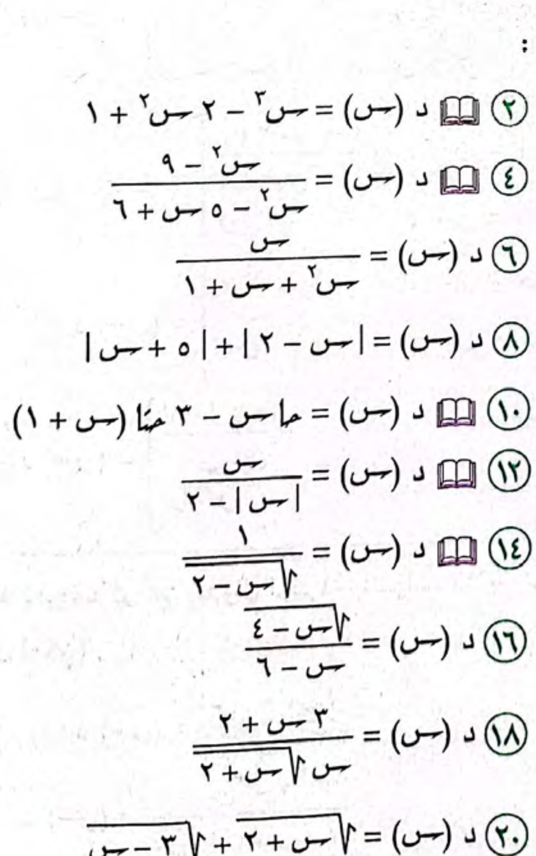
⑧ $د(س) = \dfrac{|س| + س}{س}$ عند $س = ٠$

⑨ $د(س) = \dfrac{٢}{س - ٥} - \dfrac{١٢}{س^{٢} - ٤س - ٥}$ عند $س = ٥$

⑩ $د(س) = \dfrac{جا\,س}{|س|}$ عند $س = ٠$

تمارين على الاتصال على فترة

4 ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية :



① 📖 $د(س) = ٧$

② 📖 $د(س) = س^{٣} - ٢س^{٢} + ١$

③ $د(س) = \dfrac{٣س - ٥}{س - ٣}$

④ 📖 $د(س) = \dfrac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

⑤ $د(س) = \dfrac{س - ١}{س^{٤} - ١٣س^{٢} + ٣٦}$

⑥ $د(س) = \dfrac{س}{س^{٢} + س + ١}$

⑦ $د(س) = \dfrac{٤س - ١}{س^{٣} - س}$

⑧ $د(س) = |س - ٢| + |٥ + س|$

⑨ 📖 $د(س) = س^{٣}\ جا\,٢س$

⑩ 📖 $د(س) = جا\,س - ٣\ جتا\,(س + ١)$

⑪ $د(س) = (٣س + ٤)^{٢} + جا\,٢س$

⑫ 📖 $د(س) = \dfrac{س}{|س| - ٢}$

⑬ $د(س) = \dfrac{٣س - ١}{|س| + ١}$

⑭ 📖 $د(س) = \dfrac{١}{\sqrt{س - ٢}}$

⑮ $د(س) = \dfrac{س^{٢} + جا\,٣س}{س + ١}$

⑯ $د(س) = \dfrac{\sqrt{س - ٤}}{س - ٦}$

⑰ $د(س) = \dfrac{\sqrt{س - ٣}}{س^{٢} - ٤}$

⑱ $د(س) = \dfrac{٣س + ٢}{س\sqrt{س + ٢}}$

⑲ $د(س) = \dfrac{س + ١}{\sqrt{س + ٢} - ١}$

⑳ $د(س) = \sqrt{س + ٢} + \sqrt{٣ - س}$



(٢١) د (س) = $\frac{١}{\sqrt{٢٥ - س^٢}}$

(٢٢) د (س) = $\sqrt{٥ - |س|}$

(٢٣) 📖 د (س) = $\frac{س^٣ + ١}{جا س}$

(٢٤) د (س) = $\frac{س + ٣}{جتا س}$

(٢٥) د (س) = $\frac{جا ٣س + جتا ٥س}{١ - جتا س}$

(٢٦) د (س) = $\frac{٢ + س}{١ + جا س}$

(٢٧) 📖 د (س) = $\frac{جا^٢ س + جتا س}{س^٢ - ٩}$

(٢٨) 📖 د (س) = $ظا^٢ س - ١$

(٢٩) 📖 د (س) = $\frac{ظا س}{س^٢ - ٩}$

٥ ابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية على مجالها :

(١) د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ & ، س \leq ١ \\ ٢س & ، س > ١ \end{cases}$

(٢) د (س) = $\begin{cases} س^٢ & ، س < ٣ \\ ٥س - ٤ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

(٣) د (س) = $\begin{cases} س^٢ - ٣س + ٢ & ، س \leq ٣ \\ ٢ & ، ٣ < س \leq ٤ \\ ٦ - س^٢ & ، س > ٤ \end{cases}$

(٤) 📖 د (س) = $\begin{cases} ١ + جا س & \text{حيث } ٠ \leq س \leq \frac{\pi}{٢} \\ ١ - جتا ٢س & \text{حيث } س > \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

(٥) د (س) = $\begin{cases} جا س & ، -\frac{\pi}{٤} \leq س < \frac{٣\pi}{٤} \\ جتا س & ، \frac{٣\pi}{٤} \leq س \leq ٢\pi \end{cases}$

(٦) 📖 د (س) = $\begin{cases} \frac{س ظا س + جا^٢ ٣س}{٥س^٢} & ، -\frac{\pi}{٤} < س < ٠ \\ ٢ جتا ٢س & ، ٠ \leq س < \frac{\pi}{٤} \end{cases}$

(٧) 📖 د (س) = $\begin{cases} \frac{(س + ٣)^٤ - ٨١}{س} & \text{عندما } س \neq ٠ \\ ١٠٨ & \text{عندما } س = ٠ \end{cases}$

(٨) د (س) = $\begin{cases} ٥ - س|س| & ، س \leq ٠ \\ \frac{|س|}{س} + ٤ & ، س > ٠ \end{cases}$



٦ إذا كانت الدالة د : $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س + جا ٢س}{جا \frac{1}{2} س} & ، -\pi \le س < ٠ \\ س + ك & ، ٠ \le س \le \pi \end{cases}$ متصلة فى الفترة [− π

فأوجد قيمة : ك

---

٧ 📖 إذا كانت الدالة د : $د(س) = \begin{cases} ٤س & ، س \le -١ \\ أس + ب & ، -١ < س < ٣ \\ -٢س & ، س \ge ٣ \end{cases}$ متصلة على ح

فما قيمة كل من : أ ، ب ؟ «$-\frac{1}{2}$ ، $-\frac{9}{2}$»

---

٨ إذا كانت د : $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{س - أ} - ١}{\sqrt{س} - ٣} & ، س \ne ٩ \\ س - ب & ، س = ٩ \end{cases}$ متصلة على ح

فما قيمة كل من : أ ، ب الحقيقية ؟ «٨ ، ٦»

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير



١ ابحث اتصال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين على مجالها :

① $د(س) = \begin{cases} |س - ١| + ٢س & ، س \le ٢ \\ ٤س - س^٢ & ، س > ٢ \end{cases}$

② $د(س) = \begin{cases} \sqrt{٤ - س^٢} & ، |س| \le ٢ \\ س^٢ + ٢س & ، |س| > ٢ \end{cases}$

---

٢ 📖 أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د : $د(س) = \dfrac{س + ٣}{س^٢ + أس + ٩}$ متصلة على ح «]−٦ ، ٦[»

---

٣ أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د : $د(س) = \dfrac{٢س + ١}{س^٢ + ٦س + أ}$ متصلة على ح «]٩ ، ∞[»

---

٤ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} -س & ، س < ٠ \\ ١ & ، س \ge ٠ \end{cases}$ ، $ر(س) = \begin{cases} ١ & ، س < ٠ \\ س & ، س \ge ٠ \end{cases}$

أثبت أن : د ، ر غير متصلة عند س = ٠ بينما الضرب (د . ر) متصلة عند س = صفر

---

٥ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} -١ & ، س \ne ٤ \\ ١ & ، س = ٤ \end{cases}$ ، $ر(س) = \begin{cases} ٤س - ١٠ & ، س \ne ٤ \\ -٦ & ، س = ٤ \end{cases}$

فابحث اتصال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية عند س = ٤

① د(س)
② ر(س)
③ د(س) . ر(س)
④ |د(س)|
⑤ ر(س) − ٦ د(س)
⑥ ر(د(س))



الوحدة الرابعة

حساب المثلثات

مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها.

الدرس 1 قانون الجيب «قاعدة الجيب».

الدرس 2 قانون جيب التمام «قاعدة جيب التمام».

الدرس 3 حل المثلث.

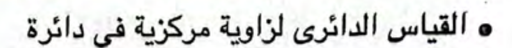
فى نهاية الوحـــدة : تطبيقات حياتية على الوحدة الرابعة.





مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها





القياس الدائرى والقياس الستينى لزاوية

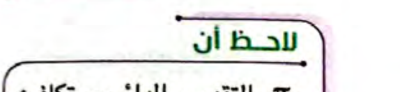
- القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة

$$= \frac{\text{طول القوس الذى تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$$

ل

$\theta^{د}$ | نق

أى أن $\boxed{\theta^{د} = \frac{ل}{نق}}$ ومنها $\boxed{ل = \theta^{د}\ نق}$ ، $\boxed{نق = \frac{ل}{\theta^{د}}}$



لاحظ أن

π بالتقدير الدائرى تكافئ 180° بالتقدير الستينى.

- **التحويل بين القياس الدائرى والقياس الستينى :**

$\boxed{\frac{س^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta^{د}}{\pi}}$ ومنها $\boxed{\theta^{د} = س^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}}$ ، $\boxed{س^\circ = \theta^{د} \times \frac{180^\circ}{\pi}}$

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية

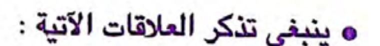
ص

جميع النسب موجبة | حا ، قا موجبتان

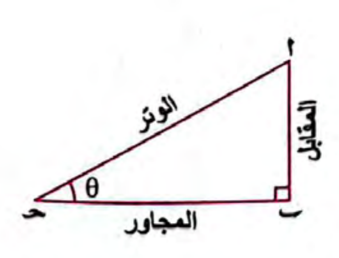
طا ، ظتا موجبتان | حتا ، قتا موجبتان

س ، س َ ، ص َ

1. $حتا^2\ \theta + حا^2\ \theta = 1$
2. $1 + طا^2\ \theta = قا^2\ \theta$
3. $1 + ظتا^2\ \theta = قتا^2\ \theta$
4. $حا\ \theta\ قتا\ \theta = 1$ ، $حتا\ \theta\ قا\ \theta = 1$ ، $طا\ \theta\ ظتا\ \theta = 1$
5. $طا\ \theta = \frac{حا\ \theta}{حتا\ \theta}$ ، $ظتا\ \theta = \frac{حتا\ \theta}{حا\ \theta}$



- **ينبغى تذكر العلاقات الآتية :**



1. $حا\ \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{أب}{أحـ}$
2. $حتا\ \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{بحـ}{أحـ}$
3. $طا\ \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{أب}{بحـ}$
4. إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها θ فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (س ، ص)

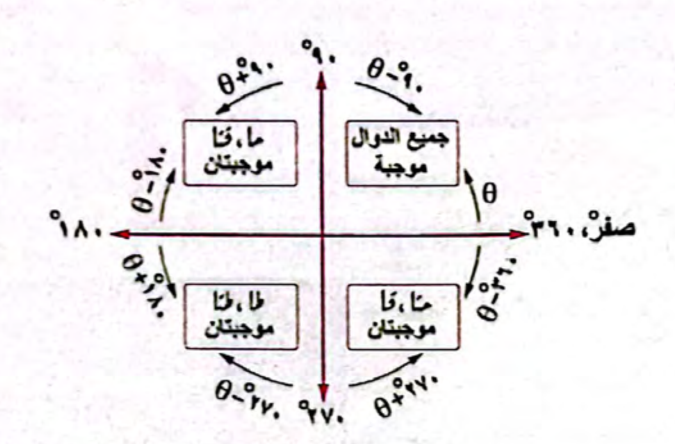
فإن : $س = حتا\ \theta$ ، $ص = حا\ \theta$ ، $س^2 + ص^2 = 1$



٥ العلاقات بين الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة

هى متطابقات ويمكن أن نتذكرها

من الشكل المقابل



فمثلًا :

جا (٩٠° + θ) = جتا θ

، ظا (٣٦٠° − θ) = − ظا θ

، ..... كل منهما متطابقة مثلثية.

مساحات بعض الأشكال الهندسية

* مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أَ بَ جا حـ = $\frac{1}{2}$ بَ حَ جا أ = $\frac{1}{2}$ أَ حَ جا ب

* مساحة المثلث أ ب حـ = $\sqrt{ع (ع - أ)(ع - ب)(ع - حـ)}$ حيث ع = $\frac{أَ + بَ + حَ}{2}$

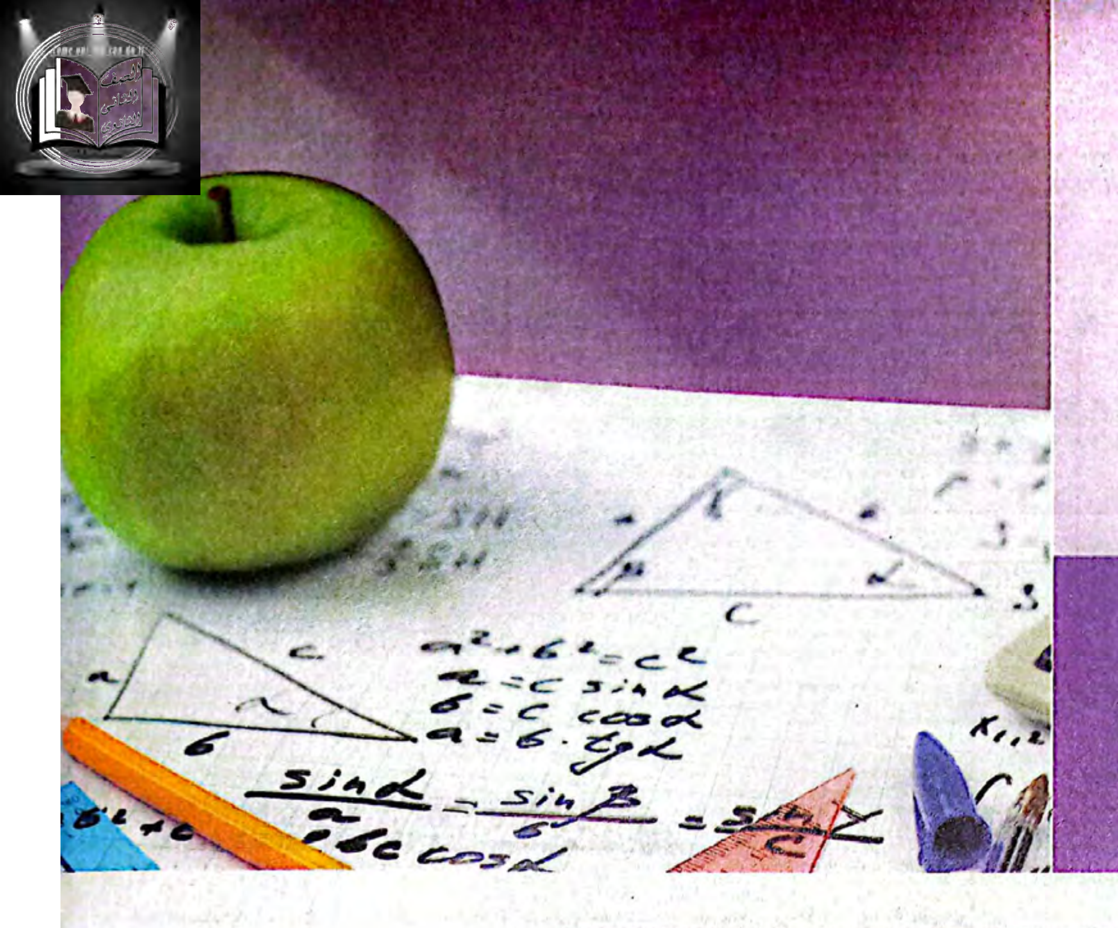
* مساحة الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

* مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س سم = $\frac{ن}{4}$ س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$

* مساحة الدائرة = π نق^2 ، محيط الدائرة = ٢ π نق

* مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ θ^{ء} نق^2 ، محيط القطاع = ٢ نق + ل

* مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^2 (θ^{ء} − جا θ)



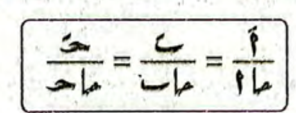
الدرس

1

قانون الجيب
(قاعدة الجيب)

«فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها».

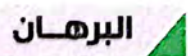
أى أنه فى أى مثلث أ ب حـ يكون :



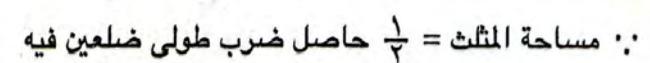
$$\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$$

حيث إن الرموز أ ، ب ، حـ تعبر عن قياسات زوايا Δ أ ب حـ

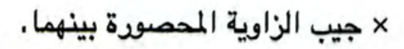
كما أن الرموز أ ، ب ، حـ تعبر عن أطوال الأضلاع $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ على الترتيب.



البرهـــان



∵ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين فيه



× جيب الزاوية المحصورة بينهما.

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أ حـ جا ب (١)

= $\frac{1}{2}$ حـ ب جا أ (٢)

= $\frac{1}{2}$ أ ب جا حـ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ حـ ب جا أ = أ حـ جا ب = أ ب جا حـ

وبالقسمة على أ ب حـ : ∴ $\frac{\text{جا أ}}{\text{أ}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{جا حـ}}{\text{حـ}}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ (وهو المطلوب)



برهان آخر

أولاً : إذا كان Δ ا ب ج حاد الزوايا :

نرسم $\overline{\text{اء}} \perp \overline{\text{بج}}$ ، $\overline{\text{به}} \perp \overline{\text{اج}}$

في Δ اءب : $\frac{\text{اء}}{\text{اب}}$ = جا ب ∴ اء = اب جا ب = جَ جا ب

، في Δ اءج : $\frac{\text{اء}}{\text{اج}}$ = جا ج ∴ اء = اج جا ج = بَ جا ج

∴ جَ جا ب = بَ جا ج ∴ $\boxed{\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا ج}}}$ (١)

، وبالمثل في Δ به ا : $\frac{\text{به}}{\text{اب}}$ = جا ا ∴ به = اب جا ا = جَ جا ا

، في Δ به ج : $\frac{\text{به}}{\text{بج}}$ = جا ج ∴ به = بج جا ج = أَ جا ج

∴ جَ جا ا = أَ جا ج ∴ $\boxed{\frac{\text{أَ}}{\text{جا ا}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا ج}}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا ج}}$ (وهو المطلوب)

ثانيًا : إذا كان Δ ا ب ج منفرج الزاوية في ب :

نرسم $\overline{\text{اء}} \perp \overleftrightarrow{\text{جب}}$ ، $\overline{\text{جه}} \perp \overleftrightarrow{\text{اب}}$

في Δ اءب : $\frac{\text{اء}}{\text{اب}}$ = جا (∠ ا ب ء)

∴ اء = اب جا (١٨٠° − ب) = جَ جا ب

، في Δ اءج : $\frac{\text{اء}}{\text{اج}}$ = جا ج ∴ اء = اج جا ج = بَ جا ج

∴ جَ جا ب = بَ جا ج ∴ $\boxed{\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا ج}}}$ (١)

، في Δ جهب : $\frac{\text{جه}}{\text{بج}}$ = جا (∠ ج ب ه)

∴ جه = بج جا (١٨٠° − ب) = أَ جا ب

، في Δ جه ا : $\frac{\text{جه}}{\text{اج}}$ = جا ا ∴ جه = بَ جا ا

∴ أَ جا ب = بَ جا ا ∴ $\boxed{\frac{\text{أَ}}{\text{جا ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا ج}}$ (وهو المطلوب)

* لاحظ أن قانون الجيب صحيح أيضًا في حالة المثلث القائم الزاوية.



مثال ١

فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ = ١٠ سم ، ق(∠أ) = ٣٠° ، ق(∠ب) = ٤٥°

فأوجد مستخدمًا حاسبة الجيب كلاً من : بَ ، حـَ لرقم عشرى واحد وكذلك مساحة Δ أ ب حـ لأقرب عدد صحيح.

الحـل

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٥°) = ١٠٥°

∴ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ}$ ∴ $\frac{١٠}{جا ٣٠°} = \frac{ب}{جا ٤٥°} = \frac{حـ}{جا ١٠٥°}$

∴ بَ = $\frac{١٠ جا ٤٥°}{جا ٣٠°}$ ≈ ١٤,١ سم ، حـَ = $\frac{١٠ جا ١٠٥°}{جا ٣٠°}$ ≈ ١٩,٣ سم

، مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ بَ حـَ جا أ = $\frac{١}{٢}$ × ١٤,١ × ١٩,٣ جا ٣٠° ≈ ٦٨ سم^٢

مثال ٢

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ١٢٣,٤ سم ، القطران $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب ء}$

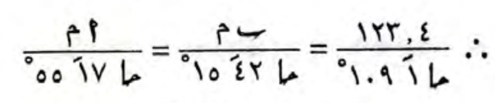
يصنعان مع الضلع $\overline{أ ب}$ زاويتين قياساهما ٤٢َ ١٥° ، ١٧َ ٥٥° على الترتيب **أوجد :**

[١] طول كل من القطرين $\overline{ب ء}$ ، $\overline{أ حـ}$ [٢] مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

الحـل

نفرض أن : $\overline{أ حـ}$ ∩ $\overline{ب ء}$ = {م}

∴ فى Δ م أ ب : ق(∠أ م ب) = ١٨٠° − (٤٢َ ١٥° + ١٧َ ٥٥°) = ١َ ١٠٩°



∴ $\frac{١٢٣,٤}{جا ١َ ١٠٩°} = \frac{ب م}{جا ٤٢َ ١٥°} = \frac{أ م}{جا ١٧َ ٥٥°}$

∴ ب م = $\frac{١٢٣,٤ جا ٤٢َ ١٥°}{جا ١َ ١٠٩°}$ ≈ ٣٥,٣ سم ∴ ب ء = ٢ ب م = ٧٠,٦ سم

، أ م = $\frac{١٢٣,٤ جا ١٧َ ٥٥°}{جا ١َ ١٠٩°}$ ≈ ١٠٧,٣ سم ∴ أ حـ = ٢ أ م = ٢١٤,٦ سم

، مساحة ▱ أ ب حـ ء = ٤ مساحة Δ م أ ب = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ب م × أ م × جا (∠أ م ب)

= ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ٣٥,٣ × ١٠٧,٣ جا ١َ ١٠٩° ≈ ٧١٦٢ سم^٢

مثال ٣

أ ب حـ مثلث فيه : ٣ جا أ = ٤ جا ب = ٢ جا حـ أوجد أطوال أضلاعه إذا علم أن محيطه = ٣٩ سم

الحـل

∵ ٣ جا أ = ٤ جا ب = ٢ جا حـ وبالقسمة على ١٢ ∴ $\frac{جا أ}{٤} = \frac{جا ب}{٣} = \frac{جا حـ}{٦}$

∴ $\frac{٤}{جا أ} = \frac{٣}{جا ب} = \frac{٦}{جا حـ}$ ∴ أ : بَ : حـَ = ٤ : ٣ : ٦

بفرض أن : أ = ٤ ك ، بَ = ٣ ك ، حـَ = ٦ ك



، ∵ محيط المثلث = ٣٩ سم ∴ ٤ ك + ٣ ك + ٦ ك = ٣٩

∴ ١٣ ك = ٣٩ ∴ ك = ٣

∴ أ = ١٢ سم ، ب = ٩ سم ، حـ = ١٨ سم

مثال ٤

إذا كان محيط Δ أ ب حـ يساوى ٢٤ سم ، ق (∠ ب) = ٣٠° ، ق (∠ حـ) = ٤٨° أوجد : ب

الحل

∵ ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٨°) = ١٠٢°

∴ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ}$ ∴ $\frac{أ}{جا ١٠٢°} = \frac{ب}{جا ٣٠°} = \frac{حـ}{جا ٤٨°}$

∵ $\frac{مجموع المقدمات}{مجموع التوالى}$ = إحدى النسب ∴ $\frac{أ + ب + حـ}{جا ١٠٢° + جا ٣٠° + جا ٤٨°} = \frac{ب}{جا ٣٠°}$

∴ $\frac{٢٤}{جا ١٠٢° + جا ٣٠° + جا ٤٨°} = \frac{ب}{جا ٣٠°}$ ∴ ب = $\frac{٢٤ جا ٣٠°}{جا ١٠٢° + جا ٣٠° + جا ٤٨°}$ ≈ ٤,٥ سم

تمرين مشهور

فى أى مثلث أ ب حـ يكون : $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ}$ = ٢ نق

حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ

البرهان

نرسم الدائرة التى تمر برؤوس Δ أ ب حـ

ثم نرسم القطر $\overline{ب ء}$ والوتر $\overline{حـ ء}$



١ إذا كان Δ أ ب حـ حاد الزوايا :

فيكون ق (∠ ب حـ ء) = ٩٠° (محيطية مرسومة فى نصف دائرة)

، ق (∠ أ) = ق (∠ ء) (محيطيتان تحصران $\frown{ب حـ}$)

، فى Δ ء ب حـ : جا ء = $\frac{أ}{ب ء} = \frac{أ}{٢ نق}$

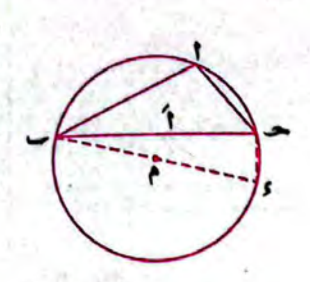
∴ جا أ = $\frac{أ}{٢ نق}$

∴ $\frac{أ}{جا أ}$ = ٢ نق وبطريقة مماثلة يمكن إثبات أن : $\frac{ب}{جا ب}$ = ٢ نق ، $\frac{حـ}{جا حـ}$ = ٢ نق

∴ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ}$ = ٢ نق (وهو المطلوب)



٢ إذا كان Δ أ ب حـ منفرج الزاوية :



فيكون : ق (∠ ب ء حـ) = ١٨٠° − ق (∠ أ)

∴ جا (١٨٠° − أ) = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ب ء}}$ ∴ جا أ = $\frac{\text{أ}}{\text{٢ نق}}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق (وهو المطلوب)

مثال ٥

فى Δ أ ب حـ إذا كان : ب = ٧ سم ، ق (∠ ب) = ٣٠° ، حـ = ٩ سم

احسب طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ واحسب أيضًا ق (∠ أ) لأقرب درجة.

الحـــل

∵ $\frac{\text{ب}}{\text{جا ب}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{٧}{\text{جا ٣٠°}}$ = ٢ نق

∴ نق = $\frac{٧}{\text{٢ جا ٣٠°}}$ = ٧ سم

، ∵ $\frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{٩}{\text{جا حـ}}$ = ١٤

∴ جا حـ = $\frac{٩}{١٤}$

∴ ق (∠ حـ) ≈ ٤٠° ∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٠°) = ١١٠°

أ، ق (∠ حـ) ≈ ١٤٠° ∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ١٤٠°) = ١٠°

لاحـظ أنه

يوجد مثلثان يحققان هذه المعطيات وهذه الحالة تعرف بالحالة المبهمة وسوف ندرسها بالتفصيل فى درس حل المثلث.

مثال ٦

فى أى مثلث أ ب حـ

أثبت أن : مساحة Δ أ ب حـ = ٢ نق^{٢} جا أ جا ب جا حـ

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ

الحـــل

∵ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ جا أ حيث ب = ٢ نق جا ب ، حـ = ٢ نق جا حـ

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ نق جا ب × ٢ نق جا حـ × جا أ

= ٢ نق^{٢} جا أ جا ب جا حـ



تمارين 19 على قانون الجيب (قاعدة الجيب)




اختبر نفسك

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى   • فهم   • تطبيق   • مستويات عليا

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى أى مثلث س ص ع يكون : س ص : ص ع = ...

(أ) جا س : جا ص   (ب) جا ص : جا ع

(جـ) جا ع : جا س   (د) جا ع : جا ص

② فى Δ أ ب جـ إذا كان : ق(∠أ) = 30° ، جـ = $15\sqrt{3}$ سم ، ق(∠جـ) = 60°

فإن : أ = ... سم

(أ) ٣٠   (ب) ٤٥   (جـ) ١٥   (د) ٦٠

③ فى المثلث ء هـ و الذى فيه : ق(∠ء) = 80° ، ق(∠هـ) = 60° إذا كان : و = ١٢ سم

فإن : ء = ... سم

(أ) $\frac{12 \text{ جا } 80^\circ}{\text{جا } 40^\circ}$ (ب) $\frac{12 \text{ جا } 80^\circ}{\text{جا } 60^\circ}$ (جـ) $\frac{12 \text{ جا } 40^\circ}{\text{جا } 80^\circ}$ (د) $\frac{12 \text{ جتا } 80^\circ}{\text{جتا } 40^\circ}$

④ فى Δ أ ب جـ : إذا كان : أ = ٤ سم ، ب = ٧ سم ، ق(∠جـ) = 120°

فإن مساحة المثلث = ... سم^2

(أ) $7\sqrt{3}$ (ب) $14\sqrt{3}$ (جـ) ٧   (د) ١٤

⑤ 📖 س ص ع مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه $10\sqrt{3}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى .... سم

(أ) ٥   (ب) ١٠   (جـ) ١٥   (د) ٢٠

⑥ Δ س ص ع فيه : $\frac{\text{س}}{\text{جا س}} = 6$ فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... وحدة طول.

(أ) ٦   (ب) ١٢   (جـ) ٣   (د) ٩

⑦ فى الشكل المقابل :

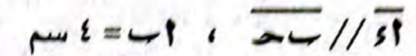
طول $\overline{\text{أ ب}}$ ≃ .... سم

أ ، ب ، جـ ، 35° ، 40° ، ١٢سم

(أ) ٦   (ب) ٧   (جـ) ٨   (د) ٩



(٨) فى الشكل المقابل :

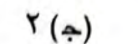


أ د // ب حـ ، أ ب = ٤ سم

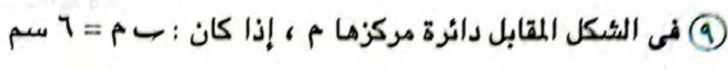
، ق(∠ د أ حـ) = ٤٠° ، ق(∠ ب) = ٦٠°

فإن : طول أ حـ ≈ .... سم





(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٤

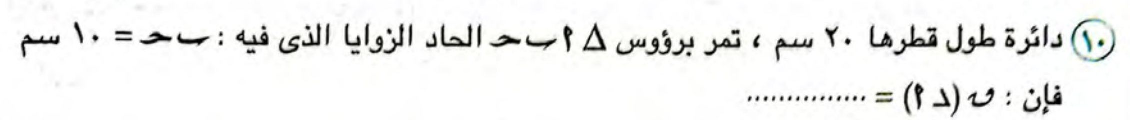


(٩) فى الشكل المقابل دائرة مركزها م ، إذا كان : ب م = ٦ سم

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٦ جا ٥٠° (ب) ١٢ جا ٥٠°

(جـ) ٦ جتا ٥٠° (د) ١٢ جتا ٥٠°



(١٠) دائرة طول قطرها ٢٠ سم ، تمر برؤوس △ أ ب حـ الحاد الزوايا الذى فيه : ب حـ = ١٠ سم

فإن : ق(∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٥٠°

(١١) أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠ أ) = ٤٥° وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٦ سم

فإن : أ = ... سم

(أ) ١٣ (ب) ٦ $\sqrt{2}$ (جـ) ١٢ (د) $\sqrt{2}$

(١٢) إذا كان طول ضلع ما فى أى مثلث = ١٢ سم ، وقياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع = ٥٥°

فإن محيط الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث ≈ .... سم

(أ) ٣٦ (ب) ٤٢ (جـ) ٤٦ (د) ٥٢

(١٣) إذا كان محيط المثلث أ ب حـ يساوى ١٥ سم ، ق(∠ أ) = ٥٣° ، ق(∠ ب) = ٤٧°

فإن : طول أ ب ≈ .... سم

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٥ (د) ٨

(١٤) أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٢٧ سم ، ق(∠ ب) = ٨٢° ، ق(∠ حـ) = ٥٦°

فإن مساحة سطحه ≈ .... سم^2

(أ) ٥٤٠ (ب) ٤٤٧ (جـ) ٣٥٠ (د) ٤٠٠

(١٥) مثلث أ ب حـ فيه ق(∠ أ) : ق(∠ ب) : ق(∠ حـ) = ٢ : ٣ : ٤ ، أ ب = ١٢ سم

فإن : طول أ حـ ≈ .... سم

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٦ (د) ١٨



(١٦) فى المثلث أ ب جـ أى من العبارات التالية صحيحة ؟

(أ) $جا^2 أ + جتا^2 ب = أ + ب$

(ب) أ جا ب = ب جا أ

(جـ) أ = ب جا جـ

(د) $\frac{أ}{جا أ} = \frac{جا ب}{ب}$

(١٧) فى Δ س ص ع يكون المقدار : ٢ نق جا س = ... «حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة له»

(أ) ع

(ب) ص

(جـ) س

(د) مساحة Δ س ص ع

(١٨) إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع فإن : $\frac{ص}{٢ جا ص}$ = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\frac{١}{٢}$ نق (د) ٤ نق

(١٩) إذا كان المثلث أ ب جـ حاد الزوايا وكان ٢ أ = $\frac{ب}{جا ب}$ فإن : ق(∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٧٥°

(٢٠) إذا كان : أ ب جـ مثلث فيه : جا أ = ٢ جا جـ ، ب جـ = ٦ سم فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

(٢١) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ يساوى ٣ سم

وكان : جا أ + جا ب + جا جـ = ٢ فإن محيط المثلث أ ب جـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٢٢) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٦ سم وكانت مساحة الدائرة المارة برؤوسه تساوى ك π سم^2

فإن : ك = ...

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ٨ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٢٣) فى أى مثلث أ ب جـ يكون $\frac{جا (أ + ب)}{جا أ + جا ب}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{جـ}{أ + ب}$ (جـ) $\frac{أ}{ب + جـ}$ (د) $\frac{ب}{أ + جـ}$

(٢٤) فى Δ أ ب جـ يكون : $\frac{أ}{أ + ب} = \frac{جا أ}{........}$

(أ) جا ب (ب) جا جـ (جـ) جا أ + جا ب (د) جا أ + جا جـ

(٢٥) فى Δ س ص ع : إذا كان ٣ جا س = ٤ جا ص = ٢ جا ع فإن س : ص : ع = ...

(أ) ٢ : ٣ : ٤ (ب) ٦ : ٤ : ٣ (جـ) ٣ : ٤ : ٦ (د) ٤ : ٣ : ٦

(٢٦) أ ب جـ مثلث فيه : $\frac{جا أ}{٣} = \frac{٢ جا ب}{٥} = \frac{جا جـ}{٤}$ فإن : أ : ب : جـ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٧ : ٢ : ٤ (د) ٣ : ٥ : ٤

(٢٧) فى Δ أ ب ح إذا كان : $\frac{\text{جا أ}}{٤} = \frac{\text{جا ب}}{٩} = \frac{\text{جا ح}}{٧}$ فإن أكبر زاوية قياسًا تكون ....

(أ) ∠أ   (ب) ∠ب   (ج) ∠ح   (د) قائمة.

(٢٨) إذا كان أ ب ح مثلث فيه ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠ح) = ٣ : ٥ : ٤

فإن : حَ^{2} : أَ^{2} = ...

(أ) $\sqrt{٦}$: ٢   (ب) ٢ : ٣   (ج) ٤ : ٣   (د) ٣ : ٢

(٢٩) فى أى مثلث أ ب ح يكون : $\frac{\text{أَ}}{\text{بَ}} \times \frac{\text{جا ب}}{\text{جا أ}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{حَ}}{\text{جا ح}}$ (ب) $\frac{\text{جا ح}}{\text{حَ}}$ (ج) ٤ نق^2 (د) ١

(٣٠) فى Δ أ ب ح إذا كان نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث = ٤ سم

فإن : $\frac{\text{أَ + بَ + حَ}}{\text{جا أ + جا ب + جا ح}}$ = ...

(أ) ٤   (ب) ٢   (ج) ٨   (د) ١٦

(٣١) إذا كان أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى ب وكان : بَ = ١٠ سم   فإن : $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} + \frac{\text{حَ}}{\text{جا ح}}$ = ... سم

(أ) ١٠   (ب) ٢٠   (ج) ٤٠   (د) ١٠٠

(٣٢) إذا كان نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ح يساوى نق

فإن محيط المثلث = ... (جا أ + جا ب + جا ح)

(أ) نق   (ب) ٢ نق   (ج) ٤ نق^2 (د) ٨ نق^3

(٣٣) إذا كان أ ب ح مثلث فيه : أَ − بَ = ٤ سم ، جا أ = $\frac{٣}{٢}$ جا ب   فإن : أَ = ... سم

(أ) ٤   (ب) ٦   (ج) ٨   (د) ١٢

(٣٤) إذا كان أ ب ح مثلث محيطه ٢٤ سم وكان : جا أ + جا ب = ٣ جا ح   فإن : حَ = ... سم

(أ) ٤   (ب) ٦   (ج) ٨   (د) ٩

(٣٥) أ ب ح مثلث فيه جا ب + جا ح = ٤ جا أ وكان بَ + حَ = ٢ أَ + ١٠ سم

فإن : أَ = ... سم

(أ) ٢   (ب) ٣   (ج) ٤   (د) ٥

(٣٦) أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، ب ح = ١٢ سم ، ق(∠أ) − ق(∠ح) = ٩٠°

فإن : ظا ح = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (ج) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٣٧) إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب ح وكان أَ = نق

فإن : ق(∠أ) = ...

(أ) ٣٠° فقط.   (ب) ٣٠°، ١٢٠°   (ج) ١٥٠° فقط.   (د) ٣٠°، ١٥٠°




(٣٨) إذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ هى Δ ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

فإن : $\frac{٤ \text{ نق } \Delta}{أ ب حـ}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

(٣٩) 📖 فى Δ أ ب حـ يكون $\frac{٢ ب}{جا ب}$ = ... نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

(٤٠) أ ب حـ مثلث فيه ب = ١٢ سم ، نق هو طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث

فإن مساحة المثلث = ... سم^٢

(أ) $\frac{٢ أ حـ}{نق}$ (ب) $\frac{٣ أ حـ}{نق}$ (جـ) $\frac{٤ أ حـ}{نق}$ (د) $\frac{٦ أ حـ}{نق}$

(٤١) إذا كان المثلث أ ب حـ قائم الزاوية ومتساوى الساقين ، نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

فإن مساحة Δ أ ب حـ = ... (بدلالة نق)

(أ) $\frac{١}{٢}$ نق^٢ (ب) ٢ نق^٢ (جـ) نق^٢ (د) ٤ نق^٢

(٤٢) فى الشكل المقابل :

إذا كان محيط Δ أ ب حـ = ٢٠ سم

فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه ≃ .... سم

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٤٣) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : جا (ب + حـ) = $\frac{٣}{٥}$ ، ب حـ = ٨ سم

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٤٤) مثلث مساحته = $\frac{أ^٢ \text{ جا ب جا حـ}}{ك \text{ جا أ}}$ فإن : ك = ... ، ك ≠ ٠

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤٥) إذا كان نق نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب حـ وكان : أ = $\frac{١}{٢}$ نق

فإن : ق (∠ أ) = ... حيث أ زاوية حادة.

(أ) جا$^{-١}$ (١) (ب) جا$^{-١}$ (٢) (جـ) جا$^{-١}$ $(\frac{١}{٢})$ (د) جا$^{-١}$ $(\frac{١}{٤})$

(٤٦) إذا كانت Δ هى مساحة المثلث س ص ع ، ح هى نصف محيط المثلث س ص ع

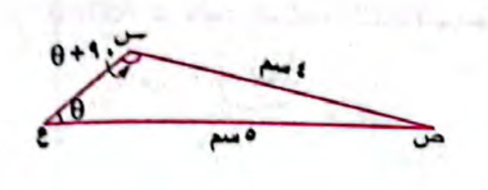
فإن : $\frac{٢}{ع \text{ جا س}} + \frac{٢}{س \text{ جا ص}} + \frac{٢}{ص \text{ جا ع}}$ = ...

(أ) $\frac{ح}{\Delta}$ (ب) $\frac{٢ ح}{\Delta}$ (جـ) $\frac{٣ ح}{\Delta}$ (د) $\frac{٤ ح}{\Delta}$





(٤٧) في الشكل المقابل :



طا θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$

(جـ) $\frac{٥}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

(١) س ص ع مثلث فيه : ق(∠س) = ٨٠° ، ق(∠ص) = ٦٠° ، عَ = ١٠ سم
أوجد كلًا من سَ ، صَ لأقرب سم «١٥ سم ، ١٣ سم»

(٢) أ ب حـ مثلث فيه : حَ = ١٩ سم ، ق(∠أ) = ١١٢° ، ق(∠ب) = ٣٣° أوجد بَ ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب حـ لأقرب رقمين عشريين. «١٨,٠٤ سم ، ١٦,٥٦سم»

(٣) ل م ن مثلث فيه : مَ = ٦٨,٤ سم ، ق(∠م) = ١٠٠° ، ق(∠ن) = ٤٠°
أوجد : (١) لَ (٢) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن
(٣) مساحة المثلث ل م ن لأقرب سم² «٤٤,٦٤ سم ، ٣٤,٧٣ سم ، ٩٨١ سم²»

(٤) ل م ن مثلث فيه : ق(∠ل) = ١٨° ٥٢َ ، ق(∠ن) = ١٧° ٤٤َ ، ن ل = ٣٥ سم
أوجد : (١) طول كل من : م ن ، ل م
(٢) مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن «١٢,٧ سم ، ٢٧,٤ سم ، ١٢٠٨,٧ سم²»

(٥) أ ب حـ مثلث فيه : بَ = ١٠ سم ، ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(∠حـ) = ٨٠°
أوجد طول أكبر الأضلاع طولاً. «١١ سم»

(٦) أ ب حـ مثلث فيه : حَ = ٤,٥ سم ، ق(∠أ) = ١٠٠° ، ق(∠ب) = ١٥°
أوجد طول أصغر الأضلاع طولاً. «١,٣ سم»

(٧) أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠أ) = ٦٠° ، أَ = ٧ $\sqrt{٣}$ سم أوجد مساحة ومحيط الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$) «١٥٤ سم² ، ٤٤ سم»

(٨) أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠ب) = ٤٥°
أثبت أن : أَ : بَ : حَ = $\sqrt{٦}$: ٢ : $\sqrt{٣}$ + ١

(٩) أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ١٣ سم ، ق(∠أ) = ٥٣° ٨َ ، حَ = ١٥ سم
احسب طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ ، احسب ق(∠حـ)
«٨,١٠ سم ، ٦٧° ٢٣َ ٩ً أو ١١٢° ٣٦َ ٥١ً»



١٠ أ ب ح مثلث فيه : ق(∠أ) = ٣٥° ، أ = ٨ سم ، ب = ٦ سم أوجد : ق(∠ب) «٢٥ ٢٨ ٤٥°»

١١ أوجد محيط المثلث أ ب ح الذى فيه : ح = ٨,٧ سم ، ق(∠أ) = ١٣ ٥٧°
، ق(∠ب) = ١٨ ٦٤° «٢٦,٥ سم»

١٢ أ ب ح مثلث فيه : ق(∠ب) = ٤٥° ، ق(∠ح) = ٦٠° ، وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٤٠ سم
احسب مساحة ومحيط هذا المثلث لأقرب عدد صحيح. «٤٧٣ سم^2 ، ١٠٢ سم»

١٣ أ ب ح مثلث متساوى الساقين فيه : ق(∠أ) = ١٢٠° ، وطول نصف قطر الدائرة المارة
برؤوسه يساوى ١٢ سم أوجد ح ثم احسب مساحة Δ أ ب ح «١٢ سم ، ٦٢,٤ سم^2»

١٤ أ ب ح مثلث متساوى الساقين فيه : أ = ب ، ق(∠أ) = ١٥° ، محيطه = ٢٥ سم
أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوسه. «٤٧٤ سم^2»

١٥ إذا كان محيط Δ أ ب ح = ٤٠ سم ، ق(∠أ) = ٤٤° ، ق(∠ب) = ٦٦°
فأوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب ح «١٠,٩ سم ، ١٤,٣ سم ، ١٤,٨ سم»

١٦ أ ب ح مثلث فيه : ح = ١٢ سم ، ق(∠ب) = ٣ ق(∠أ) = ٦٠°
أوجد أ ثم أوجد مساحة المثلث لأقرب سم^2 «٤,٢ سم ، ٢٢ سم^2»

١٧ أ ب ح مثلث مساحة سطحه ٤٥٠ سم^2 ، ق(∠ب) = ٨٢° ، ق(∠ح) = ٥٦°
فما قيمة أ ؟ «٢٧ سم»

١٨ أ ب ح مثلث حاد الزوايا فيه : أ ح = ١٢ سم ، جا أ = ٠,٦ ، مساحته تساوى ٤٣,٢ سم^2
أوجد طول $\overline{أب}$ ، طول $\overline{بح}$ ، ق(∠ب) «١٢ سم ، ٧,٦ سم ، ٣٤ ٧١°»

١٩ أوجد محيط المثلث أ ب ح الحاد الزوايا إذا كان :
أ = ٧ سم ، ب = ٨ سم ، ق(∠أ) = ٦٠° «٢٠ سم»

٢٠ أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى ب ، ء ∈ $\overleftarrow{بح}$ ، ء ∉ $\overline{بح}$ بحيث ح ء = ٤ سم
، ق(∠أ ء ح) = ١٥ ٤٥° ، ق(∠ح أ ء) = ١٨° أوجد طول $\overline{أب}$ لأقرب سم «٨ سم»

٢١ س ص ع مثلث فيه : ص ع = ١٥ سم ، ق(∠ص) = ٣٠° ، ق(∠ع) = ٧٠°
احسب طول العمود الساقط من س على $\overline{صع}$ «٧,١٦ سم»

٢٢ أ ب ح مثلث منفرج الزاوية فى ح فيه : أ = ٨ سم ، ح = ٢٠ سم ، ظا أ = $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$
أوجد : ق(∠ح) «٣٣ ١٢٣°»



٢٣ ا ب حـ مثلث فيه : ب = ٥ سم ، طا حـ = $\frac{٤}{٣}$ ، ق(∠ب) = ٣٠°

أوجد لأقرب سنتيمتر كلاً من أ ، حـ ومساحة المثلث ا ب حـ «١٠ سم ، ٨ سم ، ٢٠ سم²»

---

٢٤ س ص ع مثلث فيه : جا س + جا ص + جا ع = ٢,٣٧ ، ومحيطه = ٥٦,٨٨ سم

أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه. «١٢ سم»

---

٢٥ ا ب حـ مثلث فيه : ق(∠ا) = ٦٠° ، ق(∠ب) = ٤٥° فإذا كان : أ + ب = ($\sqrt{٦}$ + ٢) سم

فأوجد كلًا من : أ ، ب «$\sqrt{٦}$ سم ، ٢ سم»

---

٢٦ ا ب حـ مثلث فيه : جا ا : جا ب : جا حـ = ٢ : ٤ : ٥ ، حـ − ب = ٣ سم

أوجد كلاً من : أ ، ب «٦ سم ، ١٢ سم»

---

٢٧ ا ب حـ مثلث فيه : ق(∠ا) : ق(∠ب) : ق(∠حـ) = ٣ : ٤ : ٣

فإذا كان : أ = ٥ سم فأوجد محيط المثلث. «١٥,٩ سم»

---

٢٨ ا ب حـ مثلث فيه : ق(∠ا) : ق(∠ب) : ق(∠حـ) = ١ : ٣ : ٥

، فإذا كان محيط المثلث = ١٦ سم فأوجد طول أصغر أضلاع المثلث طولاً. «٢,٥ سم»

---

٢٩ ا ب حـ مثلث فيه : ق(∠ا) = $\frac{٢}{٣}$ ق(∠ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠حـ) ، طول نصف قطر الدائرة المارة

برؤوسه = ١٠ سم أوجد مساحة Δ ا ب حـ «١١٠ سم²»

---

٣٠ ا ب حـ مثلث فيه : ٦ جا ا = ٤ جا ب = ٣ جا حـ ، محيطه = ٤٥ سم

أوجد كلاً من : أ ، حـ «١٠ سم ، ٢٠ سم»

---

٣١ فى Δ ا ب حـ إذا كان : $\frac{أ + ب - حـ}{٣} = \frac{أ + حـ - ب}{٥} = \frac{ب + حـ - أ}{٧}$

فاثبت أن : جا ا : جا ب : جا حـ = ٤ : ٥ : ٦

---

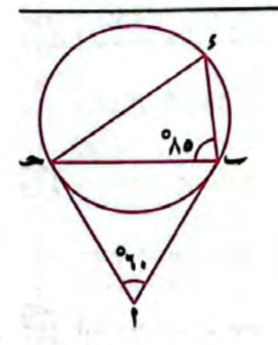
٣٢ فى الشكل المقابل :

ا ب ، ا حـ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، حـ

فإذا كان : ق(∠ا) = ٦٠° ، ق(∠ء ب حـ) = ٨٥°

، مساحة المثلث ا ب حـ = ٩ $\sqrt{٣}$ سم²

فأوجد لأقرب سنتيمتر محيط المثلث ء ب حـ



«١٧ سم»





٣٣ في الشكل المقابل :

م دائرة ، أ ب = ٥ سم ، ق(∠ أ م ب) = ٨٠°

، ق(∠ حـ أ ب) = ٨٥°

أوجد : (١) محيط Δ أ ب حـ

(٢) مساحة سطح الدائرة م

«١٩,١٢ سم ، ٤٧,٥ سم^2»

---

٣٤ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : ق(∠ أ) = ٥٠° ، ق(∠ ء ب حـ) = ٧٠° ، ب ء = ٨ سم

أوجد محيط متوازي الأضلاع.

«٣٨ سم»

---

٣٥ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : أ ب = ١٨ سم ، ق(∠ حـ أ ب) = ٣٦° ، ق(∠ ء ب أ) = ٤٤°

أوجد طول القطر $\overline{أحـ}$ ، ومساحة متوازي الأضلاع.

«٢٥,٣٩ سم ، ٢٦٩ سم^2»

---

٣٦ أ ب حـ ء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م ، أ حـ = ٢٠ سم ، ق(∠ أ م ء) = ١٣٠°

، ق(∠ حـ أ ب) = ٨٥° أوجد طول $\overline{ب ء}$ ثم أوجد مساحة متوازي الأضلاع أ ب حـ ء

«٢٨,٢ سم ، ٢١٦ سم^2»

---

٣٧ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، أ ء = ٢٠ سم ، ق(∠ ء) = ١٢٠°

، ق(∠ ب) = ٦٢° ، ق(∠ أ حـ ب) = ٢٣° ٢٥َ

أوجد : (١) طول كل من : $\overline{أحـ}$ ، $\overline{ب حـ}$ لأقرب سم

(٢) مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء لأقرب سم^2

«٢٩ سم ، ٣٣ سم ، ٣٠٥ سم^2»

---

٣٨ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : حـ ء = ١٠٠ سم ، ق(∠ ب حـ أ) = ٣٦°

، ق(∠ ب ء أ) = ٥٥° ، ق(∠ ب حـ ء) = ٨٥° ، ق(∠ حـ ء أ) = ٨٧°

أوجد طول كل من : $\overline{ب ء}$ ، $\overline{أحـ}$ لأقرب سنتيمتر

«١١٢ سم ، ١٤٤ سم»

---

٣٩ إذا كان أ ب حـ ء شكلاً رباعيًا فيه : ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، ق(∠ ب أ ء) = ٨٠°

، أ ب = أ ء = ١٠ سم ، ب ء = ب حـ احسب مساحة الشكل أ ب حـ ء

«١٠٢ سم^2»

---

٤٠ في أي مثلث أ ب حـ :

أثبت أن : (١) $\frac{٣ أ - ٤ ب}{٣ جاأ - ٤ جاب} = \frac{حـ}{جاحـ}$

(٢) مساحة المثلث = $\frac{أ^2 جاب جاحـ}{٢ جاأ}$

(٣) مساحة المثلث = $\frac{أ ب حـ}{٤ نق}$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ



ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث أ ب جـ يساوي ٣ سم

فإن : $\frac{\text{أَ بَ جـَ}}{\text{جا أ جا ب جا جـ}}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٢٧ (د) ٢١٦

② إذا كان أ ب جـ مثلث فإن : أَ قتا أ + بَ قتا ب + جـَ قتا جـ = ...

(أ) ٢ نق (ب) ٤ نق (جـ) ٦ نق (د) ٨ نق

③ إذا كان : أَ = جا ب ، بَ = جا جـ ، جـَ = جا أ فإن محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ يساوي ....

(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) ٢ π

④ في Δ أ ب جـ : $\frac{\text{أَ جا أ + بَ جا ب + جـَ جا جـ}}{\text{أَ}^٢ + \text{بَ}^٢ + \text{جـَ}^٢}$ = ...

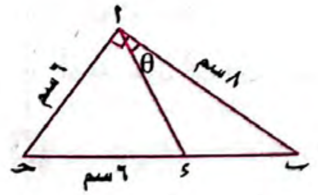
(أ) $\frac{١}{\text{نق}^٢}$ (ب) $\frac{١}{٢\ \text{نق}}$ (جـ) ٢ نق (د) نق^٢

⑤ إذا كان أ ب جـ مثلث مساحته ٢٤ سم^٢ وكان طول نصف قطر الدائرة الخارجة عنه ٥ سم

فإن : جا أ جا ب جا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{٣}{٢٥}$ (ب) $\frac{٦}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

⑥ في الشكل المقابل :



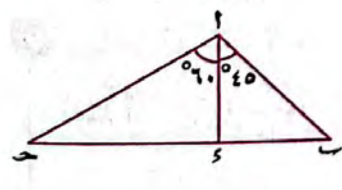
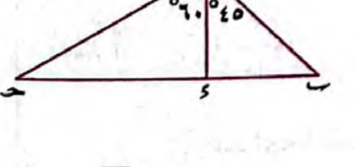
ظا θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$

(جـ) ٢ (د) ١



⑦ في الشكل المقابل :

إذا كان : جـ ء = ٢ ء ب

فإن : $\frac{\text{جا ب}}{\text{جا جـ}}$ = ...

(أ) $\sqrt{٦}$ (ب) $\frac{\sqrt{٦}}{٤}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ (د) $\frac{٢\sqrt{٦}}{٣}$



⑧ في الشكل المقابل :

إذا كان : أ ء = ٤ $\sqrt{2}$ سم فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ٢ $\sqrt{2}$ (ب) ٤

(جـ) ٤ $\sqrt{2}$ (د) ٨

⑨ في الشكل المقابل :

إذا كان : طا (∠ ء هـ حـ) = $\frac{٣}{٤}$

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة

برؤوس Δ أ ب حـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٣,٥ (جـ) ٣,٧٥ (د) ٤

⑩ في الشكل المقابل :

ء منتصف $\overline{ب حـ}$ ، ق (∠ ب أ ء) = ٦٠°

فإن : طا (∠ ء أ حـ) = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جـ) ١ (د) $\sqrt{٢}$

⑪ في الشكل المقابل :

مساحة الجزء المظلل ≈ .... سم^{٢}

(أ) ٤,٣٧ (ب) ٢٦,٢

(جـ) ٤٣,٧ (د) ٥٢,٦

---

٢ إذا كان أ ب حـ ء شكلاً رباعيًا دائريًا

أثبت أن : ب حـ × جا (∠ أ ب ء) = أ ء × جا (∠ حـ ء ب)

---

٣ في المثلث أ ب حـ :

أثبت أن : ① جا ٢أ + جا ٢ب + جا ٢حـ = $\frac{٤ ع Δ}{أ ب حـ}$

② $\frac{١}{حـ جا أ} + \frac{١}{أ جا ب} + \frac{١}{ب جا حـ} = \frac{ع}{Δ}$

حيث ع نصف محيط المثلث أ ب حـ ، Δ مساحة المثلث أ ب حـ

---

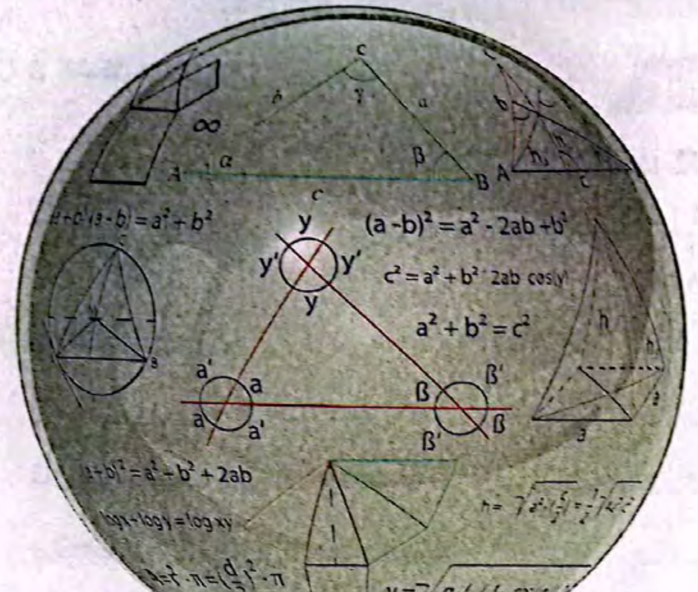
٤ أثبت أن مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ تساوي $\frac{\pi أ^{٢} ب^{٢}}{٤ جا^{٢} أ جا^{٢} ب}$





الدرس 2

قانون جيب التمام (قاعدة جيب التمام)



فى أى مثلث $\text{أ}\text{ب}\text{حـ}$ يكون :

- $\text{أ}^2 = \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - 2\,\text{ب}\,\text{حـ}\,\text{جتا}\,\text{أ}$ ومنها $\text{جتا}\,\text{أ} = \dfrac{\text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - \text{أ}^2}{2\,\text{ب}\,\text{حـ}}$
- $\text{ب}^2 = \text{أ}^2 + \text{حـ}^2 - 2\,\text{أ}\,\text{حـ}\,\text{جتا}\,\text{ب}$ ومنها $\text{جتا}\,\text{ب} = \dfrac{\text{أ}^2 + \text{حـ}^2 - \text{ب}^2}{2\,\text{أ}\,\text{حـ}}$
- $\text{حـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 - 2\,\text{أ}\,\text{ب}\,\text{جتا}\,\text{حـ}$ ومنها $\text{جتا}\,\text{حـ} = \dfrac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{حـ}^2}{2\,\text{أ}\,\text{ب}}$

تستخدم هذه القاعدة إذا علم طولا ضلعين فى Δ أ ب حـ وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

تستخدم هذه القاعدة إذا علمت أطوال أضلاع Δ أ ب حـ أو النسبة بينها.

البرهان

ليكن المطلوب إثبات أن : $\text{أ}^2 = \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - 2\,\text{ب}\,\text{حـ}\,\text{جتا}\,\text{أ}$

أولاً : إذا كان Δ أ ب حـ حاد الزوايا :

نرسم $\overline{\text{حـ}\text{ء}} \perp \overline{\text{أ}\text{ب}}$ يقطعها فى ء

، من Δ أ ء حـ نجد أن : $\text{حـ}\text{ء} = \text{ب}\,\text{جا}\,\text{أ}$ ، $\text{ء}\text{أ} = \text{ب}\,\text{جتا}\,\text{أ}$ $\therefore$ $\text{ب}\text{ء} = \text{حـ} - \text{ب}\,\text{جتا}\,\text{أ}$

، فى Δ حـ ء ب القائم الزاوية فى ء : $\because$ $(\text{ب}\text{حـ})^2 = (\text{حـ}\text{ء})^2 + (\text{ء}\text{ب})^2$

أى أن $\text{أ}^2 = (\text{ب}\,\text{جا}\,\text{أ})^2 + (\text{حـ} - \text{ب}\,\text{جتا}\,\text{أ})^2$

$= \text{ب}^2\,\text{جا}^2\,\text{أ} + \text{حـ}^2 - 2\,\text{ب}\,\text{حـ}\,\text{جتا}\,\text{أ} + \text{ب}^2\,\text{جتا}^2\,\text{أ}$

$= \text{ب}^2\,(\text{جا}^2\,\text{أ} + \text{جتا}^2\,\text{أ}) + \text{حـ}^2 - 2\,\text{ب}\,\text{حـ}\,\text{جتا}\,\text{أ}$

$\therefore$ $\text{أ}^2 = \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - 2\,\text{ب}\,\text{حـ}\,\text{جتا}\,\text{أ}$ ومنها $\text{جتا}\,\text{أ} = \dfrac{\text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - \text{أ}^2}{2\,\text{ب}\,\text{حـ}}$ (وهو المطلوب)

تذكر أن

$\text{جا}^2\,\text{أ} + \text{جتا}^2\,\text{أ} = 1$



ثانيًا : إذا كان Δ أ ب حـ منفرج الزاوية فى أ :

نرسم $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ يقطعه فى ء

، فى Δ أ ء حـ نجد أن : حـ ء = ب جا (١٨٠° − أ)

، أ ء = ب جتا (١٨٠° − أ) ∴ ب ء = حـ + ب جتا (١٨٠° − أ)

، فى Δ حـ ء ب القائم الزاوية فى ء : ∵ (ب حـ)^{٢} = (حـ ء)^{٢} + (ء ب)^{٢}

أى أن أ^{٢} = (ب جا (١٨٠° − أ))^{٢} + (حـ + ب جتا (١٨٠° − أ))^{٢}

= (ب جا أ)^{٢} + (حـ − ب جتا أ)^{٢} = ب^{٢} جا^{٢} أ + حـ^{٢} − ٢ ب حـ جتا أ + ب^{٢} جتا^{٢} أ

= ب^{٢} (جا^{٢} أ + جتا^{٢} أ) + حـ^{٢} − ٢ ب حـ جتا أ

∴ أ^{٢} = ب^{٢} + حـ^{٢} − ٢ ب حـ جتا أ ومنها جتا أ = $\frac{\text{ب}^{٢} + \text{حـ}^{٢} - \text{أ}^{٢}}{\text{٢ ب حـ}}$ **(وهو المطلوب)**

لاحظ أن : قانون جيب التمام صحيح أيضًا فى حالة المثلث القائم الزاوية [وذلك بوضع جتا أ = جتا ٩٠° = صفر]

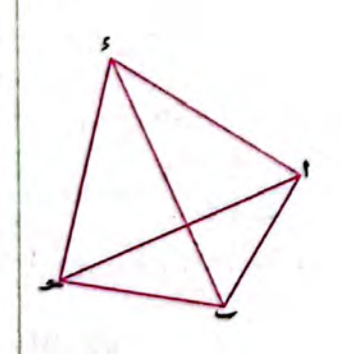
ملاحظـــات

* لإيجاد قياس إحدى زوايا مثلث يفضل استخدام قانون جيب التمام لأنه يحدد نوع الزاوية إذا كانت حادة أو منفرجة.

* إذا كان أ : ب : حـ = ٢ : ٣ : ٤

نفرض أن : أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك حيث ك ∈ ح$^{+}$

ثم نعوض فى قانون جيب التمام لإيجاد قياسات زوايا Δ أ ب حـ



* لإثبات أن الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى :

– نثبت أن زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان :

ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ١٨٠° **أى أن** جتا أ + جتا حـ = صفر

أ، ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٨٠° **أى أن** جتا ب + جتا ء = صفر

– نثبت أن قياسى زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة فيه وفى جهة واحدة منها متساويان :

كأن نثبت أن : ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ب ء حـ) **أى أن** جتا (∠ ب أ حـ) = جتا (∠ ب ء حـ)



مثال (١)

فى Δ أ ب حـ أوجد قيمة أ إذا كان : ب = ٣٠ سم ، حـ = ١٤ سم ، ق(∠أ) = ٦٠°

الحـــل

∵ $أ^٢ = ب^٢ + حـ^٢ - ٢ ب حـ$ حتا أ

∴ $أ^٢ = (٣٠)^٢ + (١٤)^٢ - ٢ × ٣٠ × ١٤ ×$ حتا ٦٠° = ٦٧٦ ∴ أ = $\sqrt{٦٧٦}$ = ٢٦ سم

مثال (٢)

س ص ع مثلث فيه : س = ٤ سم ، ص = ٥ سم ، ع = ٦ سم

احسب قياس أكبر زواياه ، وكذلك احسب مساحته.

الحـــل

أكبر الزوايا قياسًا تقابل أكبر الأضلاع طولاً.

∴ حتا ع = $\frac{س^٢ + ص^٢ - ع^٢}{٢ س ص} = \frac{٤^٢ + ٥^٢ - ٦^٢}{٢ × ٤ × ٥}$ = ٠,١٢٥ ∴ ق(∠ع) ≈ ٨٢° ٤٩َ ٩ً

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ س ص حا ع = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٥ × حا ٨٢° ٤٩َ ٩ً ≈ ٩,٩ $سم^٢$

مثال (٣)

أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{١}{٢}$ حا أ = $\frac{١}{٣}$ حا ب = $\frac{١}{٤}$ حا حـ **احسب** : ق(∠حـ)

الحـــل

∵ $\frac{حا أ}{٢} = \frac{حا ب}{٣} = \frac{حا حـ}{٤}$ ∴ $\frac{٢}{حا أ} = \frac{٣}{حا ب} = \frac{٤}{حا حـ}$

∴ أ : ب : حـ = ٢ : ٣ : ٤ وبفرض أن : أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك

∴ حتا حـ = $\frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب} = \frac{٤ ك^٢ + ٩ ك^٢ - ١٦ ك^٢}{٢ × ٢ ك × ٣ ك} = \frac{-٣ ك^٢}{١٢ ك^٢} = -\frac{١}{٤}$

∴ ق(∠حـ) = ١٠٤° ٢٨َ ٣٩ً

مثال (٤)

أ ب حـ مثلث فيه : أ = ١٣ سم ، ب = ١٤ سم ، حـ = ١٥ سم أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

الحـــل

∵ حتا أ = $\frac{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}{٢ ب حـ} = \frac{١٩٦ + ٢٢٥ - ١٦٩}{٢ × ١٤ × ١٥} = \frac{٣}{٥}$ ∴ حا أ = $\frac{٤}{٥}$

، ∵ $\frac{أ}{حا أ}$ = ٢ نق ∴ $\frac{١٣}{\frac{٤}{٥}}$ = ٢ نق ∴ نق = $\frac{١٣}{٢ × \frac{٤}{٥}} = ٨\frac{١}{٨}$ سم



مثال ٥

أبحـد متوازي أضلاع فيه : أب = ٨ سم ، بحـ = ١١ سم ، بد = ٩ سم

أوجد طول قطره $\overline{أحـ}$

الحل

في △ أبد : جتا أ = $\frac{(٨)^٢ + (١١)^٢ - (٩)^٢}{٢ \times ٨ \times ١١} = \frac{١٣}{٢٢}$

، ∵ ∠ب تكمل ∠أ (زاويتان متتاليتان في ▱ أبحـد)

∴ جتا ب = - جتا أ = $\frac{-١٣}{٢٢}$

∴ في △ أبحـ : $(أحـ)^٢ = (٨)^٢ + (١١)^٢ - ٢ \times ٨ \times ١١ \times \frac{-١٣}{٢٢} = ٢٨٩$

∴ أحـ = ١٧ سم

مثال ٦

أبحـد متوازي أضلاع فيه : ق(∠أ) = ١٢٠° ، ومحيطه = ١٦ سم

وطول القطر الأكبر فيه = ٧ سم أوجد مساحة متوازي الأضلاع علمًا بأن أب < بحـ



الحل

نصف محيط متوازي الأضلاع = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨ سم

فبفرض أن أب = س سم ∴ أد = (٨ - س) سم

∴ في △ أبد :

∵ $(بد)^٢ = (أب)^٢ + (أد)^٢ - ٢ (أب) (أد)$ جتا ١٢٠°

∴ $٤٩ = س^٢ + (٨ - س)^٢ - ٢ س (٨ - س) \times (-\frac{١}{٢})$

∴ $٤٩ = س^٢ + ٦٤ - ١٦ س + س^٢ + ٨ س - س^٢$

∴ $س^٢ - ٨ س + ١٥ = ٠$ ∴ (س - ٣) (س - ٥) = ٠ ∴ س = ٣ أو س = ٥

، ∵ أب < بحـ ∴ أب = ٣ سم ، أد = ٥ سم

∴ م (▱ أبحـد) = ٢ م (△ أبد) = $٢ \times \frac{١}{٢} \times ٣ \times ٥ \times$ جا ١٢٠° = $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ سم^٢

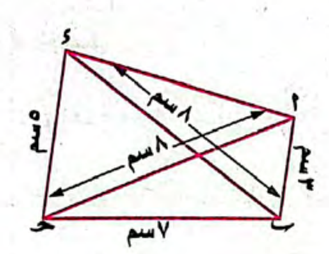


مثال ٧

أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٧ سم ، جـ ء = ٥ سم ، أ جـ = ب ء = ٨ سم

أثبت أن : الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى.

الحل



فى Δ ب أ جـ : جتا (∠ ب أ جـ) = $\frac{(٣)^{٢} + (٨)^{٢} - (٧)^{٢}}{٢ \times ٣ \times ٨} = \frac{١}{٢}$

، فى Δ ب ء جـ : جتا (∠ ب ء جـ) = $\frac{(٥)^{٢} + (٨)^{٢} - (٧)^{٢}}{٢ \times ٥ \times ٨} = \frac{١}{٢}$

∴ جتا (∠ ب أ جـ) = جتا (∠ ب ء جـ)

∴ ق (∠ ب أ جـ) = ق (∠ ب ء جـ) (وهما مرسومتان على $\overline{\text{ب جـ}}$ وفى جهة واحدة منها)

∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى.

مثال ٨

أ ب جـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

أثبت أن : (أ ب)^{٢} + (أ جـ)^{٢} = ٢ (أ ء)^{٢} + ٢ (ب ء)^{٢}

وإذا كان : أ ب = ٣ سم ، أ جـ = ٤ سم ، أ ء = $\sqrt{٣٫٥}$ سم **فأوجد :** طول $\overline{\text{ب جـ}}$

الحل

Δ أ ب ء فيه : (أ ب)^{٢} = (أ ء)^{٢} + (ب ء)^{٢} − ٢ (أ ء) (ب ء) جتا (∠ أ ء ب) (١)

، Δ أ جـ ء فيه : (أ جـ)^{٢} = (أ ء)^{٢} + (جـ ء)^{٢} − ٢ (أ ء) (جـ ء) جتا (∠ أ ء جـ)

، ∵ جتا (∠ أ ء ب) = − جتا (∠ أ ء جـ) ، جـ ء = ب ء

∴ (أ جـ)^{٢} = (أ ء)^{٢} + (ب ء)^{٢} + ٢ (أ ء) (ب ء) جتا (∠ أ ء ب) (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ (أ ب)^{٢} + (أ جـ)^{٢} = ٢ (أ ء)^{٢} + ٢ (ب ء)^{٢} (المطلوب أولاً)

∴ (٣)^{٢} + (٤)^{٢} = ٢ $(\sqrt{٣٫٥})^{٢}$ + ٢ (ب ء)^{٢}

∴ ٢٥ = ٧ + ٢ (ب ء)^{٢} ∴ (ب ء)^{٢} = ٩

∴ ب ء = ٣ سم ∴ ب جـ = ٦ سم (المطلوب ثانيًا)





تمارين 20 على قانون جيب التمام (قاعدة جيب التمام)





من أسئلة الكتاب المدرسى   • فهم   • تطبيق   • مستويات عليا



أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في Δ س ص ع المقدار $\frac{\text{س}^2 + \text{ص}^2 - \text{ع}^2}{2\,\text{س}\,\text{ص}}$ = ...

(أ) حتا س (ب) حتا ص (جـ) حتا ع (د) حا ع

(٢) في المثلث س ص ع يكون : ص² + ع² − س² = ٢ ص ع × ....

(أ) حتا س (ب) حا ع (جـ) حتا ع (د) حا س

(٣) في Δ أ ب جـ : حتا (أ + ب) = ...

(أ) حتا جـ (ب) − حتا جـ (جـ) حا جـ (د) − حا جـ

(٤) إذا كان : أ ب جـ د شكل رباعي دائرى فإن : حتا أ + حتا جـ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) −١

(٥) في المثلث س ص ع : ٢ س ص حتا (س + ص) = ...

(أ) س² + ص² − ع² (ب) ص² + ع² − س²

(جـ) س² − ع² − ص² (د) ع² − س² − ص²

(٦) المثلث ل م ن فيه : ل = ٥ سم ، م = ٧ سم ، ق(∠ن) = ٦٠°

فإن : ن ≃ .... سم (لأقرب جزء من عشرة).

(أ) ٦,٢ (ب) ٥ (جـ) ٤,٣ (د) ٣,٥

(٧) Δ س ص ع فيه : س = ٥ سم ، ص = ٣ سم ، ق(∠ع) = $\frac{2}{3}\pi$ فإن : ع = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ٤

(٨) في Δ أ ب جـ : إذا كان ق(∠أ) + ق(∠ب) = ١٢٠° ، أ = ٢ سم ، ب = ٣ سم

فإن : جـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) √٧ (د) √٥

(٩) Δ أ ب جـ فيه : أ = ٩ سم ، ب = ١٥ سم ، ق(∠جـ) = ١٠٦° فإن محيطه = ... سم

(أ) ٤٤ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٤ (د) ٢٨



(١٠) أ ب حـ مثلث فيه : ب = ٢ سم ، حـ = ٢,٥ سم ، حا أ = $\frac{٢}{٥}$

فإن : Δ أ ب حـ يكون ....

(أ) قائم الزاوية. (ب) متساوى الساقين. (جـ) متساوى الأضلاع. (د) مختلف الأضلاع.

(١١) 📖 فى المثلث س ص ع إذا كان : س = ص فإن : حتا س = ...

(أ) $\frac{٢ ص^٢}{ع}$ (ب) $\frac{ع}{٢ ص}$ (جـ) $\frac{ع}{٤ س}$ (د) $\frac{ص}{٢ س}$

(١٢) 📖 فى Δ أ ب حـ يكون حتا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢}{٢ أ ب}$ (ب) $\frac{أ^٢ + حـ^٢ - ب^٢}{٢ أ ب}$

(جـ) $\frac{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}{٢ ب حـ}$ (د) $\frac{حـ^٢ - أ^٢ - ب^٢}{٢ أ ب}$

(١٣) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم تساوى ....°

(أ) ١١٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

(١٤) أ ب حـ مثلث فيه : ب = ٤ سم ، أ + حـ = ١١ سم ، أ - حـ = ١ سم فإن : ....

(أ) المثلث منفرج الزاوية. (ب) المثلث قائم الزاوية.

(جـ) ق (∠ب) = ٢ ق (∠أ) (د) ق (∠أ) = ٢ ق (∠ب)

(١٥) فى Δ أ ب حـ يكون : حـ (أ حتا ب + ب حتا أ) = ...

(أ) ٢ حـ^٢ (ب) حـ^٢ (جـ) أ^٢ (د) ب^٢

(١٦) فى Δ أ ب حـ ، إذا كان : $\frac{حا أ}{حا ب}$ = ٢ حتا حـ ، فإن : ....

(أ) ب = حـ (ب) أ = حـ (جـ) أ = ب (د) أ = ب = حـ

(١٧) أ ب حـ مثلث فيه : أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢ + $\sqrt{٣}$ أ ب = ٠ فإن : ق (∠حـ) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٠

(١٨) فى Δ أ ب حـ ، إذا كان ق (∠حـ) = ٦٠° ، أ^٢ + ب^٢ - حـ^٢ = ك أ ب فإن : ك = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) -١

(١٩) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : حـ^٢ = (أ + ب)^٢ - أ ب فإن : ق (∠حـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

(٢٠) فى Δ أ ب حـ إذا كان : ٤ حا أ = ٣ حا ب = ٦ حا حـ فإن : ق (∠حـ) ≃ .... (لأقرب درجة)

(أ) ٨٩° (ب) ٢٩° (جـ) ٥٧° (د) ٨٢°



(٢١) فى Δ ا ب حـ : $\frac{1}{2}$ حا ا = $\frac{1}{3}$ حا ب = $\frac{1}{4}$ حا حـ فإن : حتا حـ = ...

(أ) $\frac{-2}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (جـ) $\frac{-1}{4}$ (د) $\frac{1}{4}$

(٢٢) إذا كان : ا ب حـ مثلث فيه : ٥ حا ا حا ب = ٦ حا ب حا حـ = ٩ حا حـ حا ا

فإن : ق (∠ حـ) ≈ ....

(أ) ٢٨° (ب) ٣٢° (جـ) ٣٦° (د) ٤٢°

(٢٣) إذا كان : ا ب حـ مثلث فيه : ٦ اً = ٤ بً = ٣ حً فإن قياس أصغر زوايا المثلث ≈ ....

(أ) ٢٨ ٥٧° (ب) ١٢ ٤١° (جـ) ٥٧ ٢٨° (د) ٥٢ ٣٦°

(٢٤) ا ب حـ مثلث فيه : ق (∠ ا) = ٦٠° ، بً : حً = ٥ : ٨ وكانت مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث تساوى ١٤٧ π سم² فإن : محيط Δ ا ب حـ = ... سم

(أ) ٢١ (ب) ٣٤ (جـ) ٥٤ (د) ٦٠

(٢٥) إذا كان ا ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : اً = ٨ سم ، بً = ٥ سم ، ق (∠ حـ) = ٦٠°

فإن : ق (∠ ا) ≈ ....

(أ) ١٢ً ٤٢َ ٨٣° (ب) ١٢ً ٤٧َ ٨١° (جـ) ١١َ ٣٨° (د) ١٠ً ٢٣َ ٦٠°

(٢٦) ا ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ا ب = ٨ سم ، ب حـ = ١١ سم ، ب ء = ٩ سم

فإن : طول $\overline{\text{ا حـ}}$ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٧

(٢٧) ا ب حـ ء شكل رباعى فيه : ا ب = ٢٢ سم ، ب حـ = ٢٥ سم ، ء حـ = ١٨ سم

، ق (∠ ا ء ب) = ٦٥° ، ق (∠ ء ب ا) = ٥٠° فإن : ق (∠ حـ ب ء) ≈ ....

(أ) ٧٥َ ٨٠° (ب) ١٩ً ٤٩َ ٤٢° (جـ) ٦ً ٢٨َ ٤٤° (د) ٣٠َ ٨٥°

(٢٨) ا ب حـ مثلث فيه : اً = $\sqrt{2}$ سم ، بً = $\sqrt{3}$ سم ، حً = ٢ سم

فإن : $\frac{\text{حتا ا حتا ب}}{\text{حتا (ا + ب)}}$ = ...

(أ) $\frac{8}{15}$ (ب) $\frac{-15}{8}$ (جـ) $\frac{-17}{15}$ (د) $\frac{8}{17}$

(٢٩) فى الشكل المقابل :

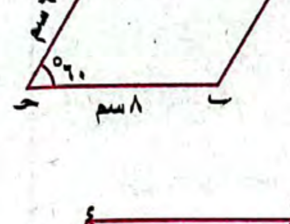
حـ ء = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩



(٣٠) فى الشكل المقابل ٢ب حـ ٤ متوازى أضلاع

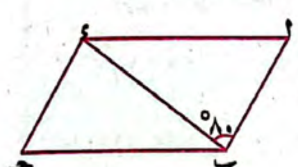
فإن ٢ حـ = ... سم



(أ) ٢ $\sqrt{١٣}$ (ب) ٢ $\sqrt{٣٧}$

(جـ) ٢ $\sqrt{١٧}$ (د) ١٤٨

(٣١) فى الشكل المقابل :



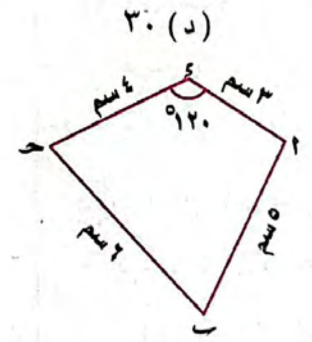
٢ب حـ ٤ متوازى أضلاع فيه : ق (∠ ٢ب٤) = ٨٠°

، ب ٤ = ٧ سم ، ٢ب = ٥ سم

فإن محيط متوازى الأضلاع = ... لأقرب سم

(أ) ٢٥ (ب) ٢٦ (جـ) ٢٩ (د) ٣٠

(٣٢) فى الشكل المقابل :

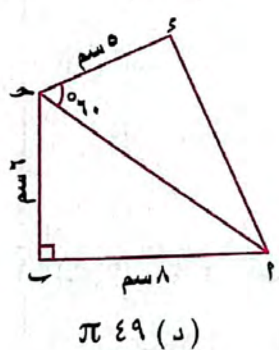


جتا ب = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$

(جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٣٣) فى الشكل المقابل :



٢ب حـ ٤ شكل رباعى فيه :

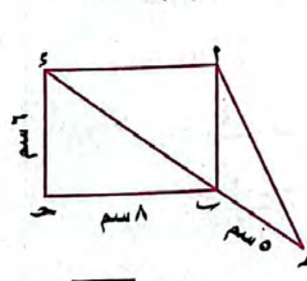
٢ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، ق (∠ب) = ٩٠°

، ٤ حـ = ٥ سم ، ق (∠ ٢حـ٤) = ٦٠°

فإن مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ ٢ ٤ حـ = ... سم^٢

(أ) ٩ π (ب) ١٦ π (جـ) ٢٥ π (د) ٤٩ π

(٣٤) فى الشكل المقابل :



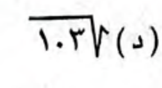
٢ب حـ ٤ مستطيل فيه : ٤ حـ = ٦ سم

، ب حـ = ٨ سم ، هـ ∈ $\overleftarrow{٤ب}$ حيث : ب هـ = ٥ سم

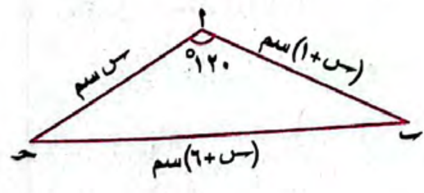
فإن : ٢ هـ = ... سم

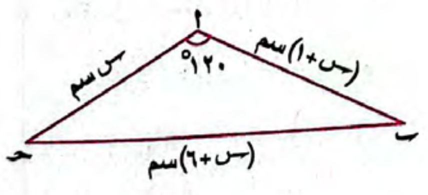
(أ) $\sqrt{٩٣}$ (ب) $\sqrt{٩٧}$ (جـ) ١٠ (د) $\sqrt{١٠٣}$





(٣٥) فى الشكل المقابل :





قيمة س = ... سم

(أ) ٧ (ب) ٨

(جـ) ٩ (د) ١٠



ثانيًا الأسئلة المقالية

1 س ص ع مثلث فيه : ق(∠ ع) = ٩٥° ، س = ١٣ سم ، ص = ١٦ سم أوجد : ع «٢١,٥ سم»

2 أ ب جـ مثلث فيه : أ = ٣ سم ، جـ = ٥ سم ، ق(∠ ب) = ٢١ ٣٦° أوجد : ب لأقرب سم «٣ سم»

3 أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ = ٧,٦ سم ، ب = ٥,٨ سم
، جـ = ٣,٤ سم «١٠٨ ٣٤° ، ٤٦ ٢٠° ، ٢٥ ٦°»

4 أ ب جـ مثلث فيه : أ = ١٣ سم ، ب = ١٤ سم ، جـ = ١٥ سم
أوجد : ق(∠ ب) ثم أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ لأقرب سم^2 «٥٩ ٢٩° ، ٨٤ سم^2»

5 أوجد قياس أصغر زاوية فى Δ س ص ع إذا كان :
س = ١٨ سم ، ص = ٢٧ سم ، ع = ٢٤ سم
ثم أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع «٤٠ ٤٨° ، ٥٩٦ سم^2»

6 أ ب جـ مثلث فيه : ق(∠ جـ) = ٩٦ ٢٣° ، أ = ٧ سم ، ب = ٩ سم أوجد :
(١) جـ (٢) مساحة سطح المثلث أ ب جـ لأقرب سم^2
(٣) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ لأقرب سنتيمتر. «١٢ سم ، ٣١ سم^2 ، ٦ سم»

7 أ ب جـ مثلث محيطه ٥٢ سم ، أ = ١٣ سم ، ب = ١٧ سم أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث
ثم احسب مساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع. «٩٣ ٢٢° ، ١١٠ سم^2»

8 أوجد قياس أكبر زاوية فى Δ س ص ع الذى فيه : س = ٢٤,٥ سم ، ص = ١٨ سم ، ع = ١٠ سم
ثم أوجد محيط الدائرة المارة برؤوسه ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$) «١١٩ ١٩° ، ٨٨ سم»

9 Δ س ص ع فيه س : ص : ع = ٤ : ٥ : ٦ بين أن قياس أصغر زواياه هو ٤١ ٢٥° تقريبًا.

10 س ص ع مثلث فيه : حا س : حا ص : حا ع = ٧ : ٨ : ١٢
أوجد قياس أكبر زواياه. «١٠٦ ٤°»

11 أ ب جـ مثلث فيه : أ = ٤ سم ، ب = ٥ سم ، حتا جـ = $\frac{١}{٢}$
أوجد جـ ثم أوجد مساحة Δ أ ب جـ «٧,٨ سم ، ٥ $\sqrt{٣}$ سم^2»

12 أ ب جـ مثلث فيه : أ = ١٦ سم ، جـ = ١٨ سم ، طا ب = $\frac{٣}{٤}$
أوجد مساحة المثلث ثم احسب محيطه. «٨٦,٤ سم^2 ، ٤٥ سم»



١٣ أ ب حـ مثلث فيه : ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا حـ أوجد قياس أصغر زواياه. «٢٦° ٢٣َ»

---

١٤ أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{1}{3}$ جا أ = $\frac{1}{4}$ جا ب = $\frac{1}{5}$ جا حـ

أوجد : ق (∠ حـ) وإذا كان محيط المثلث = ٢٤ سم أوجد مساحته. «٩٠° ، ٢٤ سم²»

---

١٥ أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{ب حـ}$ فإذا كان : ق (∠ ب) = ٧٥° ، ق (∠ أ) = ٦٠° ، أ = ٨ سم

فأوجد طول كل من : $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{أ ء}$ «٨,٩٢ سم ، ٦,٧ سم»

---

١٦ أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٧ سم ، حـ = ٩ سم ، فرضت نقطة ء على $\overline{ب حـ}$ بحيث

ب ء = ٤ سم احسب طول $\overline{أ ء}$ ثم أوجد طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ «٧ سم ، ٤,٧ سم»

---

١٧ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ حـ = ١٦ سم ، ب ء = ٢٠ سم ، ق (∠ أ م ب) = ٥٠°

حيث م ملتقى القطرين أوجد : أ ب ، أ ء لأقرب سم «٨ سم ، ١٦ سم»

---

١٨ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٣ سم ، أ حـ = ٢٠ سم

أوجد طول $\overline{ب ء}$ «١٠ سم»

---

١٩ أ ب حـ ء متوازى أضلاع محيطه ٢٠ سم فإذا كانت النسبة بين طولى ضلعين متجاورين ٢ : ٣ فإذا كان :

ب ء = ٨ سم فأوجد طول $\overline{أ حـ}$ «٦,٣ سم»

---

٢٠ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٦٠° ، محيطه = ٤٤ سم ، طول القطر الأصغر يساوى

١٤ سم ، أ ب > أ ء أوجد : ق (∠ أ ء ب) ثم احسب مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء لأقرب سم²

«٤٧َ ٢١° ، ٨٣ سم²»

---

٢١ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، أ ء = ٤٢ سم ، أ ب = ٣٠ سم

، ب حـ = ٤٨ سم ، ق (∠ أ) = ١٠٠°

أوجد طول كل من : $\overline{ب ء}$ ، $\overline{حـ ء}$ «٥٥,٧ سم ، ٣٠ سم»

---

٢٢ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = أ ء = ٩ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ ء = ٨ سم ، أ حـ = ١١ سم

أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.

---

٢٣ أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه :

أ ب = أ ء = ٩ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ ء = ٨ سم أوجد : أ حـ «١١ سم»

---

٢٤ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ١٤ سم ، حـ ء = ١٠ سم

، أ حـ = ب ء = ١٦ سم أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.



٢٥ ا ب ﺣ ء شكل رباعى فيه : ا ب = ٢٧ سم ، ب ﺣ = ١٢ سم ، ﺣ ء = ٨ سم ، ء ا = ١٢ سم ، ا ﺣ = ١٨ سم أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{ا ﺣ}}$ ينصف ∠ ب ا ء

ثم أوجد مساحة الشكل : ا ب ﺣ ء «١٢٤ سم^2»

---

٢٦ ا ب ﺣ ء شكل رباعى فيه : ق (∠ ء ا ب) = ق (∠ ء ب ﺣ) = ٩٠° ، ب ء = ١٠ سم ، ا ء = ٨ سم ، ق (∠ ء ﺣ ب) = ٣٠° أوجد : ا ﺣ لأقرب سم «٢٢ سم»

---

٢٧ ا ب ﺣ مثلث فيه : أ = ٣ ب ، ق (∠ ﺣ) = ٦٠°

أوجد : ق (∠ ب) ، ق (∠ ا) «١٩ ٦َ° ، ١٠٠ ٥٤َ°»

---

٢٨ ا ب ﺣ مثلث فيه : أ = ٥ سم ، ق (∠ ب) = ١٢٠° ، مساحته = ١٠ $\sqrt{3}$ سم^2

أوجد كلاً من : ﺣَ ، بَ وكذلك ق (∠ ا) «٨ سم ، ١١,٣٦ سم ، ٢٢ ٢٥َ°»

---

٢٩ ا ب ﺣ مثلث مساحته ٦٤ سم^2 ، ق (∠ ا) = ٣٠° ، بَ : ﺣَ = ٣ : ٤

أوجد محيط Δ ا ب ﺣ «٤١,٨ سم»

---

٣٠ ا ب ﺣ مثلث فيه : أ = ٦ سم ، بَ = ١٠ سم ، مساحة المثلث تساوى ٢٠ سم^2

فإذا كانت ∠ ا ﺣ ب منفرجة فأوجد كلاً من : ق (∠ ﺣ) ، طول $\overline{\text{ا ب}}$ «١٣٨ ١١َ° ، ١٥سم»

---

٣١ إذا كان : حا ا = $\frac{٢}{٣}$ حا ب = $\frac{١}{٢}$ حا ﺣ ، ﺣَ - أ = ٤ سم

أوجد كلًا من : بَ ، ق (∠ ا) «٦ سم ، ٢٨ ٥٧َ ١٨ً°»

---

٣٢ إذا كان حا ا : حا ب : حا ﺣ = ٣ : ٥ : ٧ أثبت أن : حتا ا : حتا ب : حتا ﺣ = ١٣ : ١١ : -٧

---

٣٣ ا ب ﺣ مثلث محيطه ٧٠ سم ، أ = ٢٦ سم ، ق (∠ ا) = ٦٠°

أوجد : مساحة سطحه. «١٠٥ $\sqrt{3}$ سم^2»

---

٣٤ ا ب ﺣ مثلث محيطه ٣٤ سم ، أ = ١٢ سم ، بَ - ﺣَ = ٦ سم

أوجد قياس أصغر زواياه ثم احسب مساحته. «١٩ ٤٦َ ٣٤ً° ، ٤٧,٩ سم^2»

---

٣٥ مثلث أطوال أضلاعه هى ١٤ ، ١٠ ، س من السنتيمترات فإذا كان قياس أكبر زواياه هو ١٢٠°

أوجد س علمًا بأن (س < ١٠) «٦ سم»

---

٣٦ Δ ا ب ﺣ فيه : ق (∠ ﺣ) = ١٢٠° ، أ = بَ - ٢ ، ﺣَ = بَ + ٢

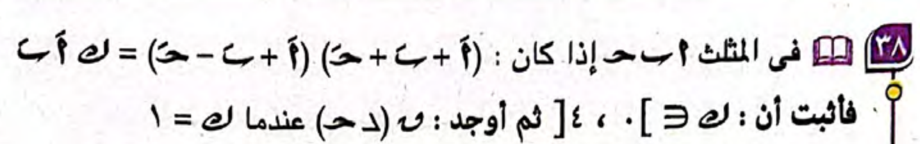
أوجد كلًا من : أ ، بَ ، ﺣَ «٣ ، ٥ ، ٧»

---

٣٧ فى المثلث ا ب ﺣ إذا كان (أ + بَ + ﺣَ) (أ + بَ - ﺣَ) = ٣ أ بَ أثبت أن : ق (∠ ﺣ) = ٦٠°







٣٨ في المثلث أ ب حـ إذا كان : (أ + ب + حـ) (أ + ب − حـ) = ك أ ب
فأثبت أن : ك ∈] ٠ ، ٤ [ثم أوجد : ق (∠ حـ) عندما ك = ١ «١٢٠°»

٣٩ أ ب حـ ء متوازي أضلاع أثبت أن : $(أحـ)^2 + (بء)^2 = 2 (أب)^2 + 2 (بحـ)^2$

٤٠ أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{بحـ}$ أثبت أن : $(أب)^2 + (أحـ)^2 = 2 (أء)^2 + 2 (بء)^2$
وإذا كان : أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم أوجد : أ ء «$\frac{\sqrt{34}}{2}$ سم»

٤١ أثبت أن : ظتا ب + ظتا حـ = $\frac{أ^2}{2\Delta}$ حيث Δ يعبر عن مساحة Δ أ ب حـ

٤٢ أ ب حـ مثلث فيه : $ب^2 = (حـ - أ)^2 + حـ أ$ أوجد : ق (∠ ب) «٦٠°»

٤٣ س ص ع مثلث فيه : $س^2 = ص^2 + ع^2 - ص ع$ ظتا س أوجد : ق (∠ س) «٩٠° أو ٣٠° ، ١٥٠°»

٤٤ Δ أ ب حـ فيه : جتا ب = $\frac{حـ}{2أ}$ أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوي الساقين.

٤٥ أ ب حـ ء هـ خماسي منتظم طول ضلعه ١٨,٢٦ سم ، أوجد طول قطره $\overline{أحـ}$ «٢٩,٥ سم»

٤٦ اكتشف الخطأ : أ ب حـ مثلث فيه :
أ = ٧ سم ، ب = ١٠ سم ، حـ = ٥ سم ، ق (∠ أ) ≃ ٤٠,٥٤°
أوجد : ق (∠ ب)

حل زياد

∵ $\frac{ب}{جا ب} = \frac{أ}{جا أ}$

∴ $\frac{10}{جا ب} = \frac{7}{جا 40,54°}$

∴ جا ب = $\frac{10 \text{ جا } 40,54°}{7}$ ≃ ٠,٩٢٨٥

∴ ق (∠ ب) = ٦٨,٢°

حل كريم

∵ جتا ب = $\frac{أ^2 + حـ^2 - ب^2}{2 أ حـ}$

∴ جتا ب = $\frac{(7)^2 + (5)^2 - (10)^2}{2 \times 7 \times 5}$

≃ −٠,٣٧١٤

∴ ق (∠ ب) ≃ ١١١,٨°

أي من الحلين هو الصحيح ؟ ولماذا ؟

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : أ (٠ ، ١) ، ب (٣ ، ٤) ، حـ (١ ، ٣) هي رؤوس مثلث
فإن : جتا (∠ أ حـ ب) = ...

(أ) $\frac{4}{5}$ (ب) $\frac{-4}{5}$ (جـ) $\frac{3}{5}$ (د) $\frac{-3}{5}$



② فى الشكل المقابل :

لإيجاد طول $\overline{ءهـ}$ يلزم معرفة ....

(أ) طول $\overline{أب}$ (ب) مساحة Δ أ ب حـ

(جـ) محيط Δ أ ب حـ (د) أى مما سبق.

③ فى الشكل المقابل :

أ ب = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٧

(جـ) ٨ (د) ٩

④ فى الشكل المقابل :

حتا أ = ...

(أ) $-\frac{١}{٦}$ (ب) $-\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ (د) $\frac{١}{٢}$

⑤ فى الشكل المقابل :

ق (∠ب أ هـ) = ...

(أ) ٣٤ ٣٩ ° (ب) ٣٩ ٣٤ °

(جـ) ١٨ ٣٤ ° (د) ٣٤ ١٨ °

⑥ فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠حـ) = ٤٠,٤ °

فإن محيط الجزء المظلل = ... سم

(أ) ١٥,٣ (ب) ١٣,٤ (جـ) ٦,٩ (د) ٢١,٣

⑦ إذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ = ١٢ سم^٢ فإن : $(ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢)$ ظا أ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٦

⑧ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠أ) = ٦٠° فإن : $\left(١ + \frac{أ}{حـ} + \frac{ب}{حـ}\right)\left(١ + \frac{حـ}{ب} - \frac{أ}{ب}\right)$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣



(٩) فى أى مثلث ا ب ح إذا كان : $\frac{\text{أ}^3+\text{ب}^3+\text{ح}^3}{\text{أ}+\text{ب}+\text{ح}}=\text{أ}^2$ فإن : ق (∠ ا) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٥٠°

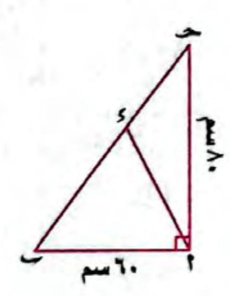
(١٠) فى الشكل المقابل :

ا ب ح ء ، س ح هـ و مربعان

إذا كان : ب ح = ٣ ح هـ فإن : جا (∠ ب س هـ) = ...

(أ) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ب) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (جـ) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ (د) $\frac{-2}{\sqrt{5}}$

(١١) فى الشكل المقابل :



ا ب ح مثلث قائم الزاوية فى ا ، ا ب = ٦٠ سم ، ا ح = ٨٠ سم

ورسم $\overline{\text{اء}}$ يقسم Δ ا ب ح إلى مثلثين لهما نفس المحيط

فإن : ا ء = ... سم

(أ) ٢٤ $\sqrt{5}$ (ب) ٥ $\sqrt{24}$ (جـ) ٣٥ $\frac{2}{3}$ (د) ٤٥ $\frac{1}{3}$

---

٢ فى Δ ا ب ح إذا كان : $\frac{\text{جتا ب}}{\text{أ}}=\frac{\text{جتا ا}}{\text{ب}}$

فأثبت أن : Δ ا ب ح إما قائم الزاوية أو متساوى الساقين.

---

٣ Δ ا ب ح قائم الزاوية فى ب فإذا كان هـ نقطة داخل المثلث بحيث أن

هـ ا = ١٠ سم ، هـ ب = ٦ سم ، ق (∠ ا هـ ب) = ق (∠ ب هـ ح) = ق (∠ ح هـ ا)

أوجد : طول $\overline{\text{هـ ح}}$ «٣٢ سم»

---

٤ Δ ا ب ح قائم الزاوية فى ب ، م ، ن تنتميان إلى $\overline{\text{ا ح}}$ بحيث ا م = م ن = ن ح

فإذا كان ب م = ٣ سم ، ب ن = ٤ سم أوجد : محيط Δ ا ب ح لأقرب سنتيمتر. «١٦ سم»

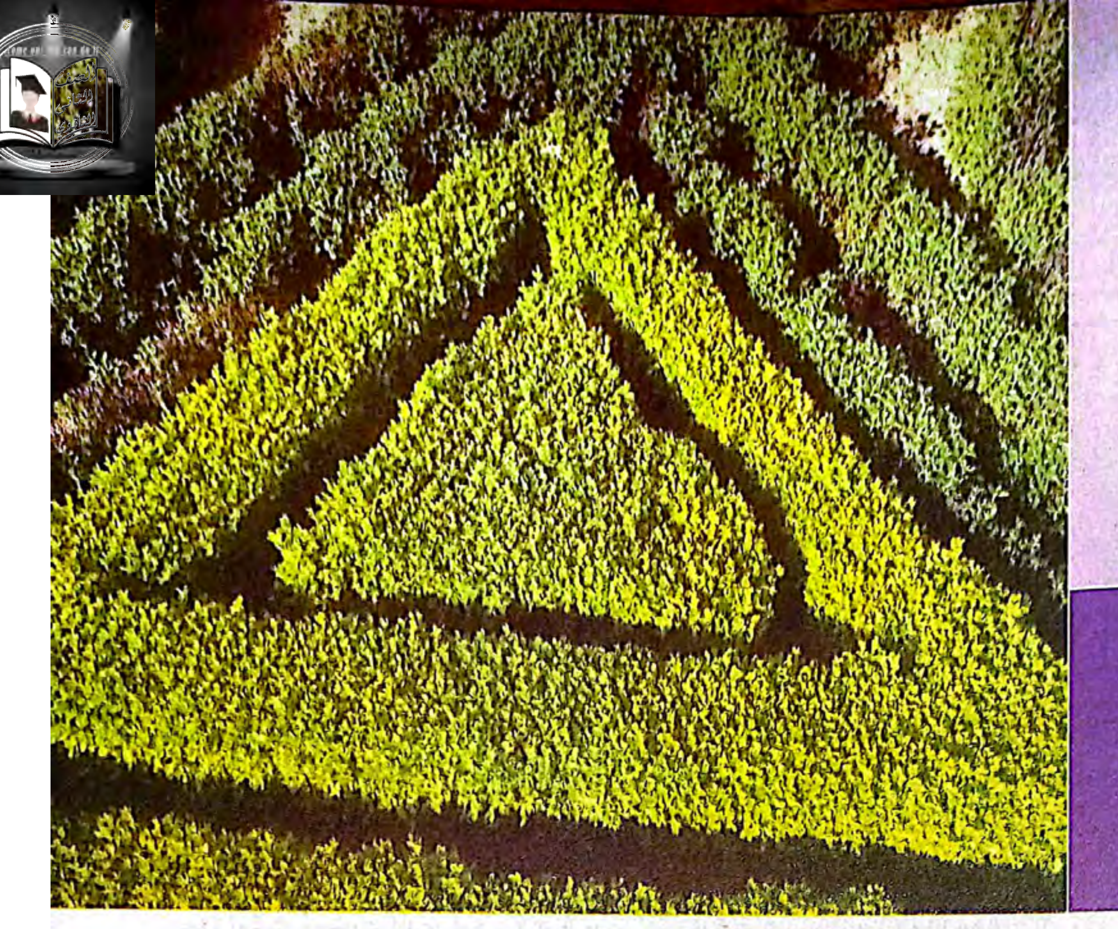
---

٥ فى أى مثلث ا ب ح أثبت أن :

(١) $\frac{\text{جتا ا}}{\text{أ}}+\frac{\text{جتا ب}}{\text{ب}}+\frac{\text{جتا ح}}{\text{ح}}=\frac{\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{ح}^2}{2\,\text{أ ب ح}}$

(٢) $\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{ح}^2=2\,(\text{ب ح جتا ا}+\text{أ ح جتا ب}+\text{أ ب جتا ح})$

(٣) $\frac{\text{ظا ا}}{\text{ظا ح}}=\frac{\text{أ}^2+\text{ب}^2-\text{ح}^2}{\text{ب}^2+\text{ح}^2-\text{أ}^2}$



الدرس

3

حـــل الــمـثــلــث

حل المثلث يعنى إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه المجهولة إذا علم ثلاثة من هذه العناصر الستة (أحدها على الأقل طول ضلع). **وهناك أربعة حالات لحل المثلث نعرض لها فيما يلى :**

الحالة الأولى حل المثلث إذا علم فيه قياسا زاويتين وطول ضلع

فى Δ أ ب حـ إذا علم ق(∠أ) ، ق(∠ب) ، أ :

١ نستخدم العلاقة : ق(∠حـ) = ١٨٠° − [ق(∠أ) + ق(∠ب)] لإيجاد : ق(∠حـ)

٢ نستخدم القانون : $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ}$ لإيجاد : ب ، حـ

مثال ١

حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق(∠أ) = ٣٨° ٥٢َ ، ق(∠ب) = ٩٦° ٥١َ ، أ = ٢٢,٣ سم

الحــل

ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٣٨° ٥٢َ + ٩٦° ٥١َ) = ٤٤° ١٧َ

∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ}$

∴ $\frac{٢٢,٣}{جا ٣٨° ٥٢َ} = \frac{ب}{جا ٩٦° ٥١َ} = \frac{حـ}{جا ٤٤° ١٧َ}$

∴ ب = $\frac{٢٢,٣ جا ٩٦° ٥١َ}{جا ٣٨° ٥٢َ}$ ≈ ٣٥,٣ سم ، حـ = $\frac{٢٢,٣ جا ٤٤° ١٧َ}{جا ٣٨° ٥٢َ}$ ≈ ٢٤,٨ سم



الحالة الثانية: حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

في Δ أ ب حـ إذا علم أ ، ب ، ق(∠ حـ) :

١ نستخدم القانون : $حـ^2 = أ^2 + ب^2 - 2$ أ ب جتا حـ لإيجاد : حـ

٢ يفضل استخدام القانون : جتا أ = $\frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ}$ لإيجاد : ق(∠ أ)

وذلك لأن قانون جيب التمام يفرق بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة (أو يستخدم قانون الجيب لإيجاد قياس الزاوية المقابلة لأصغر الضلعين المعلومين)

٣ نستخدم العلاقة : ق(∠ ب) = ١٨٠° − [ق(∠ أ) + ق(∠ حـ)] لإيجاد : ق(∠ ب)

مثال ٢

حل المثلث أ ب حـ الذي فيه : أ = ٨ سم ، ب = ٥ سم ، ق(∠ حـ) = ٢ً ٦٠°

الحل

∵ $حـ^2 = أ^2 + ب^2 - 2$ أ ب جتا حـ = ٦٤ + ٢٥ − ٢ × ٨ × ٥ جتا ٢ً ٦٠° ≈ ٤٩,٠٤

∴ حـ ≈ **٧ سم**

∴ جتا أ = $\frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ}$ = $\frac{٢٥ + ٤٩ - ٦٤}{٢ × ٥ × ٧}$ = $\frac{١}{٧}$

∴ ق(∠ أ) ≈ **٤٧ً ٨١°**

∴ ق(∠ ب) = ١٨٠° − (٢ً ٦٠° + ٤٧ً ٨١°) = **١١ً ٣٨°**

حل آخر :

بعد إيجاد حـ يمكن إيجاد ق(∠ ب) باستخدام قانون الجيب لأن ∠ ب تقابل أصغر الضلعين المعلومين بالمعطيات ، ثم نوجد ق(∠ أ)

∵ $\frac{حـ}{جا حـ} = \frac{ب}{جا ب}$

∴ $\frac{٧}{جا ٢ً ٦٠°} = \frac{٥}{جا ب}$

∴ جا ب = $\frac{٥ جا ٢ً ٦٠°}{٧}$ ≈ ٠,٦١٨٨

∴ ق(∠ ب) ≈ ١٤ً ٣٨° أ، ٤٦ً ١٤١°

، ∵ ب ليس طول أكبر أضلاع المثلث

∴ ∠ ب لا يمكن أن تكون منفرجة

∴ ق(∠ ب) = ١٤ً ٣٨°

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° − (٢ً ٦٠° + ١٤ً ٣٨°) = ٤٤ً ٨١°

لاحظ أن : الاختلافات البسيطة في قياسات الزوايا بين الحلين يرجع إلى استخدام قيم تقريبية بحاسبة الجيب.



الحالة الثالثة: حل المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة

في Δ أ ب حـ إذا علم أ ، ب ، حـ :

[١] نستخدم القانون : $جتا أ = \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ}$ لإيجاد : ق (∠ أ)

[٢] نستخدم القانون : $جتا ب = \frac{حـ^2 + أ^2 - ب^2}{2 حـ أ}$ لإيجاد : ق (∠ ب)

[٣] نستخدم العلاقة : ق (∠ حـ) = ١٨٠° − [ق (∠ أ) + ق (∠ ب)] لإيجاد : ق (∠ حـ)

مثال (٣)

حل المثلث أ ب حـ الذي فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، حـ = ١١ سم

الحل

∵ $جتا أ = \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ} = \frac{٤٩ + ١٢١ - ٢٥}{٢ \times ٧ \times ١١} = \frac{١٤٥}{١٥٤}$ ∴ ق (∠ أ) ≈ ١٩° ٤١َ

، ∵ $جتا ب = \frac{حـ^2 + أ^2 - ب^2}{2 حـ أ} = \frac{١٢١ + ٢٥ - ٤٩}{٢ \times ١١ \times ٥} = \frac{٩٧}{١١٠}$ ∴ ق (∠ ب) ≈ ٢٨° ٨َ

∴ ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (١٩° ٤١َ + ٢٨° ٨َ) = ١٣٢° ١١َ

تذكر أن

مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث فمثلاً إذا كان : أ = ٢ سم ، ب = ٥ سم ، حـ = ٨ سم فإن هذه الأطوال لا تصلح أن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث.

الحالة الرابعة: حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما [الحالة المبهمة]

مثال توضيحي

باستخدام الأدوات الهندسية ارسم Δ أ ب حـ الذي فيه :

أ ب = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٣٠° ، ب حـ = ٤ سم ثم تحقق من إجابتك باستخدام قانون الجيب.

الحل

* نرسم قطعة مستقيمة $\overline{أب}$ طولها = ٧ سم
* نرسم ∠ أ قياسها ٣٠° مع $\overline{أب}$ ولتكن ب أ ء
* نركز بسن الفرجار في النقطة ب وبفتحة طولها ب حـ = ٤ سم ونرسم قوس يقطع المستقيم $\overleftrightarrow{أء}$ في حـ
* نلاحظ أن النقطة حـ لها موضعين أي أننا يمكننا رسم مثلثين لهم نفس الشروط السابقة هما أ ب $حـ_1$ ، أ ب $حـ_2$ وبالقياس نجد أن : ق (∠ حـ) ≈ ٦١° في Δ أ ب $حـ_1$ أو ق (∠ حـ) ≈ ١١٩° في Δ أ ب $حـ_2$



التحقق من الإجابة باستخدام قانون الجيب

∵ $\frac{أ}{جا أ} = \frac{حـ}{جا حـ}$ ∴ $\frac{٤}{جا ٣٠°} = \frac{٧}{جا حـ}$

∴ جا حـ = $\frac{٧ جا ٣٠°}{٤} = \frac{٧}{٨}$ (موجبة) ∴ حـ تقع فى الربع الأول (حادة) أ، الثانى (منفرجة)

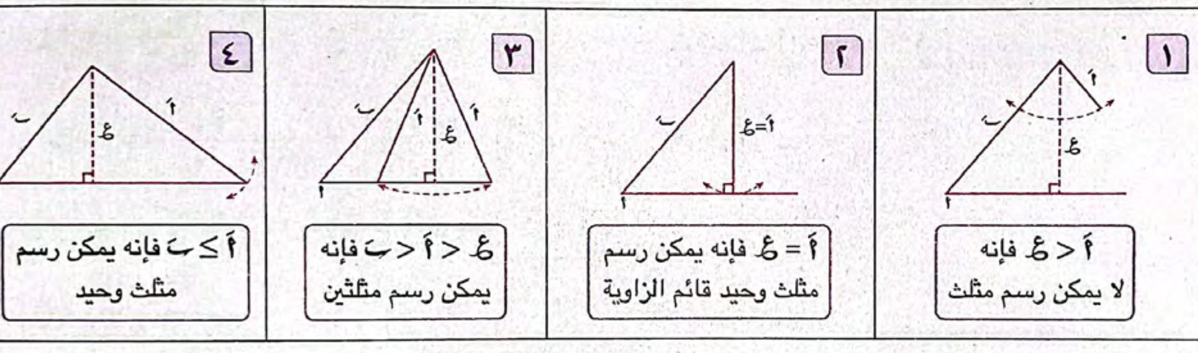
∴ ق(∠حـ) ≈ ٦١° أ، ق(∠حـ) ≈ ١١٩°

وعمومًا باستخدام الحل الهندسى يمكن التوصل إلى ما يلى :

* فى Δ أ ب حـ إذا علم أ ، ب ، ق(∠أ) نوجد ع = ب جا أ

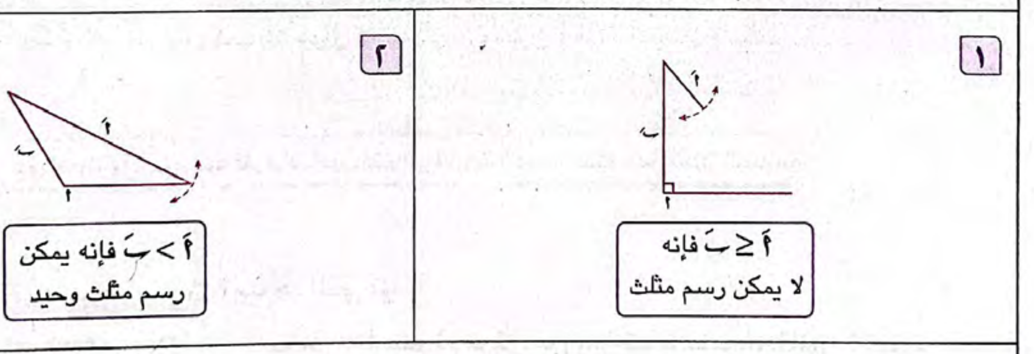
ولإيجاد عدد الحلول الممكنة للمثلث نقارن بين قيم أ ، ب ، ع كما يلى :

أولًا : إذا كانت ∠أ حادة وكان :



١	٢	٣	٤
أ < ع فإنه لا يمكن رسم مثلث	أ = ع فإنه يمكن رسم مثلث وحيد قائم الزاوية	ع < أ < ب فإنه يمكن رسم مثلثين	أ ≥ ب فإنه يمكن رسم مثلث وحيد

ثانيًا : إذا كانت ∠أ قائمة أو منفرجة وكان :



١	٢
أ ≤ ب فإنه لا يمكن رسم مثلث	أ > ب فإنه يمكن رسم مثلث وحيد

* يمكن حل المثلث فى هذه الحالة باستخدام قانون الجيب مباشرة دون تحديد عدد المثلثات الممكنة مع الأخذ فى الاعتبار ما يلى :

١ ∠أ تقع فى الربع الأول (إذا كانت حادة)، تقع فى الربع الثانى (إذا كانت منفرجة).

٢ دالة الجيب مداها [−١ ، ١]

٣ إذا كان فى المثلث زاوية منفرجة فإن الزاويتين الأخريين لابد وأن تكونا حادتين.



مثال ٤

بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق ثم أوجد الحلول الممكنة :

١ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠أ) = ١١٢° ، أَ = ٧ سم ، بَ = ٤ سم

٢ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠أ) = ١١٢° ، أَ = ٤ سم ، بَ = ٧ سم

٣ ل م ن مثلث فيه : ق(∠ل) = ٥٠° ، لَ = ٤ سم ، مَ = ٧ سم

٤ ء هـ و مثلث فيه : ق(∠ء) = ٦٠° ، ءَ = ٧,٥ سم ، هَـ = ٥ √٣ سم

٥ ل م ن مثلث فيه : ق(∠ل) = ٣٠° ، لَ = ٦ سم ، مَ = ٩ سم

٦ أ ب حـ مثلث فيه : ق(∠أ) = ٤٠° ، أَ = ٨,٥ سم ، بَ = ٧ سم

الحل

١ ∵ ∠أ منفرجة ، أَ > بَ

∴ يوجد للمثلث حل وحيد

، ∵ $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب}$

∴ $\frac{٧}{جا ١١٢°} = \frac{٤}{جا ب}$

∴ جا ب = $\frac{٤ جا ١١٢°}{٧}$ ≈ ٠,٥٢٩٨ ∴ ق(∠ب) ≈ **٣٢°**

ومنها ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١١٢° + ٣٢°) = **٣٦°**

، ∵ $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{حَ}{جا حـ}$ ∴ $\frac{٧}{جا ١١٢°} = \frac{حَ}{جا ٣٦°}$

∴ حَ ≈ **٤,٤ سم**

> **لاحظ أن**
>
> المثلث به زاوية واحدة على الأكثر منفرجة.
>
> ، ∵ ∠أ منفرجة ∴ ∠ب لا بد وأن تكون حادة
>
> ∴ ب تقع في الربع الأول فقط

٢ ∵ ∠أ منفرجة ، أَ < بَ

∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق

> **لاحظ أن**
>
> ∵ $\frac{٤}{جا ١١٢°} = \frac{٧}{جا ب}$ ∴ جا ب = $\frac{٧ جا ١١٢°}{٤}$ ≈ ١,٦
>
> وهذا مستحيل لأن جا ب ∉ [−١ ، ١]

٣ ∵ ∠ل حادة ، ع = مَ جا ل = ٧ جا ٥٠° ≈ ٥,٤ سم

، ∵ لَ < ع ∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق.



٤ ∵ ∠ د حادة ، ع = هـَ حا ء = ٥ $\sqrt{٣}$ حا ٦٠° = ٧,٥ سم

، ∵ ء = ع ∴ يوجد للمثلث حل وحيد وهو مثلث قائم الزاوية فى هـ

∴ ق (∠ و) = ١٨٠° − (٦٠° + ٩٠°) = **٣٠°** ، وَ = $\sqrt{(٥\sqrt{٣})^٢ - (٧,٥)^٢}$ = **$\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ سم**

٥ ∵ ∠ ل حادة ، ع = مَ حا ل = ٩ حا ٣٠° = ٤,٥ سم ، ∵ ٤,٥ < ٦ < ٩

اى ان ع < لَ < مَ ∴ يوجد للمثلث حلان

∵ $\frac{لَ}{حا ل} = \frac{مَ}{حا م}$ ∴ $\frac{٦}{حا ٣٠°} = \frac{٩}{حا م}$ ∴ حا م = $\frac{٣}{٤}$

∴ م تقع فى الربع الأول أو الثانى

∴ ق (∠ م) ≈ **٤٨° ٣٥َ ٢٥ً**

ومنها ق (∠ ن)

= ١٨٠° − (٣٠° + ٤٨° ٣٥َ ٢٥ً)

= **١٠١° ٢٤َ ٣٥ً**

، ∵ $\frac{لَ}{حا ل} = \frac{نَ}{حا ن}$

∴ $\frac{٦}{حا ٣٠°} = \frac{نَ}{حا ١٠١° ٢٤َ ٣٥ً}$

∴ نَ ≈ **١١,٧٦ سم**

أ ، ق (∠ م) = ١٨٠° − ٤٨° ٣٥َ ٢٥ً

= **١٣١° ٢٤َ ٣٥ً**

ومنها ق (∠ ن)

= ١٨٠° − (٣٠° + ١٣١° ٢٤َ ٣٥ً)

= **١٨° ٣٥َ ٢٥ً**

، ∵ $\frac{٦}{حا ٣٠°} = \frac{نَ}{حا ١٨° ٣٥َ ٢٥ً}$

∴ نَ ≈ **٣,٨٣ سم**

٦ ∵ ∠ أ حادة ، أ > ب

∴ يوجد للمثلث حل وحيد

، ∵ $\frac{أ}{حا أ} = \frac{ب}{حا ب}$

∴ $\frac{٨,٥}{حا ٤٠°} = \frac{٧}{حا ب}$

∴ حا ب = $\frac{٧ حا ٤٠°}{٨,٥}$ ≈ ٠,٥٣ ∴ ق (∠ ب) ≈ **٣٢°**

ومنها ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٣٢°) = **١٠٨°**

، ∵ $\frac{أ}{حا أ} = \frac{حـ}{حا حـ}$ ∴ $\frac{٨,٥}{حا ٤٠°} = \frac{حـ}{حا ١٠٨°}$

∴ حـ = $\frac{٨,٥ حا ١٠٨°}{حا ٤٠°}$ ≈ **١٢,٥٨ سم**

لاحظ أنه

إذا أخذنا هنا ق (∠ ب) بحيث تقع فى الربع الثانى

∴ ق (∠ ب) = ١٨٠° − ٣٢° = ١٤٨°

وهذا مستحيل لأنه ليس من المعقول أن يكون مجموع قياسى زاويتين فى مثلث = ٤٠° + ١٤٨° = ١٨٨° أكبر من ١٨٠°



ملاحظة

يمكن حل المثلث فى الحالة المبهمة باستخدام قانون جيب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث فنحصل على معادلة تربيعية وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة الناتجة من هذه المعادلة.

مثال ٥

باستخدام الملاحظة السابقة حل المثلث أ ب حـ الذى فيه :

أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم ، ق(∠أ) = ٣٠°

الحل

تذكر

القانون العام لحل معادلة تربيعية على الصورة أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠

هو س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$

∵ أ^{٢} = ب^{٢} + حـ^{٢} − ٢ ب حـ جتا أ

∴ (٦)^{٢} = (٨)^{٢} + حـ^{٢} − ٢ × ٨ × حـ جتا ٣٠°

∴ حـ^{٢} − ٨$\sqrt{٣}$ حـ + ٢٨ = ٠

∴ حـ = $\frac{٨\sqrt{٣} \pm \sqrt{(-٨\sqrt{٣})^{٢} - ٤(١)(٢٨)}}{٢(١)}$

∴ حـ ≈ ١١,٤ سم أ، حـ ≈ ٢,٤٥٦ سم

، ∵ كل قيمة موجبة لـ حـ تقابل مثلثًا واحدًا

∴ يوجد لدينا مثلثان ثم نوجد جتا ب من العلاقة : جتا ب = $\frac{حـ^{٢} + أ^{٢} - ب^{٢}}{٢ حـ أ}$

عندما حـ ≈ ١١,٤ سم

∴ جتا ب$_{١}$ = $\frac{(١١,٤)^{٢} + (٦)^{٢} - (٨)^{٢}}{٢ (١١,٤) (٦)}$

∴ ق(∠ب$_{١}$) ≈ ٤٩َ ٤١°

ومنها ق(∠حـ$_{١}$) = ١٨٠° − (٣٠° + ٤٩َ ٤١°)

= ١١َ ١٠٨°

عندما حـ = ٢,٤٥٦ سم

∴ جتا ب$_{٢}$ = $\frac{(٢,٤٥٦)^{٢} + (٦)^{٢} - (٨)^{٢}}{٢ (٢,٤٥٦) (٦)}$

∴ ق(∠ب$_{٢}$) ≈ ١٢َ ١٣٨°

ومنها ق(∠حـ$_{٢}$) = ١٨٠° − (٣٠° + ١٢َ ١٣٨°)

= ٤٨َ ١١°

∴ الحل الأول هو حـ = ١١,٤ سم ، ق(∠ب) = ٤٩َ ٤١° ، ق(∠حـ) = ١١َ ١٠٨°

، الحل الثانى هو حـ = ٢,٤٥٦ سم ، ق(∠ب) = ١٢َ ١٣٨° ، ق(∠حـ) = ٤٨َ ١١°

* حاول حل هذا المثال باستخدام قاعدة الجيب.



تمارين 21 على حل المثلث

من أسئلة الكتاب المدرسى • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) يقصد بحل المثلث ....

(أ) إيجاد أطوال أضلاعه. (ب) إيجاد قياسات زواياه.

(جـ) إيجاد العلاقة بين أطوال أضلاعه وقياسات زواياه. (د) إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه.

(٢) محيط Δ أ ب حـ الذى فيه : ب = ١١ سم ، ق(∠ أ) = ٦٧° ، ق(∠ حـ) = ٤٦°

يساوى ≃ .... (لأقرب سم).

(أ) ٢٢ (ب) ٣٨ (جـ) ٣١ (د) ٢٧

(٣) عند حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق(∠ حـ) = ٦٥°

فإن : حـ ≃ .... سم (لأقرب جزء من عشره).

(أ) ٤,٤ (ب) ٢,١ (جـ) ٦,٧ (د) ٨,٢

(٤) عند حل Δ أ ب حـ الذى فيه : أ = ٢ سم ، ب = ٤ $\sqrt{٢}$ سم ، حـ = ٢ $\sqrt{٥}$ سم فإن :

أولًا : جتا أ = ...

(أ) $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{١٠}}$ (د) $\frac{\sqrt{١٠}}{٥}$

ثانيًا : ق(∠ حـ) = ...°

(أ) ١٨ ٣٢° (ب) ٤٣ ٢٧° (جـ) ١٣٥° (د) ٤٥°

(٥) عدد حلول Δ أ ب حـ الذى فيه : ق(∠ حـ) = ١١٥° ، حـ = ١٢ سم ، أ = ٩ سم

هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(٦) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٨ سم ، ب = ١٠ سم ، ق(∠ أ) = ٤٢°

هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) عدد لا نهائى. (د) صفر



⑦ عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ حيث : ق(∠ أ) = ٦٠° ، ب = ٣ سم ، أ = ٥ سم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) عدد لا نهائى.

⑧ عدد حلول المثلث س ص ع الذى فيه : س = ٥ سم ، ص = ٦ سم ، ق(∠ س) = ٧٠° يساوى ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٣

⑨ Δ س ص ع فيه : س = ٣٠ سم ، ص = ٢٠ سم ، ق(∠ س) = ١٠٠°

فإن هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.

(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أى مثلث.

⑩ Δ أ ب حـ فيه : أ = ٢٠ سم ، ب = ٢٥ سم ، ق(∠ أ) = ٤٠° فإن هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.

(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أى مثلث.

⑪ Δ س ص ع فيه : ق(∠ س) = ١٠٠° ، س = ٣ سم ، ص = ٤ سم

هذه الشروط ....

(أ) تحقق وجود مثلث وحيد. (ب) تحقق وجود مثلثين.

(جـ) تحقق وجود ثلاثة حلول. (د) لا تحقق وجود أى مثلث.

⑫ إذا كان للمثلث أ ب حـ حيث أ = ١٥ سم ، ق(∠ ب) = ٣٠° حل وحيد

فإن : ب يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٨ (ب) ٧ (جـ) ٧,٥ (د) ٨,٥

⑬ إذا كان للمثلث س ص ع حيث س = ١٠ سم ، ق(∠ ص) = ٥٠° حلان

فإن : ص يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٦ (ب) ١١ (جـ) ٧,٦٦ (د) ٨

⑭ إذا كانت الشروط التالية لا تحقق وجود للمثلث س ص ع حيث س = ١٧ سم ، ق(∠ ص) = ٩٢°

فإن : ص يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٢٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٨ (د) ١٦



(١٥) إذا كانت الشروط التالية لا تحقق وجود للمثلث ل م ن حيث ل = ٣٥ سم ، ق(∠م) = ٧٥°

فإن : مَ يمكن أن يساوى .... سم

(أ) ٤٥ (ب) ٧٥ (جـ) ٣٣ (د) ٤٠

(١٦) عند حل Δ أ ب جـ الذى فيه : أَ = ١٥ سم ، جتا ب = $\frac{1}{2}$ ، ظا جـ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

فإن محيط Δ أ ب جـ = ... نق «حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث»

(أ) $(2 + \sqrt{2})$ (ب) $(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2)$ (جـ) $(3 + \sqrt{3})$ (د) ٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

مسائل على الحالة الأولى لحل المثلث (طول ضلع وقياسا زاويتين)

١ حل المثلث ل م ن الذى فيه : مَ = ١٧ سم ، ق(∠ل) = ١٦ ٣٣° ، ق(∠ن) = ١٩ ٤٤°

«٩,٥ سم ، ١٢,٢ سم ، ٢٥ ١٠٢°»

٢ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ ب = ٩ سم ، ق(∠أ) = ٢ ق(∠ب) = ٨٠°

ثم احسب مساحته لأقرب سم² «١٠,٢ سم ، ٦,٧ سم ، ٦٠° ، المساحة ≈ ٣٠ سم²»

٣ حل المثلث س ص ع الذى فيه : س ص = ٤٠ سم ، ق(∠س) = ١٢ ٧٥°

، ق(∠ص) = ١٥ ٤٨° ثم أوجد ارتفاع المثلث المرسوم من ع على $\overline{\text{س ص}}$

«٤٦,٤ سم ، ٣٥,٨ سم ، ٣٣ ٥٦° ، الارتفاع ≈ ٣٤,٦ سم»

مسائل على الحالة الثانية لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة)

٤ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه : ق(∠أ) = ١٢ ١٥٣° ، بَ = جـَ = ٦ سم

«١١,٦٧ سم ، ٢٤ ١٣° ، ٢٤ ١٣°»

٥ حل المثلث ل م ن الذى فيه : لَ = ١٢,٥ سم ، نَ = ٧,٢٥ سم ، ق(∠م) = ١,٢ء

«١١,٩٦ سم ، ٥٣ ٧٦° ، ٢٢ ٣٤°»

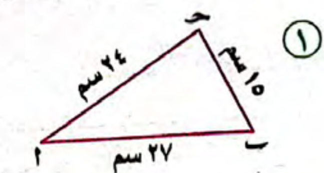
٦ حل المثلث ل م ن الذى فيه : ل م = ٤٨,٥ سم ، م ن = ٤٦ سم ، جتا م = -٠,٦

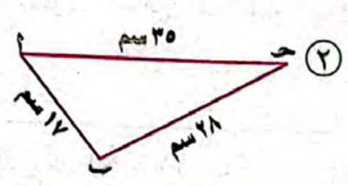
«٨٤,٥٣ سم ، ٤٨ ٢٥° ، ٥٢ ١٢٦° ، ٢٠ ٢٧°»



مسائل على الحالة الثالثة لحل المثلث (أطوال ثلاثة أضلاع)

٧ حل المثلث أ ب حـ في كل من الشكلين الآتيين :





٨ حل المثلث أ ب حـ الذي فيه : أ = ١٣ سم ، ب = ١٤ سم ، حـ = ١٥ سم

«٨َ ٥٣°، ٢٩َ ٥٩°، ٢٣َ ٦٧°»

٩ حل المثلث أ ب حـ الذي فيه : أ = ٥ سم ، ب = ٢ حـ = ٨ سم

«٤٥َ ٣٠°، ٦َ ١٢٥°، ٩َ ٢٤°»

مسائل على الحالة الرابعة لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية مقابلة لأحدهما)

١٠ حل المثلث أ ب حـ الذي فيه : أ = ١٠ سم ، ب = ٩ سم ، ق (∠ ب) = ٥٧°

١١ حل المثلث أ ب حـ الذي فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، أ = ٤ سم ، ب = ٣ سم

١٢ حل المثلث أ ب حـ الذي فيه : ق (∠ حـ) = ١١٦° ، حـ = ١٢ سم ، أ = ١٠ سم

١٣ بيِّن ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أي مثلث على الإطلاق ثم أوجد الحلول الممكنة مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة :

① أ = ١٥ سم ، ب = ١٠ سم ، ق (∠ أ) = ١٢٠°

② أ = ٤ سم ، حـ = ١٦ سم ، ق (∠ حـ) = ١١٥°

③ أ = ١٢ سم ، ب = ١٥ سم ، ق (∠ أ) = ١٠٠°

④ أ = ٢٠ سم ، ب = ٢٨ سم ، ق (∠ أ) = ٤٢°

⑤ أ = ٥ سم ، ب = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠°

⑥ أ = ١٢ سم ، حـ = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٢٧°

⑦ أ = ٤ $\sqrt{3}$ سم ، ب = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٦٠°

⑧ أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم ، ق (∠ أ) = ٤٧°

١٤ مسألة مفتوحة : أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ ب) = ٥٨° ، أ = ٤٢ سم

أوجد : ب التي لا يوجد حل للمثلث أ ب حـ عندها. فسر إجابتك.



مسائل متنوعة

١٥ حل المثلث أ ب جـ المتساوى الساقين الذى فيه : ق(∠ أ) = ١١٠° ، أ = ٨ سم

«٤,٩ سم ، ٤,٩ سم ، ٣٥° ، ٣٥°»

---

١٦ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ = ٢١ سم ، جتا ب = $\frac{٣}{٥}$ ، ظا جـ = $\frac{٥}{١٢}$

«١٧,٣ سم ، ٨,٣ سم ، ١٠٤° ١٥َ ، ٥٣° ٨َ ، ٢٢° ٣٧َ»

---

١٧ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ = ٥ سم ، ق(∠ ب) = ١٢٠°

، ومساحته تساوى ١٠ $\sqrt{٣}$ سم^٢ «١١,٣٦ سم ، ٨ سم ، ٢٢° ٢٤َ ، ٣٧° ٣٦َ»

---

١٨ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه : ق(∠ أ) : ق(∠ ب) : ق(∠ جـ) = ٤ : ٥ : ٦

ومحيطه يساوى ٥٠ سم «١٤,٥ سم ، ١٦,٩ سم ، ١٨,٦ سم ، ٤٨° ، ٦٠° ، ٧٢°»

---

١٩ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه : جا أ : جا ب : جا جـ = ٣ : ٤ : ٦ ومحيطه يساوى ٥٢ سم

«١٢ سم ، ١٦ سم ، ٢٤ سم ، ٢٦° ٢٣َ ، ٣٦° ٢٠َ ، ١١٧° ١٧َ»

---

٢٠ حل المثلث أ ب جـ الحاد الزوايا الذى فيه : أ = ٢١ سم ، ب = ٢٥ سم ، وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى ٢٨ سم «٢٦ سم ، ٤٨° ٣٥َ ، ٦٣° ١٤َ ، ٦٨° ١١َ»

---

٢١ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه : جـ = ٥ سم ، ق(∠ أ) = ٨٢° ، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٨ سم «١٥,٨ سم ، ١٥,٧ سم ، ٧٩° ٤٧َ ، ١٨° ١٣َ»

---

٢٢ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ = ٧ سم ، ق(∠ ب) = ٤٠°

، ومحيط الدائرة المارة برؤوس المثلث = ٤٤ سم (π = $\frac{٢٢}{٧}$) «٩ سم ، ١٣ سم ، ٣٠° ، ١١٠°»

---

٢٣ حل المثلث س ص ع الذى فيه : ق(∠ س) = ٨٢° ، ق(∠ ع) = ٥٦°

ومساحته = ٩٠٠ سم^٢ «٥٦ سم ، ٣٨ سم ، ٤٧ سم ، ٤٢°»

---

٢٤ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه :

ق(∠ أ) = ٣٥° ، ق(∠ ب) = ٧٥° ، أ + ٣ جـ = ٢٥ سم «٤,٢ سم ، ٧,١ سم ، ٦,٩ سم ، ٧٠°»

---

٢٥ حل المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ = ١٣ سم ، ق(∠ ب) = ٤٢° ، طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوى ٨ سم «١٠,٧ سم ، ١٥,٩ سم ، ٥٤° ٢٠َ ، ٨٣° ٤٠َ أ، ١٠,٧ سم ، ٣,٤ سم ، ١٢٥° ٤٠َ ، ١٢° ٢٠َ»



٢٦ في كل مما يأتى هل يمكن تكوين مثلث أ ب حـ أم لا ؟ وإذا كان ممكنًا حل هذا المثلث :

① أ = ٣,٢ سم ، ب = ٧,٦٣ سم ، حـ = ٦,٤ سم

② أ = ١٢ سم ، ب = ٢١ سم ، ق(∠ حـ) = ٩٥°

③ أ = ١ سم ، ب = ٥ سم ، حـ = ٤ سم

④ ق(∠ أ) = ٤٢° ، أ = ٧ سم ، ب = ١٠ سم

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ = ٣ سم ، ب = ٨ سم ، جا أ = $\frac{٥}{١٣}$

فإن عدد المثلثات التى يمكن تكوينها من المعلومات السابقة هى ....

(أ) صفر (ب) ١

(جـ) ٢ (د) المعلومات غير كافية.

② إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ حـ = ٨ سم ، ق(∠ أ) = ٤٠° وكان ٨ جا ٤٠° < ب حـ < أ حـ

فإن ....

(أ) لا يمكن رسم المثلث. (ب) يمكن رسم مثلث وحيد.

(جـ) يمكن رسم مثلثين. (د) يمكن رسم عدد لا نهائى من المثلثات.

③ إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ حـ = ٨ سم ، ق(∠ أ) = ٤٠° وكان ب حـ < ٨ جا ٤٠°

فإن ....

(أ) لا يمكن رسم المثلث. (ب) يمكن رسم مثلث وحيد.

(جـ) يمكن رسم مثلثين. (د) يمكن رسم عدد لا نهائى من المثلثات.

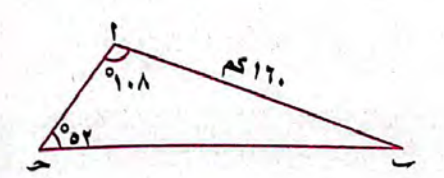




على الوحدة الرابعة

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

١ 📖 الربط بالجغرافيا :



الشكل المقابل يمثل مواقع ثلاث مدن أ ، ب ، حـ

أوجد لأقرب كيلو متر :

(١) المسافة بين أ ، حـ

(٢) المسافة بين ب ، حـ

«٦٩ كم ، ١٩٣ كم»

---

٢ 📖 فى الشكل المقابل :

العلامتان أ ، ب تقعان على الحافة نفسها لجدول مياه

والمسافة بينهما ١٧ مترًا ، تقع العلامة حـ على الحافة

المقابلة بحيث : ق (∠ب أ حـ) = ٧٢° ، ق (∠أ ب حـ) = ٥٣°

أوجد : (١) المسافة بين العلامتين أ ، حـ لأقرب متر.

(٢) المسافة بين حافتى الجدول بفرض أنهما متوازيتان لأقرب رقمين عشريين.

«١٧ م ، ١٥,٧٦ م»

---

٣ 📖 معارض الفنون : علقت صورة فى معرض بواسطة خيط مربوط بحلقتين على الحافة الأفقية العليا من الصورة ويمر على مسمار فى حائط ، فإذا كان طول الخيط على كل جهة من المسمار ٣٠ سم ، وقياس الزاوية بين جزئى الخيط ٥٠° فأوجد المسافة بين الحلقتين على حافة الصورة لأقرب سنتيمتر. «٢٥ سم»

---

٤ 📖 الربط بالزراعة : يريد مزارع وضع سياج بقطعة أرض مثلثة الشكل طولا ضلعين فيها ٩٨ م ، ٦٤ م ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٥٢° فما طول هذا السياج ؟ «٢٣٩ م»

---

٥ 📖 تحركت سفينتان أ ، ب فى نفس اللحظة من أحد الموانئ ، فإذا تحركت أ فى اتجاه ٢٠° جنوب الشرق حيث قطعت مسافة ٢٤ كم وتحركت ب فى اتجاه ٥٥° شمال الشرق حيث قطعت مسافة ١٠ كم فى نفس الزمن أوجد المسافة بين السفينتين فى نهاية هذا الزمن. «٢٣,٥ كم»

٦ **مسافات :** يركب كريم دراجته البخارية ليقطع المسافة من المدينة ؟ إلى المدينة حـ مرورًا بالمدينة ب بسرعة منتظمة مقدارها ٣٦ كم/س ، ثم يعود من المدينة حـ إلى المدينة ؟ مباشرة بسرعة منتظمة مقدارها ٤٢ كم/س أوجد :

١٥ كم ، ٩ كم ، ١٢٠°

① الإزاحة بالكيلو متر بين المدينة حـ ، المدينة ؟

② الزمن الكلى بالدقيقة للرحلة كلها.

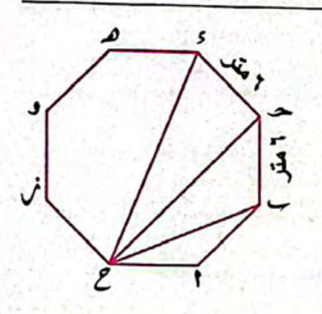
«٢١ كم ، ٧٠ دقيقة»

---

٧ **التصميم المعمارى :**

صمم مهندس معمارى مبنى على شكل مثمن منتظم ، طول كل ضلع من أضلاعه ٦ أمتار.

أوجد أطوال الأقطار $\overline{ع ب}$ ، $\overline{ع حـ}$ ، $\overline{ع ء}$



«١١,١ متر ، ١٤,٥ متر ، ١٥,٧ متر»



الرياضيات

البحتة



- اختبارات تراكمية
- اختبارات شهرية
- امتحانات نهائية

الجزء الخاص

بالامتحانات





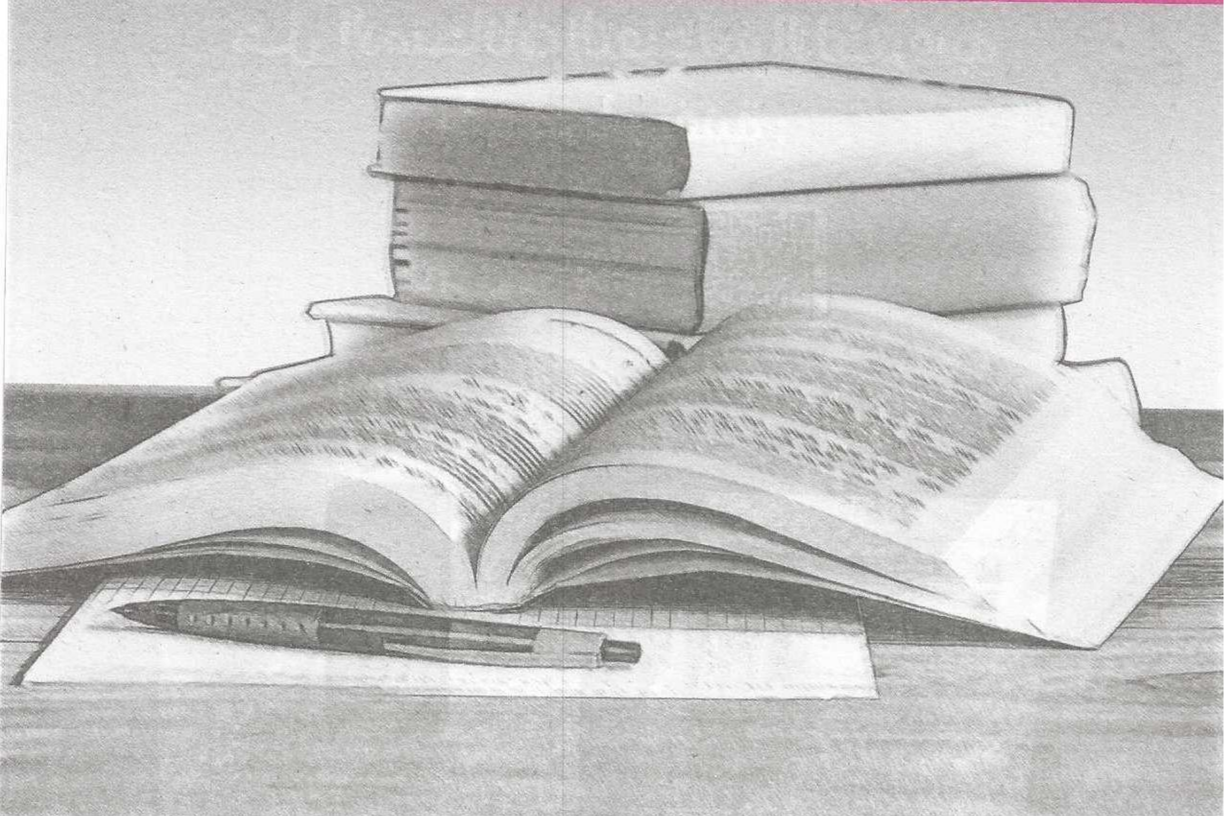
إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى

القسم العلمى

الفصل الدراسى الأول

محتويات الكتاب



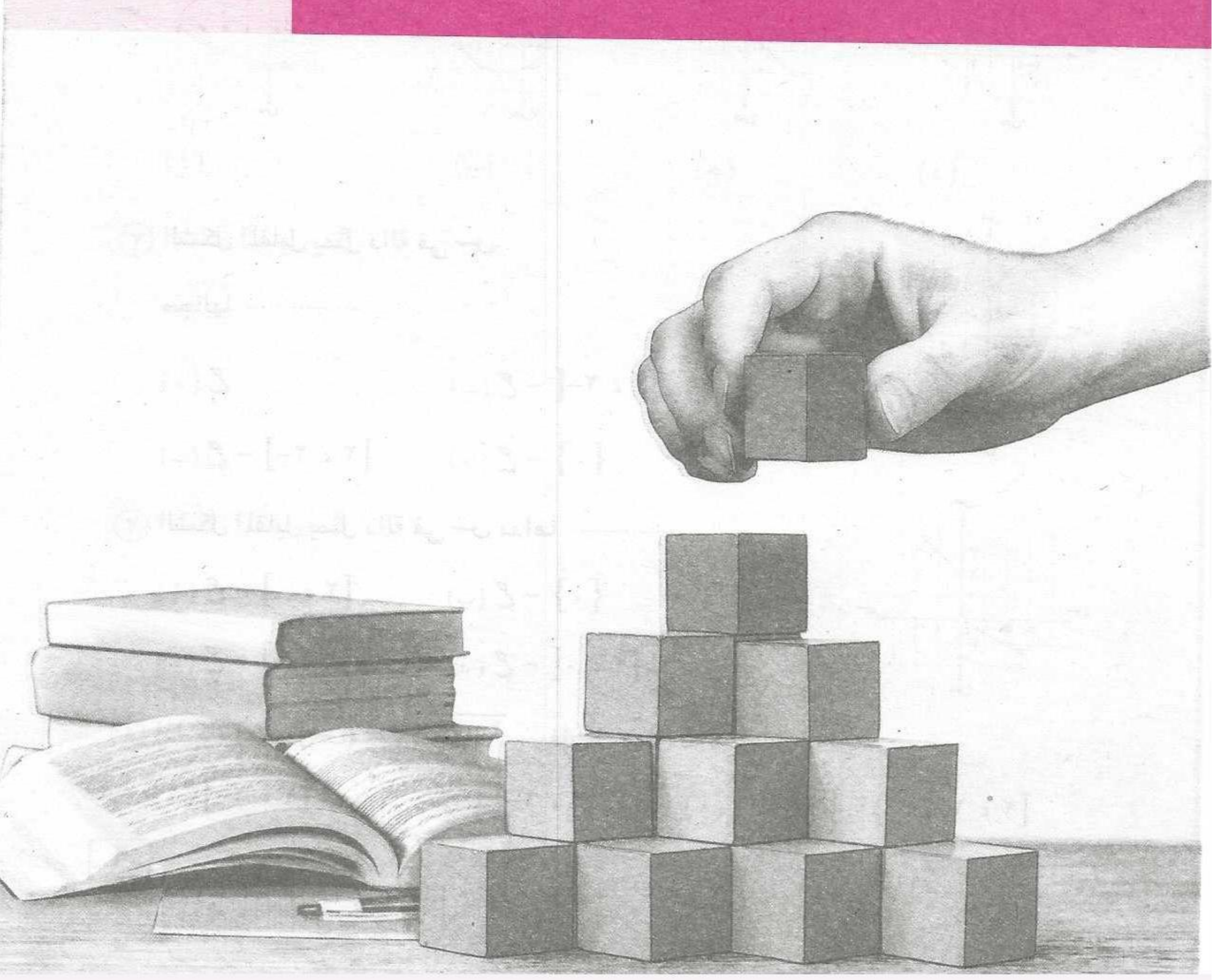
- الاختبـارات التراكميــة القصيــرة.
- الاختبـارات الشهرية.
- امتحانــات الكتــاب المدرســى.
- الامتحانــات النهائيــة.
- الإجابــات.

الاختبارات التراكمية القصيرة

أولًا : اختبارات تراكمية قصيرة فى الجبر.

ثانيًا : اختبارات تراكمية قصيرة فى التفاضل.

ثالثًا : اختبارات تراكمية قصيرة فى حساب المثلثات.





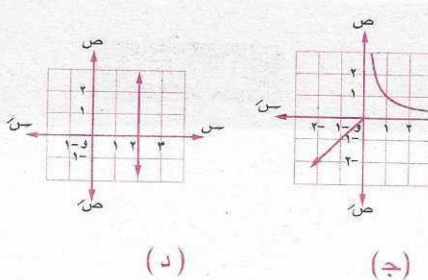
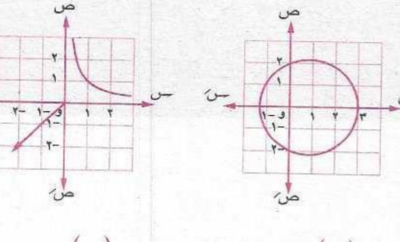
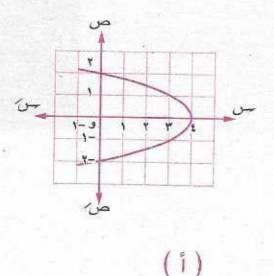
اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى من الأشكال الآتية يمثل دالة فى س ؟

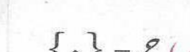




(أ) (ب) (جـ) (د)

(٢) الشكل المقابل يمثل دالة فى س

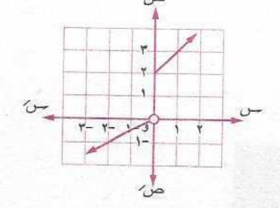
مجالها ....

(أ) ع (ب) ع -]-٢ ، ٢[




(جـ) ع - [-٢ ، ٢] (د) ع - {٠}

(٣) الشكل المقابل يمثل دالة فى س مداها ....



(أ) ع - [٠ ، ٢] (ب) ع - {٠}

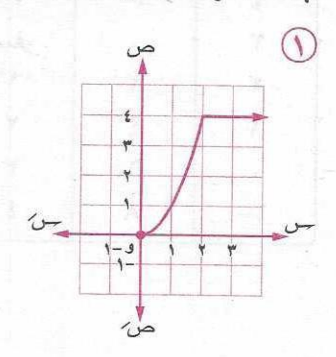
(جـ) ع - [٠ ، ٢[(د) ع -]٠ ، ٢[

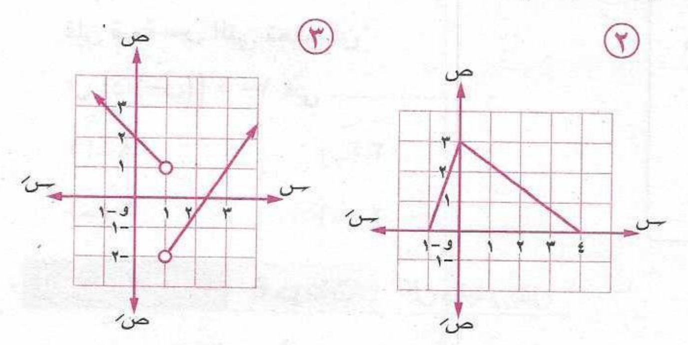
(٤) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ فإن : مجال د = ...

(أ) [-٢ ، ٢] (ب)]-٢ ، ٢[(جـ) [-٢ ، ٢[(د)]-٢ ، ٢]

السـؤال الثانى **٦ درجات** كل جزئية درجتان

ابحث اطراد كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية :





اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الأولى

الدرجة الكلية ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{س}$ ، ر (س) = $\sqrt{س}$ فإن : مجال (د . ر) = ...

(أ) ح − {٠} (ب) ح (جـ) $ح^+$ (د)]٠ ، ∞[

② إذا كانت : د (س) = س + ١ ، ر (س) = $س^٢$ فإن : (د ○ ر) (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٩

③ مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{٥ - س}$ يساوى ....

(أ) ح − {٥} (ب) $ح^+$ (جـ)]−∞ ، ٥] (د)]٥ ، ∞[

④ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س}$ ، ر (س) = $س^٢$ فإن : مجال (د ○ ر) = ...

(أ)]٠ ، ∞[(ب) ح (جـ) $ح^+$ (د) $ح^-$

⑤ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س - ١}$ ، ر (س) = $\sqrt{١ - س}$

فإن : مجال (د + ر) هو ....

(أ) [١ ، ∞[(ب)]−∞ ، ١] (جـ) [−١ ، ∞[(د) {١}

⑥ إذا كانت العلاقة بين $س$ ، د $(س)$ ، $ر(س)$

كما بالجدول المقابل لبعض قيم $س$

فإن قيمة $س$ التى تحقق أن

$ر\left(د(س)\right) = -١$ هى ....

(أ) ٨ (ب) ٣

(جـ) ٢ (د) ٤

$س$	د $(س)$	$ر(س)$
-١	-٢	٤
صفر	٠	٣
١	٢	٢
٢	٤	١
٣	٦	٠
٤	٨	-١

السـؤال الثانى ٤ درجات — كل جزئية درجتان

إذا كانت : د $(س) = \frac{١}{س}$ ، $ر(س) = س + ٣$

فأوجد : ① $(د \circ ر)(س)$ ② $(ر \circ د)(س)$

واذكر المجال فى كل من الحالتين.

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الأولى

الدرجة الكلية .... / ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت الدالة د زوجية فى $[أ ، ب]$ فإن : $ب =$ ....

(أ) أ (ب) $-أ$ (جـ) ٢ أ (د) $أ^٢$

② مجال الدالة د : د $(س) = \frac{٥}{\sqrt[٣]{س - ٨}}$ هو ....

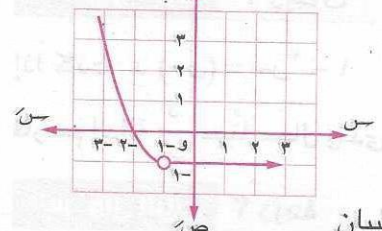
(أ) ح (ب) ح $- \{٢\}$ (جـ) ح $- \{٨\}$ (د) $]٨ ، \infty[$

③ الدالة الفردية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د $(س) = س$ جا $س$ (ب) د $(س) =$ جتا $س$

(جـ) د $(س) = ٥$ (د) د $(س) = س$ جتا $س$

④ الشكل المقابل يمثل دالة



مداها ....

(أ) ع - {-١}　　(ب) [-١ ، ∞[

(جـ)]-١ ، ∞[　　(د) ع

⑤ إذا كانت د دالة أحادية وكانت النقطة (٢ ، ٣) تنتمى لبيان الدالة د ، فأى النقط الآتية يمكن أن تنتمى لبيان د ؟

(أ) (٥ ، ٣)　　(ب) (٢ ، -١)　　(جـ) (٣ ، ٢)　　(د) كل ما سبق.

⑥ إذا كانت د (س) = $س^٣$ ، ر (س) = $س^٢$ + ١ فأى مما يأتى يكون دالة فردية ؟

(I) (د × ر)　　(II) (د ∘ ر)　　(III) (ر ∘ د)

(أ) I فقط　　(ب) II ، III　　(جـ) I ، II　　(د) I ، III

السؤال الثانى　٤ درجات

إذا كانت : $د_١$ (س) = $س^٥$ ، $د_٢$ (س) = جا س أوجد : ($د_١$ + $د_٢$) (س)

ثم ابحث نوع ($د_١$ + $د_٢$) من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.



اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول　٣ درجات

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = { |س| عندما س ≥ ٠ ، $س^٢$ عندما س < ٠ } ومن الرسم استنتج مدى الدالة

وبيِّن نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وادرس اطرادها.

السؤال الثانى　٢ درجة

أوجد مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٢س + ١}{س - ٢}$

وأثبت أن : د دالة أحادية.

السؤال الثالث **٣ درجات**

إذا كانت : د (س) = $س^٢$ − ١ ، ر (س) = س + ١

فارسم الدالة $\frac{د}{ر}$ مبيناً مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها.

السؤال الرابع **٢ درجة**

ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = $\begin{cases} س - ١ & ، ٢ < س \leq ٤ \\ -١ & ، -٢ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

ومن الرسم عين المدى.

الدرجة الكلية

....

١٠

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) منحنى الدالة د : د (س) = $س^٢$ + ٤ هو نفس منحنى الدالة ر : ر (س) = $س^٢$

بإزاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overrightarrow{وس}$ (جـ) $\overrightarrow{وص}$ (د) $\overleftarrow{وص}$

(٢) الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) $د_١$ (س) = س + ٢ (ب) $د_٢$ (س) = $س^٢$

(جـ) $د_٣$ (س) = | س | (د) $د_٤$ (س) = ٥

(٣) إذا كانت د دالة حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ فإن نقطة التماثل للدالة التى قاعدتها د (س + ١)

هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (−١ ، ٠) (د) (−١ ، ١)

(٤) إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س + ٤}$ ، ر (س) = $س^٢$ − ٤

فإن : (د ∘ ر) (س) = ...

(أ) | س | (ب) $س^٢$ (جـ) $س^٢$ + ٤ (د) ٢

⑤ إذا كانت د (س) دالة حقيقية مجالها [−٢ ، ٣] فإن مجال الدالة ر (س) = د (س − ٢) هو ....

(أ) [−٢ ، ٣]　(ب) [−٤ ، ١]　(جـ) [٠ ، ٥]　(د) ح

⑥ إذا كانت د (س) دالة فردية فإن | د (س) | تكون ....

(أ) فردية.　(ب) زوجية.

(جـ) زوجية وفردية معًا.　(د) ليست زوجية وليست فردية.

السـؤال الثانى　٤ درجات

مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = | ٤ − س٢ | ومن الرسم استنتج مدى الدالة وبيِّن نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك وادرس اطرادها.

الدرجة الكلية
....
١٠

اختبار 6 حتى درس 6 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول　٦ درجات　كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجال الدالة د : د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س - ٤}}$ هو ....

(أ) [٤ ، ∞[　(ب)]٤ ، ∞[　(جـ)]−∞ ، ٤]　(د)]−∞ ، ٤[

② الدالة د حيث د (س) = { ٢ عندما س > ٠ ، −٢ عندما س < ٠ } متماثلة بالنسبة للنقطة ....

(أ) (٢ ، ٠)　(ب) (−٢ ، ٠)　(جـ) (٠ ، ٠)　(د) (٢ ، −٢)

③ المساحة المحصورة بين منحنيى الدالتين د : د (س) = | س + ٣ | − ٢ ، ر : ر (س) = صفر هى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢　(ب) ٣　(جـ) ٤　(د) ٥

④ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د $(س) = س^{٢}$ (ب) د $(س) = |س|$

(جـ) د $(س) = \frac{١}{س}$ (د) د $(س) = ٣$

⑤ مجموعة حل المتباينة : $|س - ٢| \leq -٤$ فى ح هى ....

(أ) $]-٢ ، ٦[$ (ب) $[-٢ ، ٦]$ (جـ) ح (د) $\emptyset$

⑥ نفرض أن المنحنى د $(س) = -س^{٣}$ انتقل ٤ وحدات لليمين ووحدتين لأسفل وكان المنحنى الناتج هو ر $(س)$ فإن : ر $(-٢) =$ ....

(أ) -٢١٨ (ب) -٢٠ (جـ) ٦ (د) ٢١٤

السؤال الثانى ٤ درجات كل جزئية درجتان

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من :

① $\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩} + ٢س = ٩$ ② $\frac{١}{|٢س - ٣|} \geq ٢$

الدرجة الكلية ....

١٠

اختبار 7 حتى درس 1 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د دالة فردية فى الفترة $[أ ، ب]$ فإن : ب = ...

(أ) أ (ب) $-$أ (جـ) ٢أ (د) $أ^{٣}$

② نقطة تماثل الدالة د : د $(س) = (س - ٢)^{٣} + ١$ هى ....

(أ) $(٢ ، ١)$ (ب) $(-٢ ، ١)$ (جـ) $(٢ ، -١)$ (د) $(-٢ ، -١)$

③ مجموعة الحل للمعادلة : $\sqrt[٣]{س} = ٨$ فى ح هى ....

(أ) $\{٢\}$ (ب) $\{٤\}$ (جـ) $\{١٦\}$ (د) $\{٦٤\}$

④ مجموعة الحل للمعادلة : $س^{\frac{٢}{٣}} = ٢٥$ فى ح هى ....

(أ) $\{٥\}$　　(ب) $\{٥ ، -٥\}$

(جـ) $\{١٢٥\}$　　(د) $\{١٢٥ ، -١٢٥\}$

⑤ إذا كان : $٧^{س + ١} = ٣^{٢س + ٢}$ فإن : س = ...

(أ) −١　　(ب) ١　　(جـ) ٤　　(د) صفر

⑥ إذا كانت : $د_١(س) = ٣^{س}$ ، $د_٢(س) = ٩^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق أن

$د_١(٢س - ١) + د_٢(س + ١) = ٧٥٦$ هى ....

(أ) ٢　　(ب) ٤　　(جـ) ٦　　(د) ٧

السـؤال الثانى ٤ درجات *كل جزئية درجتان*

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

① $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ = ٠$

② $|س + ٢| = ٣س - ١٠$



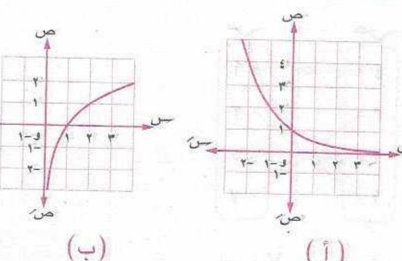
اختبـار 8 حتى درس 2 من الوحدة الثانية

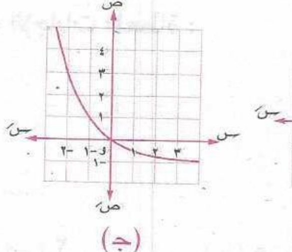
أجب عن الأسئلة الآتية :

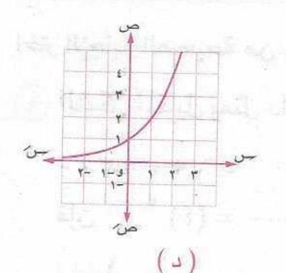
السـؤال الأول ٦ درجات *كل جزئية درجة*

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الدالة د حيث $د(س) = ٢^{س}$ يمثلها الشكل البيانى ....







(٢) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س}$ فإن نقطة التماثل للدالة التى قاعدتها د (س + ١) هى ....

(أ) (١ ، ٠) (ب) (٠ ، ١) (جـ) (-١ ، ٠) (د) (-١ ، ١)

(٣) مجموع جذور المعادلة : $س^٤ = ١٦$ يساوى ....

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) صفر (د) ± ٢

(٤) إذا كانت : د (س) = $أ^س$ ، أ > ١ فإن : د (س) > ١ عندما ....

(أ) س ∈ ح (ب) س ∈ $ح^+$ (جـ) س ∈ $ح^-$ (د) س ∈ ص

(٥) الدالة د : د (س) = $(٢ أ)^س$ تكون متناقصة عندما أ ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]١ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٢[(د)]٠ ، $\frac{١}{٢}$[

(٦) إذا كانت : د (س) = ٣ س + ١ ، ر (س) = $س^٢$ - ٣ فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) -٤

السـؤال الثانى ٤ درجات

يتكاثر النحل فى إحدى الخلايا فيزداد بمعدل ٢٥ ٪ كل أسبوع فإذا كان عدد النحل ٦٠ نحلة اكتب دالة أسية تمثل عدد النحل بعد ن أسبوع ثم قدر عدد النحل بعد ٦ أسابيع.

اختبـار 9 حتى درس 3 من الوحدة الثانية

الدرجة الكلية .... / ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الشكل المقابل يمثل دالة

د : س ⟵ ص

فإن : $د^{-١}$ (٤) = ...

س: ١ ، ٢ ، ٥ ، ٧ — ص: ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٧

② إذا كانت : $٣^{د(س)} = ٢س - ١$ فإن : $د^{-١}(٠) = $ ....

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٢ (د) ٥

③ منحنى ر : ر (س) = | س + ٣ | هو نفس منحنى د : د (س) = | س | بإزاحة مقدارها ٣ وحدات فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overrightarrow{وس}$ (جـ) $\overleftarrow{وص}$ (د) $\overrightarrow{وص}$

④ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س| - ٣}$ هو ....

(أ) {٣ ، -٣} (ب) [-٣ ، ٣]

(جـ) ح - [-٣ ، ٣] (د) ح - {-٣ ، ٣}

⑤ إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة $د^{-١}$ فى نقطة $(أ ، \frac{٤}{أ})$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ± ٢ (جـ) ٤ (د) ± ٤

⑥ إذا كانت : د (س) = $س^٢$ ، ر (س) = س - ٣ فإن مجموعة حل المعادلة :
ر (د (س)) = $ر^{-١}$ (س) فى ح هى ....

(أ) {٢ ، -٣} (ب) {٣} (جـ) {٣ ، -٢} (د) {٢ ، ٣}

السؤال الثانى **٤ درجات** كل جزئية درجتان

إذا كانت د دالة بحيث د (س) = $\frac{٢س + ٣}{س + ١}$ **فأوجد :**

① مجال ومدى د ② $د^{-١}$ (س) وعين مجال ومدى $د^{-١}$

الدرجة الكلية
....
١٠

اختبار 10 حتى درس 4 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $لو_{س} ٤ = ٢$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ± ٢ (جـ) ٢ (د) -٢

② مجال الدالة د : د (س) = لو $_{1-س}$ س هو ....

(أ) س > ٠ (ب) س < ١ (جـ) ٠ < س < ١ (د) ٠ ≤ س ≤ ١

③ إذا كانت : د (س) = ٦ س فإن : د$^{-1}$ (س) = ...

(أ) ٦ س (ب) $\frac{٦}{س}$ (جـ) $\frac{س}{٦}$ (د) س − ٦

④ مجموعة حل المعادلة : |س − ٣| + ١ = ٠ فى ح هى ....

(أ) ح (ب) {−١} (جـ) ∅ (د) {٤}

⑤ إذا كانت د (س) = لو$_{ا}$ (٢ س + ٤) وكانت د$^{-1}$ (٥) = ١٤ فإن : ا = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑥ حاصل ضرب جذرى المعادلة : س^{٢} − ٣ |س| − ١٠ = ٠ يساوى ....

(أ) −٢٥ (ب) −١٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

السؤال الثانى **٤ درجات** كل جزئية درجتان

حل فى ح المعادلتين الآتيتين :

① لو $_{٤}$ لو $_{٢}$ لو $_{٣}$ (س + ١) = ٠ ② $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{|س - ٢|} = ٣ \frac{٣}{٨}$

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 11 حتى درس 5 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① المقدار $\frac{٣ \text{ لو } ٢}{\text{لو } ٤ + \text{لو } ٣}$ يكافئ ....

(أ) لو $_{٣}$ ٢ (ب) لو $_{٧}$ ٢ (جـ) لو $_{١٢}$ ٨ (د) لو $_{٧}$ ٨

② إذا كان منحنى ص = لو $_{٤}$ (١ − ا س) يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢}\right)$ فإن : ا = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

③ إذا كانت : د (س) = ٣ س + ١ ، ر (س) = $س^٢$ − ٥

فإن : (ر ∘ د) (−٣) = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٥٩ (د) −٩٥

④ إذا كانت : ص = $\sqrt[٣]{س}$ لكل س ≥ ٠ فإن الدالة العكسية لها ص = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ $س^٣$ (ب) $س^٣$ (جـ) $س^٣$ − ١ (د) $س^{-\frac{١}{٣}}$

⑤ إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : ٣ $س^٢$ − ١٦ س + ١٢ = ٠

فإن : $لو_٢$ ل + $لو_٢$ م = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٢ (د) ١٦

⑥ $\frac{١}{١ + لو_ب ء + لو_ب حـ} + \frac{١}{١ + لو_حـ ء + لو_حـ ب} + \frac{١}{١ + لو_ء ب + لو_ء حـ}$ = ...

(أ) $لو_ء$ ب حـ (ب) $لو_ب$ ء حـ (جـ) $لو_حـ$ ء ب (د) ١

السـؤال الثانى ٤ درجات

إذا كان : لو (س + ص) = $\frac{١}{٢}$ (لو س + لو ص) + لو ٢

أثبت أن : س = ص

الدرجة الكلية
......
١٠

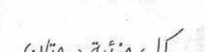
اختبـار 1 على درس 1 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول ٤ درجات كل جزئية درجة

من الشكل المقابل أوجد :

(١) د (صفر$^+$)   (٢) د (صفر$^-$)

(٣) د (٢)   (٤) 
نهـا د (س) عندما س ← ٢

السـؤال الثانى ٦ درجات كل جزئية درجتان

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الشكل المقابل هو التمثيل البيانى للدالة د

فإن : نهـا د (س) عندما س ← ١ = ...

(أ) ٢   (ب) ٣

(جـ) ١   (د) غير موجودة.

(٢) فى الشكل المقابل :

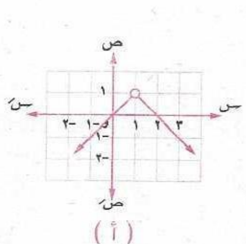
عندما $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{٢}$

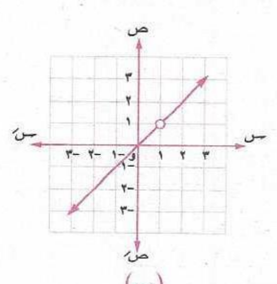
فإن : ص ⟵ .... سم

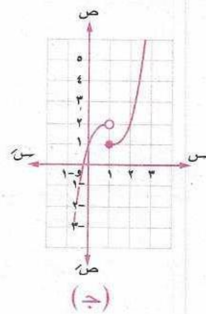
(أ) صفر   (ب) ٥

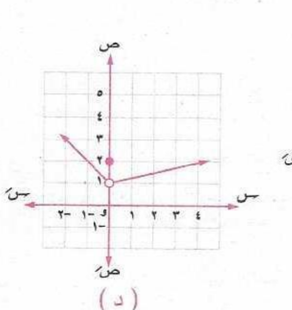
(جـ) ١٠   (د) $١٠\sqrt{٢}$

(٣) أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ليس لها نهاية عند س = ١ ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)



اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٢ درجة — كل جزئية نصف درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ + س}{٤ س - ١} = \dots\dots\dots$

(أ) -١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{-١}{٤}$ (د) ١

② $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = \dots\dots\dots$

(أ) -٦ (ب) صفر (جـ) ٣ (د) ٦

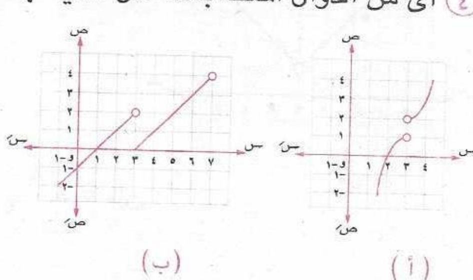
③ الشكل البيانى المقابل يمثل د (س)

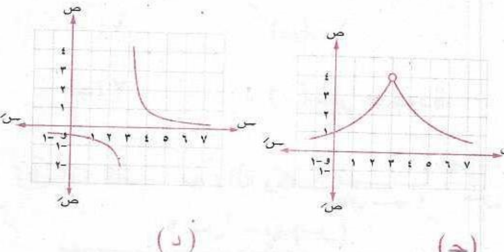
فإن : $\lim\limits_{س \to ٢}$ د (س) = ...

(أ) ٠ (ب) -٢

(جـ) ٢ (د) غير موجودة.

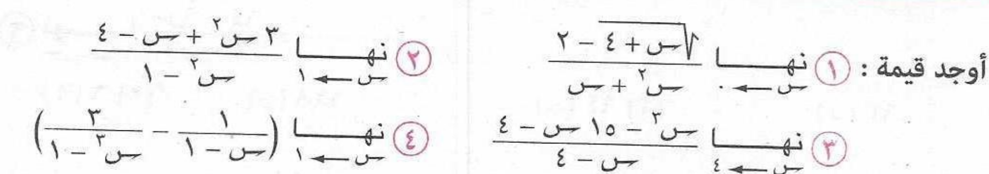
④ أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية لها نهاية عند س = ٣ ؟





(أ) (ب) (جـ) (د)

السؤال الثانى ٨ درجات — كل جزئية درجتان



أوجد قيمة : ① $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{س^٢ + س}$ ② $\lim\limits_{س \to ١} \frac{٣ س^٢ + س - ٤}{س^٢ - ١}$

③ $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١٥ س - ٤}{س - ٤}$ ④ $\lim\limits_{س \to ١} \left(\frac{١}{س - ١} - \frac{٣}{س^٣ - ١}\right)$

الدرجة الكلية



١٠

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{٧} - ١}{س - ١} =$ ....

(أ) ٧٠ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) صفر

② $\underset{س \to أ}{\text{نها}} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} =$ ....

(أ) $\frac{م}{ن}$ (ب) $\frac{م}{ن} (أ)^{م - ن}$ (جـ) $\frac{ن}{م} (أ)^{م - ن}$ (د) $\frac{ن}{م} (أ)^{ن - م}$

③ $\underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \frac{(س + هـ)^{٥} - س^{٥}}{هـ} =$ ....

(أ) $س^{٥}$ (ب) $٥ س^{٤}$ (جـ) صفر (د) ١

④ في الشكل المقابل :

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} د(س) =$ ....

(أ) ١ (ب) −١

(جـ) ٢ (د) غير موجودة.

⑤ إذا كانت : ن دالة وكانت $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{ن(س) - ٨}{س - ٢} = ٧$ فإن :

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{٢ س^{٢} - ن(س)}{س - ٢} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٥

⑥ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{٦} - ٦٤}{س - ٢} =$ ....

(أ) $٦ (٢)^{٥}$ (ب) ١٢٨ (جـ) $٦٤ (٢)^{٥}$ (د) ٦٣

السؤال الثانى **٤ درجات** كل جزئية درجتان

أوجد قيمة :

(١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^{٧} - ١٢٨}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١٠}$

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to -٢} \dfrac{(\text{س} + ٣)^{٥} - ١}{\text{س} + ٢}$

الدرجة الكلية



اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٢ درجة** كل جزئية نصف درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{س}^{-٣} + ٣\text{س}^{-٢} + ١}{\text{س}^{-٢} + \text{س}^{-١} + ٣} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) $\frac{١}{٣}$

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س}^{٢} - ٩} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $٤\frac{١}{٢}$ (جـ) ٣ (د) ٢٧

(٣) إذا كانت : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤\text{أ}}{\text{س} - ٢}$ لها وجود فإن : أ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٤) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} (٤ + ٣\text{س} - \text{س}^{٣}) =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ∞ (د) $-\infty$

السؤال الثانى **٨ درجات** كل جزئية درجتان

أوجد قيمة :

(١) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{١}{\text{س}} \sqrt{٣ + ٤\text{س}^{٢}}$

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{س} \left(\sqrt{٤\text{س}^{٢} + ١} - ٢\text{س}\right)$

(٣) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{س}^{٧} + ٥}{٣\text{س}^{٤} - ٨}$

(٤) $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \dfrac{(\text{س} - ٣)^{٧} - ١}{\text{س} - ٤}$

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① نهـــا (س ← ٠) ٢ س قتا ٤ س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) صفر

② نهـــا (س ← ∞) $\frac{س^٣ + ٥}{س (٢ س^٢ + ٣)}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

③ نهـــا (س ← ٠) $\frac{٢ س + جا ٣ س}{طا ٥ س}$ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٦}{٥}$ (جـ) ١ (د) صفر

④ نهـــا (س ← ٠) $\frac{٥ - ٥ جتا س}{س}$ = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٥ (جـ) صفر (د) ٢

⑤ إذا كان : أ < ب < صفر فإن : نهـــا (س ← ∞) $\frac{س^أ}{س^ب}$ = ...

(أ) ∞ (ب) − ∞ (جـ) صفر (د) أ − ب

⑥ نهـــا (س ← ٠) $\frac{جا س + جا ٢ س + جا ٣ س + جا ٤ س}{طا س + طا ٢ س + طا ٣ س + طا ٤ س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ١٠

السؤال الثانى ٤ درجات كل جزئية درجتان

أوجد قيمة :

① نهـــا (س ← ٠) $\frac{س^٢ + جا ٣ س^٢}{س طا ٢ س}$

② نهـــا (س ← ٠) $\frac{\sqrt{س + ٤} - ٢}{س^٢ + س}$



اختبار 6 حتى درس 6 من الوحدة الثالثة

الدرجة الكلية ...... / ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : $د(س) = س^{٢}$ فإن : $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}\ د(د(س)) =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٣٢

② $\underset{س \leftarrow ٩}{نهـا} \dfrac{٣ - \sqrt{س}}{٢٧ - \sqrt{س^{٣}}} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٩}$ (ب) $\frac{١}{٢٧}$ (جـ) ٣ (د) $-\frac{١}{٢٧}$

③ إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} أ\ جتا\ س + \dfrac{١٥\ جا\ س}{س} & ،\ س > ٠ \\ \dfrac{س^{٦} - ٦٤}{س^{٣} - ٨} & ،\ س < ٠ \end{cases}$

وكانت د لها نهاية عندما $س = ٠$ فإن : $أ =$ ....

(أ) -٧ (ب) ٨ (جـ) -١ (د) ١

④ إذا كانت : $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \dfrac{أ\ س + ٦}{٢\ س - ٧} = ٤$ فإن : $أ =$ .... حيث $أ \in ح$

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

⑤ إذا كانت د دالة زوجية وكانت $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}\ د(س) = ٥$ أى الجمل الآتية صحيح ؟

(أ) $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا}\ د(س) = ٥$ (ب) $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا}\ د(س) = -٥$

(جـ) $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا}\ د(س) =$ صفر (د) $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا}\ د(س) = -٢$

⑥ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : $\lim_{س \to ٢}$ | د (س) | = ...

(أ) −١ (ب) صفر

(جـ) ١ (د) غير موجودة.

السؤال الثانى ٤ درجات

ابحث وجود $\lim_{س \to ٢}$ د (س) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٧س + ١٢}{س - ٣} & ، س > ٣ \\ ٢س - ٧ & ، س < ٣ \end{cases}$

الدرجة الكلية

....

١٠

اختبار 7 حتى درس 7 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الدالة د : د (س) = ٤ $س^{-٣}$ + $\frac{س}{س^٢ - ٩}$ متصلة لكل س ∈ ....

(أ) ح (ب) ح − {٠}

(جـ) ح − {٣ ، −٣} (د) ح − {٣ ، −٣ ، ٠}

② إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٨ - أ^٨}{س^٥ - أ^٥} & ، س \neq أ \\ ٢٠٠ & ، س = أ \end{cases}$

متصلة عند س = أ فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٨}{٥}$ (جـ) ١٢٥ (د) $\frac{١}{٥}$

③ الدالة د : د (س) = $\frac{س + ٢}{\sqrt{س - ٢}}$ متصلة لكل س ∋ ....

(أ)]٤ ، ∞[(ب)]٠ ، ∞[(جـ)]٠ ، ∞[− {٤} (د)]−∞ ، ٢[

④ إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} \frac{|س|}{س} + ٦ &، س > ٠ \\ ٢^{أ} + جا ٣ س &، س \leq ٠ \end{cases}$ متصلة عند س = ٠

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ± $\sqrt{٦}$ (جـ) ± ٢ (د) ± $\sqrt{٥}$

⑤ إذا كانت د دالة أحادية كثيرة حدود وكانت $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ٣

فإن : $\lim_{س \to ٣}$ د$^{-١}$ (س) = ...

(أ) −٢ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) ٣

⑥ $\lim_{س \to ٠} \frac{س جا ٢ س + جا ٣ س^{٢}}{طا^{٢} ٣ س + س^{٢}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) $\frac{١١}{١٠}$

السؤال الثانى ٤ درجات

ابحث اتصال الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٣ &، س \leq ١ \\ \frac{س^{٢} + ٢ س - ٣}{س - ١} &، س > ١ \end{cases}$

عند س = ١

ثالثًا اختبـارات تراكميـــة قصيـــرة فـــى حساب المثلثات

الدرجة الكلية
....
١٠

اختبـار 1 على درس 1 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة ونصف

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ = ٦ سم ، ق(∠ب) = ٢ ق(∠أ) = ٨٠°

فإن : حـ = ... سم.

(أ) $\frac{٦ \text{ حا } ٤٠°}{\text{حا } ٦٠°}$ (ب) $\frac{\text{حا } ٦٠°}{٦ \text{ حا } ٤٠°}$ (جـ) $\frac{\text{حا } ٤٠°}{٦ \text{ حا } ٦٠°}$ (د) $\frac{٦ \text{ حا } ٦٠°}{\text{حا } ٤٠°}$

② إذا كان : أ ب حـ مثلثًا متساوى الأضلاع طول ضلعه يساوى $٨\sqrt{٣}$ سم فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث يساوى .... سم.

(أ) ٨ (ب) $١٦\sqrt{٣}$ (جـ) ١٦ (د) $٤\sqrt{٣}$

③ فى المثلث س ص ع إذا كان : $\frac{٢ س}{\text{حا س}} = ٨$ سم

فإن مساحة الدائرة المارة برؤوسه تساوى .... سم^{٢}.

(أ) ١٦ π (ب) ٨ π (جـ) ٤ π (د) ٦٤ π

④ إذا كان : أ ب حـ مثلثًا فإن : $\frac{\text{حا }(أ + ب)}{\text{حا أ} + \text{حا ب}} = $ ....

(أ) ١ (ب) $\frac{حـ}{أ + ب}$ (جـ) $\frac{أ}{أ + حـ}$ (د) $\frac{ب}{أ + حـ}$

السـؤال الثانى **٤ درجات**

أ ب حـ مثلث فيه : حـ = ١٩ سم ، ق(∠أ) = ١١٢° ، ق(∠ب) = ٣٣°

أوجد لأقرب رقمين عشريين كلًا من : ب ، طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث.

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى المثلث س ص ع إذا كان : $\frac{\text{جا س}}{٣} = \frac{\text{جا ص}}{٤} = \frac{\text{جا ع}}{٥}$

فإن قياس أكبر زاوية فى المثلث يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٧٥° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(٢) فى Δ أ ب حـ يكون $\frac{أ}{أ + ب} = $ ....

(أ) $\frac{\text{جا أ}}{\text{جا ب}}$ (ب) $\frac{\text{جا أ}}{\text{جا حـ}}$ (جـ) $\frac{\text{جا أ}}{\text{جا أ} + \text{جا ب}}$ (د) $\frac{\text{جا أ}}{\text{جا أ} + \text{جا حـ}}$

(٣) طول قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٨ جا أ سم يساوى .... سم.

(أ) ٤ (ب) ٨ جا أ (جـ) ٨ (د) ٥

(٤) المثلث س ص ع فيه : س = ص ، $\frac{ع^٢ - ٢ س^٢}{س^٢} = ١$ فإن : ق(∠ ع) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٥) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا مساحته ٢٤ سم^٢ وكان طول نصف قطر الدائرة الخارجة عنه ٥ سم

فإن : جا أ جا ب جا (أ + ب) = ...

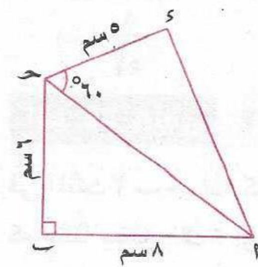
(أ) $\frac{٣}{٢٥}$ (ب) $\frac{٦}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

(٦) فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق(∠ أ) = ٦٠°

فإن : $\left(١ + \frac{أ}{حـ} + \frac{ب}{حـ}\right)\left(١ + \frac{حـ}{ب} - \frac{أ}{ب}\right) = $ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

السؤال الثانى ٤ درجات



فى الشكل المقابل :

أ ب حـ د شكل رباعى فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم

، ق(∠ ب) = ٩٠° ، د حـ = ٥ سم ، ق(∠ أ حـ د) = ٦٠°

أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ د حـ

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) عدد حلول المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (∠ أ) = ٦٠° ، أ = ٧ سم ، حـ = ٩ سم هو ....

(أ) واحد. (ب) اثنان. (جـ) صفر. (د) ثلاثة.

(٢) إذا كان نق هو طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ

فإن : $\frac{أ}{٢ \text{ جا } أ}$ = ...

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\frac{1}{2}$ نق (د) نق^{٢}

(٣) فى المثلث أ ب حـ إذا كان : أ = حـ فإن : جتا حـ = ...

(أ) $\frac{٢ ب}{حـ}$ (ب) $\frac{حـ}{٢ ب}$ (جـ) $\frac{ب}{٢ أ}$ (د) $\frac{حـ}{٢ أ}$

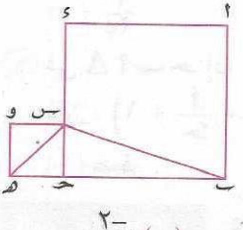
(٤) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٦ سم ، ١٠ سم ، ١٤ سم يساوى ....

(أ) ١٢٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ١٣٥° (د) ٦٠°

(٥) إذا كانت مساحة المثلث أ ب حـ = ١٢ سم^{٢} فإن : (ب^{٢} + حـ^{٢} − أ^{٢}) طا أ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٦

(٦) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء ، س حـ هـ و مربعان

إذا كان : ب حـ = ٣ حـ هـ

فإن : جا (∠ ب س هـ) = ...

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ (جـ) $\frac{-١}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$

السؤال الثانى ٤ درجات

فى المثلث أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) = ٤٠° ، أ = ٢٤ سم ، ب = ٣٠ سم

كم مثلثًا يحقق ذلك ؟ أوجد حـ إذا كان ممكنًا فى كل حالة.



الاختبـارات الشهرية



أولًا : نماذج اختبارات شهر أكتوبر.

ثانيًا : نماذج اختبارات شهر نوفمبر.

محتوى امتحان شهر أكتوبـر

الجبـر

من : الوحدة الأولى - درس (١) : الدوال الحقيقية.

إلى : نهاية درس التمثيل البيانى للدوال والتحويلات الهندسية.

التفاضل

من : الوحدة الثالثة - درس (١) : مقدمة فى النهايات.

إلى : نهاية درس إيجاد نهاية الدالة جبريًا.

حساب المثلثات

إلى : الوحدة الرابعة - نهاية درس (١) : قاعدة الجيب.

محتوى امتحان شهر نوفمبر

الجبـر

من : حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

إلى : الدالة الأسية وتطبيقاتها وحل المعادلات الأسية.

التفاضل

من : نظرية (٤) القانون
«الوحدة الثالثة الدرس رقم (٣)».

إلى : نهاية الدالة عند اللانهاية
«الوحدة الثالثة الدرس رقم (٤)».

حساب المثلثات

قانون جيب التمام «قاعدة جيب التمام»

«الوحدة الرابعة الدرس رقم (٢)».

الدرجة

٢٠

اختبار ١

(١٢ درجة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\underset{س \leftarrow ٢}{نهــا} \frac{س^{٢} - ٥ س + ٦}{س^{٢} - ٩} = ...$

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٢) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٤}$ هو ....

(أ) [٢ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٢]

(جـ) [٢ ، ∞[- {٤} (د)]-∞ ، ٢] - {٤}

(٣) جميع الدوال الآتية أحادية على مجالها ما عدا الدالة د (س) = ...

(أ) ٣ س (ب) $\frac{١}{س}$ (جـ) ٥ (د) $س^{٣}$

(٤) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ يساوى ٣ سم

وكان جا أ + جا ب + جا جـ = ٢ فإن محيط المثلث = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٥) طول أكبر ضلع فى المثلث المرسوم ≃ .... سم.

(لأقرب عدد صحيح)

أ

٣٥° ٨٠°

جـ ١٤ سم ب

(أ) ٢٠ (ب) ١٦

(جـ) ١٥ (د) ١٤

(٦) إذا كانت : $\underset{س \leftarrow ١}{نهــا} \frac{س^{٢} - ك}{س + ٢} = -١$ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ± ٢

(٧) الدالة د : د (س) = | س + ٢ | تكون تناقصية فى الفترة ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب) [٢ ، ∞[(جـ)]-٢ ، ∞[(د)]-∞ ، -٢[

(٨) إذا كانت د دالة فردية فإن : $\frac{٧ د (٣) + ٣ د (-٣)}{٢ د (-٣)}$ = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ٥ (د) -٥ , ٠

(٩) إذا كانت : د (س) = س - ٣ ، ر (س) = $س^٢$ فإن : (د ∘ ر) (٥) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٢٢ (د) ٢٥

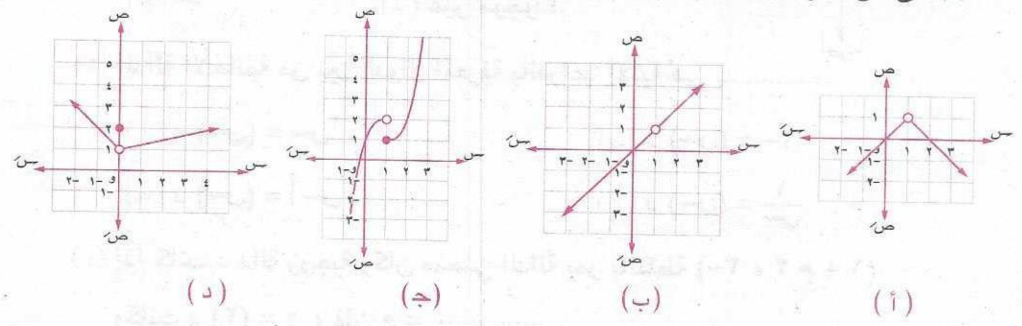
(١٠) نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = $\frac{س + ١}{س}$ هى ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (١ ، -١)

(١١) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(١٢) أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ليس لها نهاية عند س = ١ ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ & ، س > ٠ \\ -س^٢ - ١ & ، س < ٠ \end{cases}$

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها. (درجتان)

(٢) إذا كان : د (س) = $س^٢$ - ٣ ، ر (س) = $\sqrt{س - ٢}$

أوجد (د ∘ ر) (س) فى أبسط صورة محددًا المجال ثم أوجد (د ∘ ر) (٣) (درجتان)

(٣) أوجد : $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٤س + ٥} - ٣}{س - ١}$ (درجتان)

(٤) أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٧٠°

، ب ء = ٨ سم أوجد محيط متوازى الأضلاع لأقرب سم. (درجتان)

اختبار ٢

الدرجة
....
٢٠

(١٢ درجة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى المثلث أ ب حـ يكون $\frac{٤ ب}{جا ب}$ = ... نق

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٨}$

(٢) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن : نهــا د (س) = ...
س ← ٢

(أ) ٣ (ب) ١

(جـ) –١ (د) غير موجودة.

(٣) الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = $س^٢$ (ب) د (س) = –٢

(جـ) د (س) = |س| (د) د (س) = $\frac{١}{س}$

(٤) إذا كانت د دالة زوجية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (–٣ ، ٢ م + ١)

وكانت د (٣) = ٥ ، فإن م = ...

(أ) صفر (ب) –١ (جـ) ١ (د) ٢

(٥) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٣}$ ....

(أ) ح (ب) ح – {٣} (جـ) [٣ ، ∞[(د)]–∞ ، ٣]

(٦) إذا كانت د (س) = $\sqrt{س}$ ، ر (س) = $س^٢$ – ١

فإن : (د ∘ ر) (–٣) = ...

(أ) ٢ (ب) –٤ (جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ (د) غير معرفة.

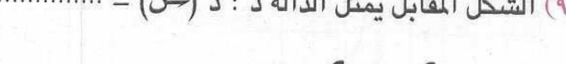
(٧) نهــا $\frac{س^٢ - ٤٩}{٧ - س}$ = ...
س ← ٧

(أ) ١٤ (ب) –٤٩ (جـ) ٤٩ (د) –١٤

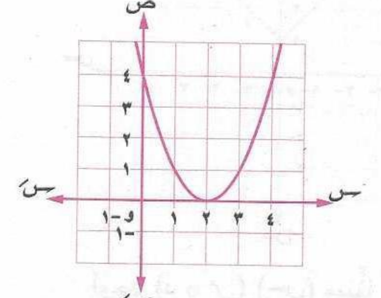
(٨) نقطة تماثل الدالة د : د (س) = (س − ٢)^{٣} + ١ هى ....

(أ) (٢ ، ١)　　(ب) (٢ ، −١)　　(جـ) (−٢ ، ١)　　(د) (−١ ، −٢)

(٩) الشكل المقابل يمثل الدالة د : د (س) = ...



حيث د : ح ⟵ ح



(أ) س^{٢} + ٢

(ب) (س + ٢)^{٢}

(جـ) س^{٢} − ٤ س + ٤

(د) − (س − ٢)^{٢}

(١٠) إذا كان : نهـا$_{س ⟵ ٣}$ $\frac{س^{٢} − ل}{س − ٣}$ = م　　فإن : (ل ، م) = ...

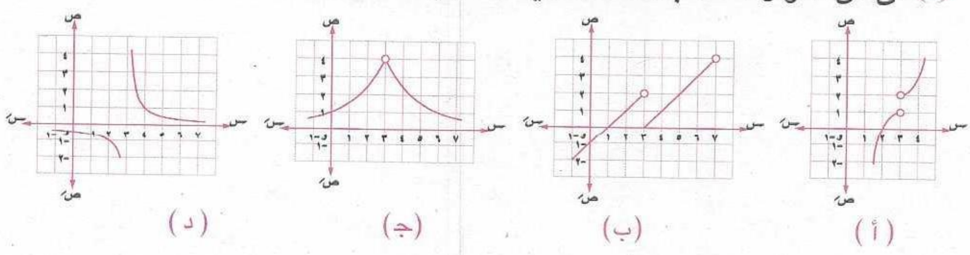
(أ) (٣ ، ٣)　　(ب) (−٩ ، ٠)　　(جـ) (٩ ، ٦)　　(د) (٠ ، ٠)

(١١) فى Δ س ص ع إذا كان ق (∠ س) : ق (∠ ص) : ق (∠ ع) = ٢ : ٣ : ١

فإن : سَ : صَ : عَ = ...

(أ) ٣ : $\sqrt{٢}$: ١　　(ب) $\sqrt{٣}$: ٢ : ١　　(جـ) $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$: ١　　(د) ٢ : ٣ : ١

(١٢) أى من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية لها نهاية عند س = ٣ ؟



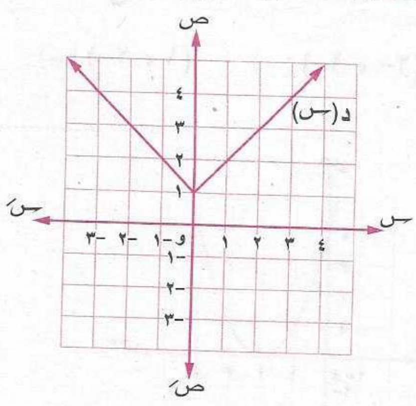
(أ)　　(ب)　　(جـ)　　(د)

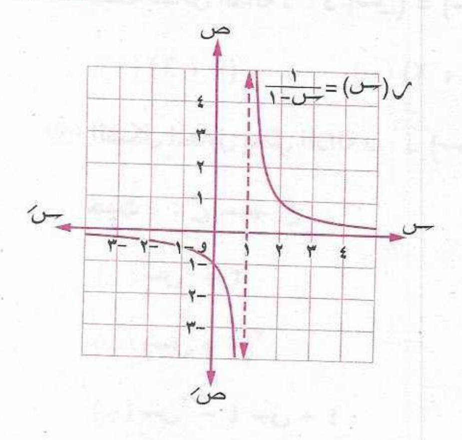
---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ ح ، د (س) = |س| + ١ ومن الرسم أوجد المدى وابحث الاطراد وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.　(درجتان)

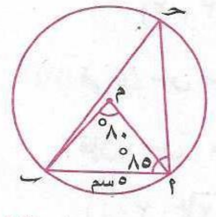
(٢) من الشكلين التاليين : (درجتان)





أوجد (د ∘ ر) (س) مبيناً المجال.

(٣) أوجد : $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س + ١١} - ٤}{س^٢ - ٢٥}$ (درجتان)



(٤) فى الشكل المقابل :

م دائرة ، أب = ٥ سم ، ق (∠ أ م ب) = ٨٠°

، ق (∠ حـ أ ب) = ٨٥°

أوجد : (١) محيط Δ أ ب حـ

(٢) مساحة سطح الدائرة م (درجتان)



نماذج اختبارات شهر نوفمبر

اختبـــار ١

الدرجة

٢٠

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

(١) مجموعة الحل فى ح للمعادلة : | س − ٧ | = ٢ س − ٢ تساوى ....

(أ) {٣ ، −٥} (ب) {٣} (جـ) {−٥} (د) ∅

(٢) الدالة د حيث د (س) = $أ^{س}$ تكون تناقصية على مجالها إذا كان ....

(أ) أ = ١ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = −١

(٣) نهـــا (س ← ٠) ٥ س ظتا ٢ س = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ١٠ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) صفر

(٤) نهـــا (هـ ← ٠) $\frac{(٢ - ٣ هـ)^{٧} - ١٢٨}{٤ هـ}$ = ...

(أ) −٣٣٦ (ب) ٣٣٦ (جـ) ١٩٢ (د) −١٩٢

(٥) إذا كانت : $٣^{س - ٢} = ٢^{س - ٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) ٢

(٦) نهـــا (س ← ∞) $\frac{\sqrt{٩ س^{٢} + ٤} + ٥ س}{٤ س + ٣}$ = ...

(أ) ∞ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢

(٧) إذا كانت : د (س) = $٢^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق المعادلة :

د (س + ١) − د (س − ١) = ٢٤ تساوى ....

(أ) ١٦ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٢

(٨) نهـــا (س ← ٠) $\frac{ظا ٢ س + ٥ ظا ٣ س}{س}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١٥ (جـ) ٢١ (د) ١٧

(٩) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم يساوى ....

(أ) ١٥٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

(١٠) مجموعة حل المتباينة : |٢ س − ٦| + |٣ − س| > ١٢ هى ....

(أ)]−١ ، ٧[(ب) ح − [−٣ ، ٩]

(جـ) ح − [−١ ، ٧] (د)]−٣ ، ٩[

(١١) فى الشكل المقابل :

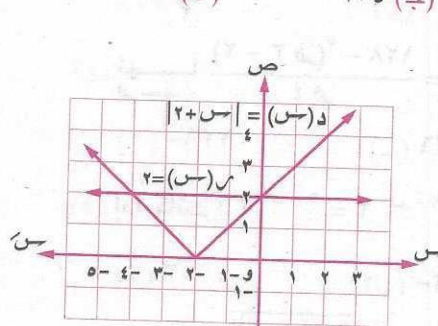
$\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، ق(∠أ حـ ب) = ٣٠° ، ب حـ = ٢٠ سم

، ق(∠أ ء حـ) = ١٠٠° ، أ ء = ١٢ سم

فإن : مساحة Δ أ ب حـ = ... سم^٢ تقريبًا.

(أ) ٦٠ (ب) ٧٧ (جـ) ١٠٤ (د) ١٢٠

(١٢) فى الشكل المقابل :



مجموعة حل المتباينة د (س) < ر (س)

فى ح هى ....

(أ) {−٤ ، ٠}

(ب) [−٤ ، ٠]

(جـ) ح − [−٤ ، ٠]

(د)]−٤ ، ٠[

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) أوجد قيمة أ إذا كان : $\lim_{س \to أ} \frac{س^{١٢} - أ^{١٢}}{س^{١٠} - أ^{١٠}} = ٣٠$ (درجتان)

(٢) أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{١}{٣}$ جا أ = $\frac{١}{٤}$ جا ب = $\frac{١}{٥}$ جا حـ

أوجد : ق (∠ حـ) وإذا كان محيط المثلث = ٢٤ سم أوجد مساحته. (درجتان)

(٣) أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ =$ صفر (درجتان)

(٤) أوجد جبريًا فى ح مجموعة حل المعادلة : |س − ٣| = |٩ − ٢ س| (درجتان)

الدرجة
20

اختبار 2

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

(١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٣٢}{س^٢ + ٣س - ١٠} = \dots\dots\dots$

(أ) ٨٠ (ب) $\frac{٨٠}{٧}$ (جـ) $\frac{١٦}{٧}$ (د) ١٦

(٢) مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤} > ٠$ فى ح هى ....

(أ) ح − {٢} (ب) ح − {−٢} (جـ) ح (د) ∅

(٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س + ٣}{٥س^٢ + ٤} = \dots\dots\dots$

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

(٤) مجال الدالة د : د(س) = $\frac{١}{|س| - ٣}$ هو ....

(أ) {٣ ، −٣} (ب) [−٣ ، ٣]

(جـ) ح − [−٣ ، ٣] (د) ح − {−٣ ، ٣}

(٥) إذا كان : د(س) = $٢^س$ فإن : $\frac{د(س + ١) + د(س)}{د(س - ١)} = \dots\dots\dots$

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٨

(٦) إذا كان : $(٢س - ١)^٤ = ٨١$ فإن : س ∋ ....

(أ) {١} (ب) {١ ، −٢} (جـ) {٢} (د) {−١ ، ٢}

(٧) فى أى Δ س ص ع يكون : $سَ^٢ + صَ^٢ - ٢ سَ صَ$ جا (٩٠° − ع) = ...

(أ) $سَ^٢$ (ب) $صَ^٢$ (جـ) $عَ^٢$ (د) عَ

(٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢س \text{ جتا } ٨س + ٢ \text{ جا } ٥س}{\text{ظا } ٢س} = \dots\dots\dots$

(أ) ١٣ (ب) ١٠ (جـ) ٩ (د) ٦

(٩) إذا كان : د(س) = |س − ٢| + ٤ فإن مجموعة حل المعادلة د(س + ٢) = ٦

هى ....

(أ) {٠ ، ٤} (ب) {٢ ، −٢} (جـ) {٢ ، ٤} (د) {−٢ ، −٤}

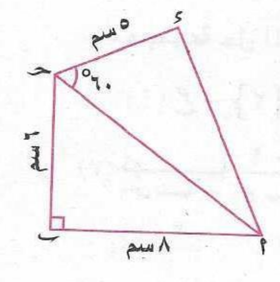
(١٠) مجموعة حل المعادلة : $٣^{س+١} + ٣^{س} = ٣٦$ فى ح هى ....

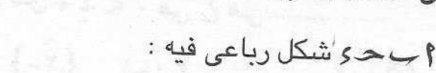
(أ) $\{٠\}$ (ب) $\{١\}$ (جـ) $\{٢\}$ (د) $\{٠ ، ٢\}$

(١١) $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)^٥ - ٣٢}{س} = $ ....

(أ) ٢٥ (ب) ٦٤ (جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

(١٢) فى الشكل المقابل :




أ ب حـ ء شكل رباعى فيه :

أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٩٠°

، ء حـ = ٥ سم ، ق (∠ أ حـ ء) = ٦٠°

فإن مساحة الدائرة المارة

برؤوس Δ أ ء حـ = ... سم^٢

(أ) ٩ π (ب) ١٦ π (جـ) ٢٥ π (د) ٤٩ π

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان : د (س) = $٥^{س}$

فأوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : د (س) + د (س − ١) = ١٥٠ (درجتان)

(٢) أوجد مجموعة حل المتباينة : $\frac{١}{|س - ٢|} \geq ٥$ (درجتان)

(٣) أوجد : $\lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{\sqrt{س + ١} - ١}$ (درجتان)

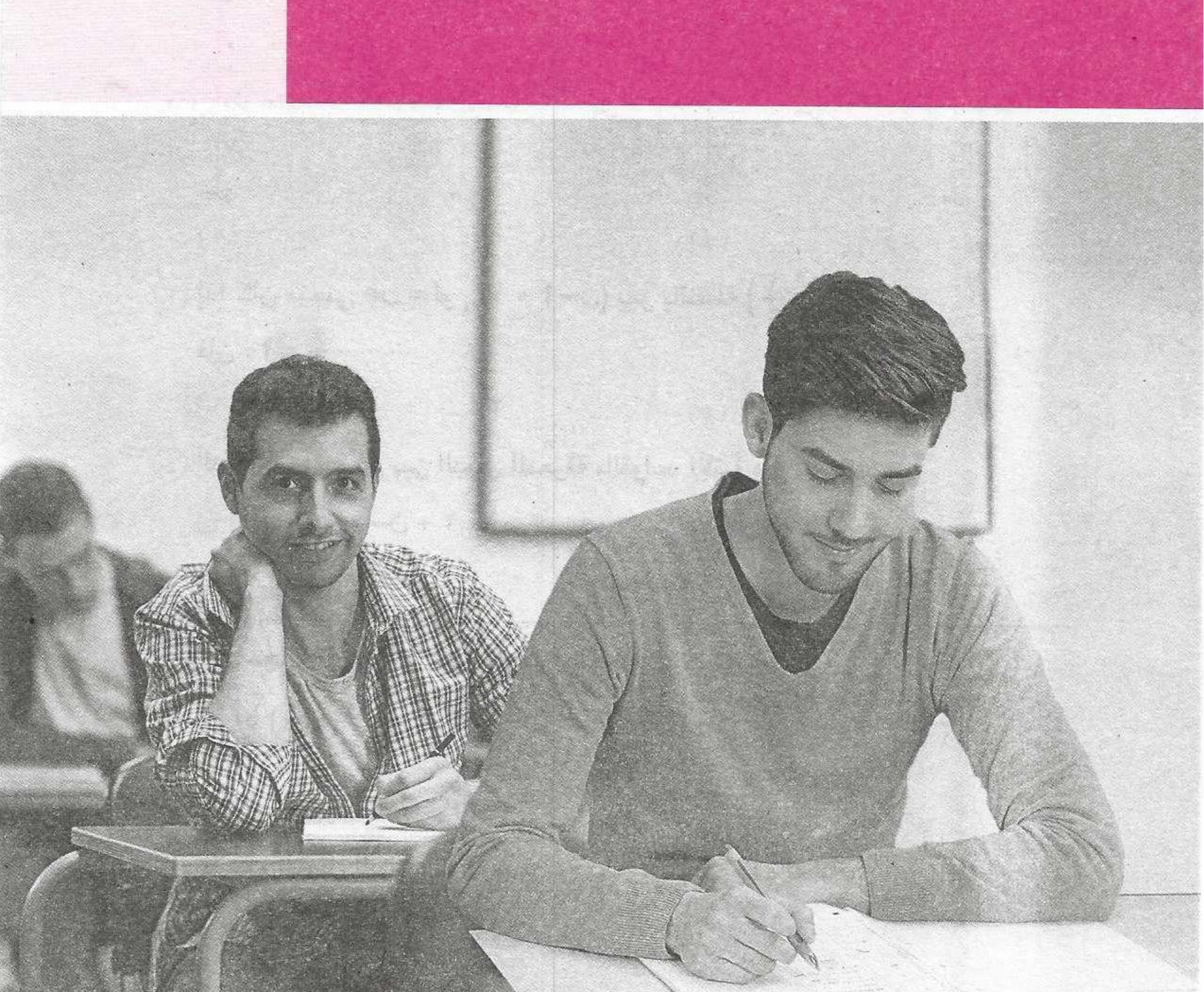
(٤) أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٣ سم ، أ حـ = ٢٠ سم (درجتان)

أوجد طول $\overline{ب ء}$

امتحانات الكتاب المدرسى

أولًا : نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى الجبر.

ثانيًا : نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل وحساب المثلثات.



أولاً نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى الجبر

الاختبار الأول

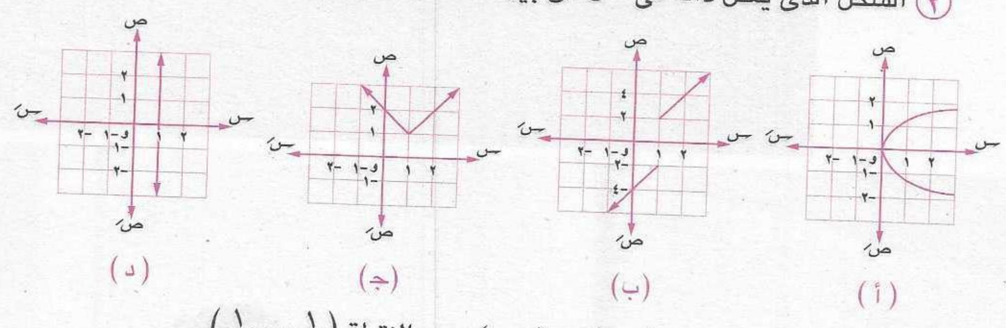
أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $٥^{س} = ٢$ فإن : $٢٥^{س} = \ldots\ldots\ldots$

(أ) ١٠ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٤

② الشكل الذى يمثل دالة فى س من بين الأشكال الآتية هو ....



③ إذا كان منحنى ص = $لو_{٤} (١ - أ س)$ يمر بالنقطة $\left(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢}\right)$

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٨

④ الدالة الأحادية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) $د_{١} (س) = س + ٢$ (ب) $د_{٢} (س) = س^{٢}$

(جـ) $د_{٣} (س) = |س|$ (د) $د_{٤} (س) = ٥$

---

٢ (أ) عين مجال كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين :

① $د (س) = \frac{س}{\sqrt{١ - س}}$ ② $ر (س) = \frac{س - ١}{س^{٢} - ١} + \frac{١}{س + ١}$

(ب) إذا كانت د دالة حيث $د (س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س > ٠ \\ -٢ س & ، س < ٠ \end{cases}$

فارسم الشكل البيانى للدالة ومن الرسم أوجد مدى هذه الدالة.

٣ **(أ)** إذا كانت $د_1$: ح ⟵ ح حيث $د_1$ (س) = ٣س − ١

، $د_2$: [−٢ ، ٣] ⟵ ح حيث $د_2$ (س) = ٣ − ٢س

فارسم الدالة ($د_1$ + $د_2$) محددًا مجالها ثم ابحث اطراد الدالة.

(ب) أوجد الدالة العكسية للدالة : ص = س + ١ ومثلهما فى شكل واحد.

---

٤ **(أ)** أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

(١) $لو_4$ س = ١ − $لو_4$ (س − ٣) (٢) | س + ٢ | = | س − ٣ |

(ب) استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^2$ فى رسم كل من :

(١) $د_1$ (س) = د (س + ٢) (٢) $د_2$ (س) = $س^2$ + ٣

---

٥ **(أ)** أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : | ٣س − ٢ | ≤ ٧

(ب) أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{4}{3}}$ − ١٠ $س^{\frac{2}{3}}$ + ٩ = صفر

الاختبار الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $٣^{س − ٢}$ = $٢^{س − ٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) ٢

(٢) إذا كانت : ص = $\sqrt[3]{س}$ لكل س ≤ ٠ فإن الدالة العكسية لها هى ص = ...

(أ) $\frac{1}{3}$ $س^3$ (ب) $س^3$ (جـ) $س^3$ − ١ (د) $س^{-\frac{1}{3}}$

(٣) إذا كانت : د دالة فردية على [−س ، س]

فإن : د (−س) + د (س) = ...

(أ) ٢س (ب) غير معرفة. (جـ) −٢س (د) صفر

④ المنحنى الموضح بالشكل المقابل

متماثل حول المستقيم الذى

معادلته ....

(أ) س = صفر (ب) ص = صفر

(جـ) ص = -٢ (د) س = ٢

---

٢ (أ) إذا كانت : د (س) = $ا^{س}$ فأثبت أن المقدار : $\frac{١}{د (س) + ١} + \frac{١}{د (-س) + ١}$ له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س

(ب) اختصر لأبسط صورة : $لو_{ب} ا^{٢} \times لو_{حـ} ب^{٣} \times لو_{ا} حـ$

---

٣ (أ) استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = |س| لتمثيل كل مما يأتى :

① $د_{١}$ (س) = |س| + ١ ② $د_{٢}$ (س) = ٢ - |س|

(ب) ارسم منحنى كلٍّ من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين وحدد مداها ثم ابحث اطرادها :

① د (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤ س + ٤}$

② د (س) = |$س^{٢}$ - ٤ س + ١| حيث س ∈ [٠ ، ٤]

---

٤ (أ) ابحث نوع كلٍّ من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

① $د_{١}$ (س) = س جا س ② $د_{٢}$ (س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س \geq ٠ \\ |س| & ، س < ٠ \end{cases}$

③ $د_{٣}$ (س) = $س^{٢}$ |س| - ١

(ب) أوجد فى ح مجموعة الحل لكل مما يأتى :

① |س| + س = ٠ ② |٢ س - ٣| - |٦ - ٤ س| > ٠

---

٥ (أ) إذا كانت : د (س) = $س^{٢}$ - ١ ، ر (س) = س + ١ فارسم منحنى الدالة $\frac{د}{ر}$ (س) مبينًا مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها.

(ب) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة : لو ٢٥ + $\frac{لو ٨ \times لو ١٦}{لو ٦٤}$

ثانيًا
نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل وحساب المثلثات

الاختبار الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^3 + 5}{س(2س^2 + 3)} = $ ....

(أ) $\frac{5}{8}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{5}{3}$

② فى Δ أ ب حـ إذا كان : ٤ حا أ = ٣ حا ب = ٦ حا حـ فإن : ق($\angle$حـ) ≃ ....

(أ) °٨٩ (ب) °٢٩ (جـ) °٥٧ (د) °٨٢

③ إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^2 - 1}{س - 1} & ، س \ne 1 \\ 2أ & ، س = 1 \end{cases}$ متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ١

④ فى Δ س ص ع يكون : $\frac{س^2 + ص^2 - ع^2}{2 س ص} = $ ....

(أ) جتا س (ب) جتا ص (جـ) جتا ع (د) حا ع

---

٢ (أ) أوجد : ① $\lim\limits_{س \to 2} \frac{س^5 - 32}{س^2 + 3س - 10}$ ② $\lim\limits_{س \to 0} \frac{حا 2س + 5 حا 3س}{س}$

(ب) حل المثلث أ ب حـ الحاد الزوايا الذى فيه : أ = ٢١ سم ، ب = ٢٥ سم وطول قطر الدائرة المارة برؤوسه ٢٨ سم.

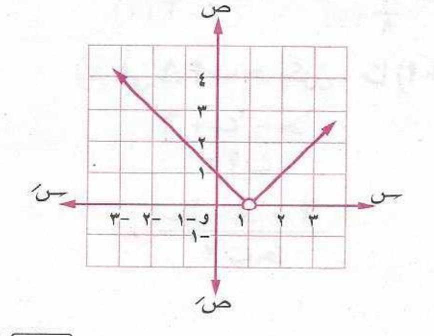
---

٣ (أ) من الرسم البيانى المقابل أوجد :

① $\lim\limits_{س \to 1}$ د (س)

② $\lim\limits_{س \to 2}$ د (س)

③ د (١)



(ب) أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٧٠°

، ب ء = ٨ سم أوجد محيط متوازى الأضلاع.

---

٤ **(أ)** أ ب حـ مثلث فيه : أَ = ٥ سم ، بَ = ٧ سم ، ق (∠ أ) = ٤٠°

أوجد : ق (∠ ب)

(ب) أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د متصلة عند س = ٢ حيث :

د (س) = { س^٢ − ١ ، س ≥ ٢ ؛ س − ٢ أ ، س < ٢ }

---

٥ **(أ)** ابحث وجود نهاية للدالة د حيث :

د (س) = { ظا ٢ س / حا س عندما س > ٠ ؛ (٥ س + ٦) / (س + ٣) عندما س < ٠ } عندما س ← ٠

(ب) أوجد : نها (س ← ١) (٤ − √(س + ١٥)) / (١ − س^٢)

الاختبار الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① نها (س ← ٣) (س − ٣) / (س^٢ − ٩) = ...

(أ) ٣ (ب) ١/٩ (جـ) ١/٣ (د) ١/٦

② فى Δ أ ب حـ يكون : حتا (أ + ب) = ...

(أ) (أ^٢ + ب^٢ − حـ^٢) / (٢ أ ب)

(ب) (أ^٢ + حـ^٢ − ب^٢) / (٢ أ ب)

(جـ) (ب^٢ + حـ^٢ − أ^٢) / (٢ ب حـ)

(د) (حـ^٢ − أ^٢ − ب^٢) / (٢ أ ب)

(٣) أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{\text{حا أ}}{٣} = \frac{٢\ \text{حا ب}}{٥} = \frac{\text{حا حـ}}{٤}$ فإن : أ : ب : حـ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٧ : ٢ : ٤ (د) ٣ : ٥ : ٦

(٤) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣}}{٢\text{س} + ١}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٣

---

٢ (أ) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}{\text{س} + ٣} & ،\ \text{س} \neq -٣ \\ \text{س} + \text{أ} & ،\ \text{س} = -٣ \end{cases}$

متصلة عند س = −٣ فأوجد : قيمة أ

(ب) أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{١}{٣}$ حا أ = $\frac{١}{٤}$ حا ب = $\frac{١}{٥}$ حا حـ

أوجد : ق (∠ حـ) وإذا كان محيط المثلث = ٢٤ سم أوجد مساحته.

---

٣ (أ) أوجد : $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{١ - \text{حتا س} + \text{حا ٣س}}{١ - \text{حتا س} + \text{ظا ٢س}}$

(ب) حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : أ = ٩ سم ، ب = ١٥ سم ، ق (∠ حـ) = ١٠٦°

---

٤ (أ) أوجد : $\lim_{\text{س} \to -٢} \frac{(\text{س} + ٣)^{٥} - ١}{\text{س}^{٢} - ٤}$

(ب) أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٢٧ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، حـ ء = ٨ سم

، ء أ = ١٢ سم ، أ حـ = ١٨ سم أثبت أن : $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ ينصف ∠ ب أ ء

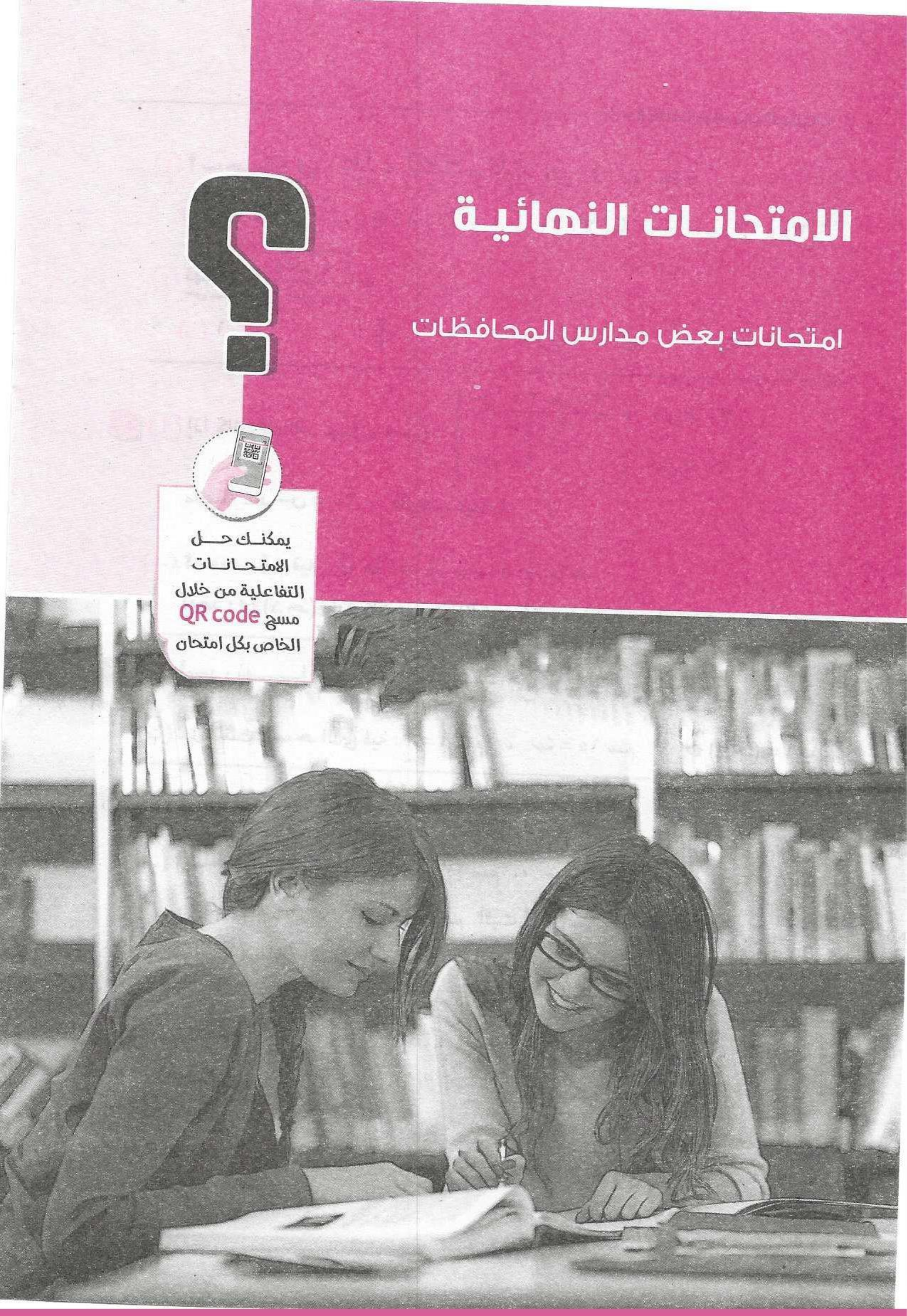
ثم أوجد مساحة الشكل أ ب حـ ء

---

٥ (أ) أوجد قيمة :

(١) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\sqrt{\text{س} + ٤} - ٢}{\text{س}^{٢} + \text{س}}$ (٢) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{١}{\text{س}} \sqrt{٣ + ٤\text{س}^{٢}}$

(ب) شكل خماسى منتظم محيطه ٣٠ سم. أوجد مساحة سطحه.


الامتحانـات النهائيـة
امتحانات بعض مدارس المحافظات
يمكنـك حـل
الامتحـانـات
التفاعلية من خلال
مسح QR code
الخاص بكل امتحان



١ محافظة القاهرة

إدارة حدائق القبة
توجيه الرياضيات



اختبار تفاعلى ①

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجال الدالة د : د (س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٣}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٣}

(جـ) [٢ ، ∞[(د) [٢ ، ∞[− {٣}

② الدالة الفردية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى ....

(أ) د (س) = س جا س (ب) د (س) = جتا س

(جـ) د (س) = ٥ (د) د (س) = س جتا س

③ نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = $س^٢$ + ٣ هى ....

(أ) (٣ ، ٠) (ب) (٠ ، ٣) (جـ) (−٣ ، ٠) (د) (٠ ، −٣)

④ مجموعة حل المتباينة : | ٣ − ٢ س | ≥ ١ فى ح هى ....

(أ) [١ ، ٢] (ب)]١ ، ٢[

(جـ) ح −]١ ، ٢[(د) ح − [١ ، ٢]

⑤ إذا كانت : د (١) = ٣ ، ر (٣) = ٥ فإن : (ر ∘ د) (١) = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ١٥ (د) $\frac{٣}{٥}$

⑥ إذا كان : $٥^{س - ٣} = ٤^{٣ - س}$ فإن : س = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) صفر

⑦ إذا كانت : ص = $\sqrt[٥]{س}$ فإن الدالة العكسية لها ص = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ $س^٥$ (ب) $س^٥$ (جـ) $س^٥$ − ١ (د) ٥ $س^٥$

⑧ إذا كانت : $٣^{٢س}$ = ٥ فإن : $٩^س$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٥ (د) −٥

⑨ تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كانت ....

(أ) $أ > ٠$ (ب) $أ > ١$ (جـ) $٠ < أ < ١$ (د) $أ = ١$

⑩ مجموعة حل المعادلة : $(لو_٥ ص)^٢ - ٧ لو_٥ ص + ١٢ = ٠$ فى ح هى ....

(أ) {٢٥ ، ١٢٥} (ب) {٢٥ ، ٦٢٥}

(جـ) $\{\frac{١}{٢٥} ، ٦٢٥\}$ (د) {١٢٥ ، ٦٢٥}

⑪ مجموعة حل المعادلة : $لو_{(س + ٣)} ١٢٥ = ٣$ فى ح هى ....

(أ) {٥} (ب) {٣} (جـ) ∅ (د) {٢}

⑫ $لو_٣ ٥ × لو_٢ ٣ × لو_٥ ١٦ =$ ....

(أ) ٣٠ (ب) ١٥ (جـ) لو ١٠٠٠٠ (د) $لو_{٣٠} ٢٤٠$

⑬ إذا كان : $لو_٢ س = ٣$ فإن : $لو_س ٢ =$ ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٨ (د) ٩

⑭ $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـــا} \frac{س^٧ + ١٢٨}{س^٤ - ١٦} =$ ....

(أ) ٩ (ب) −٩ (جـ) −١٤ (د) ١٤

⑮ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـــا} \frac{٥ س^٢ - ٤٥}{\sqrt{٥ س + ١} - ٤} =$ ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٤٨

⑯ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{(س + ٢)^٥ - ٣٢}{س} =$ ....

(أ) ٢٥ (ب) ٦٤ (جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

⑰ $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا} \left(\frac{٣ س^٢ + ٢ س + ١}{س^٢ - ٣ س + ٢}\right)^٤ =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

⑱ $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـــا} \frac{\sqrt{٩ س^٢ + ٤} + ٥ س}{٤ س + ٣} =$ ....

(أ) ∞ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢

(١٩) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{٢ س + جا ٣ س}}{\text{٥ س + ظا ٢ س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٥}{٧}$ (جـ) $\frac{٧}{٥}$ (د) −١

(٢٠) نهـا (س ← ٠) $\frac{\text{س (جتا س + جتا ٣ س + جتا ٥ س)}}{\text{جا س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ١٥

(٢١) إذا كانت د : د (س) = { $\frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١}$ ، س ≠ ١ ؛ ٢ أ ، س = ١ }

متصلة عند س = ١ فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ١

(٢٢) طول قطر الدائرة الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ٤ $\sqrt{٣}$ سم يساوى .... سم.

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ٤ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٤ (د) ٨

(٢٣) Δ ل م ن فيه : $\frac{\text{جا ل}}{٣} = \frac{\text{٢ جا م}}{٣} = \frac{\text{جا ن}}{٤}$ فإن : لَ : مَ : نَ = ...

(أ) ٦ : ٨ : ٣ (ب) ٣ : ٦ : ٨ (جـ) ٨ : ٣ : ٦ (د) ٦ : ٣ : ٨

(٢٤) فى Δ أ ب جـ إذا كان : ٣ جا أ = ٤ جا ب = ٢ جا جـ فإن جيب تمام أصغر زاوية فى Δ أ ب جـ = ...

(أ) $\frac{١١}{٢٤}$ (ب) $\frac{٤٣}{٤٨}$ (جـ) $\frac{٢٩}{٣٦}$ (د) $\frac{١١}{٣٦}$

(٢٥) إذا كانت : ∠ أ تكمل ∠ جـ فإن : جتا أ + جتا جـ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) −١

(٢٦) عدد الحلول الممكنة للمثلث س ص ع الذى فيه :

ق (∠ س) = ٣٠° ، سَ = ٦ سم ، صَ = ٩ سم يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٠ (د) عدد لا نهائى.

(٢٧) فى الشكل المقابل :

ء ١٢ سم ١ ، ١٠٠° ، ٣٠° ، حـ ٢٠ سم ب

$\overline{١ء} // \overline{ب حـ}$ ، ق (∠ ١ حـ ب) = ٣٠° ، ب حـ = ٢٠ سم

، ق (∠ ١ ء حـ) = ١٠٠° ، ١ء = ١٢ سم

فإن مساحة Δ ١ ب حـ = ………… سم^{٢} تقريبًا.

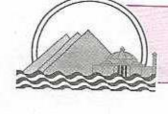
(أ) ٦٠ (ب) ٧٧ (جـ) ١٠٤ (د) ١٢٠

ثانيًا **الأسئلة المقالية**

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) ارسم منحنى الدالة د : د (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤ س + ٤}$ وعين مداها وابحث اطرادها.

(٢) ابحث وجود نهاية د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & \text{لكل } س < ٣ \\ ٣ س + ١ & \text{لكل } س \geq ٣ \end{cases}$ عند س = ٣



٢ **محافظة الجيزة**

إدارة العجوزة
توجيه الرياضيات



اختبــــار
تفاعلى ②

أولًا **أسئلة الاختيار من متعدد**

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان لو س + لو ٥ = ٢ فإن قيمة : س = …………

(أ) ٣ (ب) ٨ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

(٢) فى Δ ١ ب حـ يكون $\frac{١}{حـ} \times \frac{جا حـ}{جا ١}$ = …………

(أ) ٢ نق (ب) ١ (جـ) ٢ نق^{٢} (د) ٢

(٣) الدالة د (س) = ٢ − (س − ١)^{٢} تزايدية فى الفترة …………

(أ)]−∞ ، ١[(ب)]١ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٢[(د)]٢ ، ∞[

④ إذا كان : $(٥)^{س^٢ - س - ٢} = ١$ حيث س > صفر فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) -٣ (جـ) ٢ (د) ٣

⑤ إذا كانت د ، ر دالتين حيث د (س) = $س^٣$ ، ر (س) = س + ٢

فإن : (ر ○ د) (س) هى دالة ....

(أ) أحادية. (ب) فردية. (جـ) زوجية. (د) خطية.

⑥ $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{(س + ١)^٤ - ٨١}{س - ٢} =$ ....

(أ) ١٨ (ب) ٨١ (جـ) -١٠٨ (د) ١٠٨

⑦ فى Δ س ص ع إذا كان : سَ = ٢٠ سم ، عَ = ١٦ سم ، جتا ص = $\frac{٢}{٥}$

فإن : صَ = ... سم.

(أ) ٢٠ (ب) ١٦ (جـ) ٢٥ (د) ١٥

⑧ مجال الدالة د (س) = $لو_{١ - س}$ ٣ هو ....

(أ) $]-\infty ، ٠[\cup]٠ ، ١[$ (ب) $]-\infty ، ١[$

(جـ) $]١ ، \infty[$ (د) $]-١ ، ١[$

⑨ إذا كانت : $\lim_{س \leftarrow \infty} \frac{(أ - ٣) س^٣ + ٥ س^٢ - ٧}{٣ س^٢ + ٥ س + ١} = \frac{٥}{٣}$ فإن قيمة أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑩ إذا كانت : د (س) = $٤^س$ فإن قيمة س التى تحقق العلاقة :

د (س + ١) + د (س - ١) = ٦٨ هى ....

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

⑪ مجموعة حل المعادلة $\sqrt{س^٢ + ٤ س + ٤} \leq ٧$ فى ح هى ....

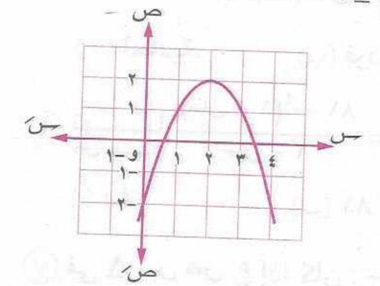
(أ) $]-٩ ، ٥[$ (ب) ح - $]-٩ ، ٥[$ (جـ) ح - $[-٩ ، ٥]$ (د) $[-٩ ، ٥]$

(١٢) إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة $د^{-1}$ فى النقطة (ك ، ٢ ك − ٣)

فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٣) الشكل المقابل يمثل دالة تربيعية معرفة بالقاعدة د (س) = ...



(أ) $(س - ٢)^٢ + ٢$

(ب) $-(س - ٢)^٢ + ٢$

(جـ) $س^٢ + ٢$

(د) $-س^٢ - ٢$

(١٤) $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا}$ ٣ س ظتا ٢ س = ...

(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(١٥) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ الذى فيه أ = ٨ سم ، ب = ١٠ سم ، ق (∠ أ) = ٤٢°

هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) عدد لا نهائى.

(١٦) إذا كانت د دالة فردية وكانت س × د (س) + $س^٣$ × د (−س) = ٢

فإن : د (٢) = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $-\frac{١}{٣}$ (د) −٣

(١٧) إذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٣٣ سم ، جا أ + جا ب + جا جـ = ٣ فإن طول قطر الدائرة

المارة برؤوسه ....

(أ) ٥,٥ (ب) ١١ (جـ) ٣٣ (د) ٣٠

(١٨) فى Δ أ ب جـ إذا كان : أ : ب : جـ = ٣ : ٤ : ٥ فإن قياس أكبر زواياه = ...°

(أ) ١٢٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٩٠ (د) ٦٠

(١٩) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س + ٢} - ٢}{س - ٢}$ = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) −٤ (د) −$\frac{١}{٤}$

(٢٠) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٧} - ١٢٨}{س - ٢}$ = ...

(أ) ٣٢ (ب) ٦٤ (جـ) ٤٤٨ (د) ٥١٢

(٢١) لو (حتا θ) + لو (قا θ) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ٣

(٢٢) إذا كانت : $٥^{س - ١}$ = لو$_{أ}$ ب × لو$_{ب}$ أ فإن قيمة : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٣

(٢٣) إذا كانت : $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ك س - ٢}{س^{٢} - ١} = \frac{٣}{٢}$ فإن قيمة : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

(٢٤) إذا كان منحنى الدالة د يمر بالنقطة (٨ ، ٣) حيث د (س) = لو$_{م}$ (س)

فإن : د (٤) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) −٢

(٢٥) فى Δ أ ب حـ يكون $\frac{أ^{٢} + ب^{٢} - حـ^{٢}}{٢ أ ب}$ ∋ ....

(أ) [−١ ، ١] (ب)]−١ ، ١[(جـ) [٠ ، ١] (د) [−١ ، ٠]

(٢٦) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - حتا س}{٥ س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٥ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) −٥

الدالة د (س) = $\frac{١}{\sqrt[٣]{س + ٢}}$ متصلة لكل س ∋ ....

(ب) ح − {−٢} (جـ) [−٢ ، ∞[(د)]−٢ ، ∞[

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ مثل بيانيًا الدالة د (س) = | س − ١ | + ٢ ومن الرسم :

① أوجد مدى الدالة. ② ابحث اطرادها.

---

٢ إذا كانت د (س) = { س + ١ عندما س < أ ، ٣ س − ١ عندما س > أ

وكانت $\lim_{س \to أ}$ د (س) موجودة ، فأوجد قيمة : أ

٣ محافظة الإسكندرية — إدارة الجمرك

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلى ③

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الدالة د (س) = $(٣ - س)^{٢}$ + ٢ تناقصية فى الفترة ....

(أ)]٣ ، ∞[(ب) [٣ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٣] (د)]٢ ، ∞[

② Δ أ ب حـ فيه : أ = ١٣ سم ، ب = ١٥ سم ، ق(∠ حـ) = °٨٧

فإن : حـ ≃ .... سم.

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٨ (د) ١٩

③ $\lim_{س \to -٢أ} \frac{٣٢ س^{٥} + أ^{٥}}{٨ س^{٣} + أ^{٣}}$ = ٤٥ فإن : أ = ...

(أ) ٩ (ب) ٢٧ (جـ) ± ٣ $\sqrt[٣]{٣}$ (د) ± ٢٧

④ إذا كانت د (س) = $\frac{س + أ}{س - ١}$ وكانت (٥ ، ٢) ∈ $د^{-١}$ فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑤ $\lim_{و \to ٠} \frac{(س + ٥ و)^{٧} - س^{٧}}{٣ و}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{٧}{٣}$ $س^{٦}$ (جـ) $\frac{٣٥}{٣}$ $س^{٦}$

(٦) مساحة مثلث الذى أطوال أضلاعه ١٤ سم ، ١٥ سم ، ١٧ سم
يساوى .... سم^{٢} تقريبًا.

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٥ (د) ١٠٠

(٧) إذا كان لو$_{٣}$ س = لو$_{٩}$ ٤ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٩

(٨) إذا كانت د (س) = { أ س^{٢} + ٥ ، س ≥ ٢ ؛ ٩ − ب س^{٢} ، س < ٢ }
متصلة عندما س = ٢ فإن : أ + ب = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٩) أى العبارات الآتية صحيحة ؟

(أ) لو ٣ + لو ٣ = لو ٦ (ب) ١ − لو ٢ = لو ٥

(جـ) لو ٢ × لو ٢ = لو ٤ (د) لو (١ + ٢ + ٣) = لو ١ × لو ٢ × لو ٣

(١٠) Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ أ) = ٢٧° ، ق (∠ حـ) = ٥٢° وطول قطر دائرته الخارجية ٢٠ سم
فإن محيط Δ أ ب حـ ≃ .... سم.

(أ) ٤٤ (ب) ٤٠ (جـ) ٢٦ (د) ٣٢

(١١) إذا كانت : د (س) = | س − ٢ | + ٤ فإن مجموعة حل د (س + ٢) = ٣ هى ....

(أ) {−٣ ، ٣} (ب) [−٣ ، ٣] (جـ) ح − {−٢} (د) ∅

(١٢) نهـــا$_{س ← ٠}$ $\frac{(\text{جا س} + \text{جتا س})^{٢} - ١}{٣ \text{س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) صفر

(١٣) إذا كان للمثلث أ ب حـ حل وحيد حيث أ = ١٥ سم ، ق (∠ ب) = ٣٠°
فإن : ب يمكن أن تساوى ....

(أ) ٨,٥ (ب) ٨ (جـ) ٧,٥ (د) ٧

(١٤) مجموعة حل المعادلة : س$^{\frac{٤}{٣}}$ − ١٠ س$^{\frac{٢}{٣}}$ + ٩ = ٠ هى ....

(أ) {−٩} (ب) {١ ، ٢٧} (جـ) {±١ ، ±٢٧} (د) {±٢٧}

(١٥) إذا كان : لو$_٣$ لو$_٢$ (٣ س + ٥) = ١ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٦) إذا كانت د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٧ - ١٢٨}{س^٤ - ١٦} & ، س < ٢ \\ ٢ أ س & ، س > ٢ \end{cases}$

وكان نهـا$_{س \leftarrow ٢}$ د (س) لها وجود فإن : أ = ...

(أ) $\frac{٧}{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) −٧

(١٧) مثلث أ ب حـ مساحته ٢٤ سم^٢ وطول نصف قطر دائرته الخارجية ٥ سم

فإن : حا أ حا ب حا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{٣}{٢٥}$ (ب) $\frac{٦}{٢٥}$ (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

(١٨) إذا كانت د (س) = $\frac{١}{س}$ ، ر (س) = س^٢ − ٩ فإن : مجال (د ∘ ر) هو ....

(أ) {−٢ ، ٠ ، ٣} (ب) ح − {−٣ ، ٠ ، ٣}

(جـ) ح − {−٣ ، ٣} (د) [−٣ ، ٣]

(١٩) إذا كان : نهـا$_{س \leftarrow \infty}$ $\frac{٣ أ س^٣ - ٥ س}{٣ س^٢ - ٢ س^٣}$ = ٦ فإن : أ = ...

(أ) ١٨ (ب) ١٢ (جـ) −٤ (د) −٦

(٢٠) مجموعة حل لو$_{\sqrt{٢}}$ (س + ٣) − لو$_{\sqrt{٢}}$ س = ٢ في ح هي ....

(أ) {١٠} (ب) {٣} (جـ) {٢} (د) {−٣}

(٢١) إذا كان : ٤^{س} − ٢^{س} − ٢ = ٠ فإن قيم س ∈ ....

(أ) {١} (ب) {−١ ، ٢} (جـ) {٢} (د) {−١}

(٢٢) إذا كانت : ٥$^{س + ٢}$ = $\sqrt[٤]{١٢٥}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) صفر (جـ) −١ (د) $\frac{-٥}{٤}$

(٢٣) $\lim_{س \to ٨} \frac{س \sqrt[٣]{س} - ١٦}{س - ٨}$ = ...

(أ) ١١٢ (ب) ٩٦ (جـ) $\frac{٨}{٣}$ (د) ٢

(٢٤) مدى الدالة د (س) = $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س^٢ - ٢س + ١}}{س - ١}$ هو ....

(أ) {١} (ب) ح (جـ)]-١ ، ١[(د) {-١ ، ١}

(٢٥) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا Δ هى ٨ : ٣ : ١ فإن النسبة بين طول أكبر ضلعين ....

(أ) $\sqrt{٣}$: ٢ (ب) $\sqrt{٦}$: ٢ (جـ) ٨ : ٣ (د) ٨ : ٥

(٢٦) إذا كانت د دالة أحادية وكان د (٢ ك + ٣) = د (ك - ١) فإن : ك = ...

(أ) -١ (ب) -٢ (جـ) -٣ (د) -٤

(٢٧) إذا كانت $\lim_{س \to أ}$ | ٣س + ٢ | = ١٤ فإن : أ ∈ ....

(أ) {١٢} (ب) {٤ ، $\frac{-١٦}{٣}$}

(جـ) ح - {$\frac{-١٦}{٣}$ ، ٤} (د) {$\frac{-١٦}{٣}$}

ثانيًا الأسئلة المقالية

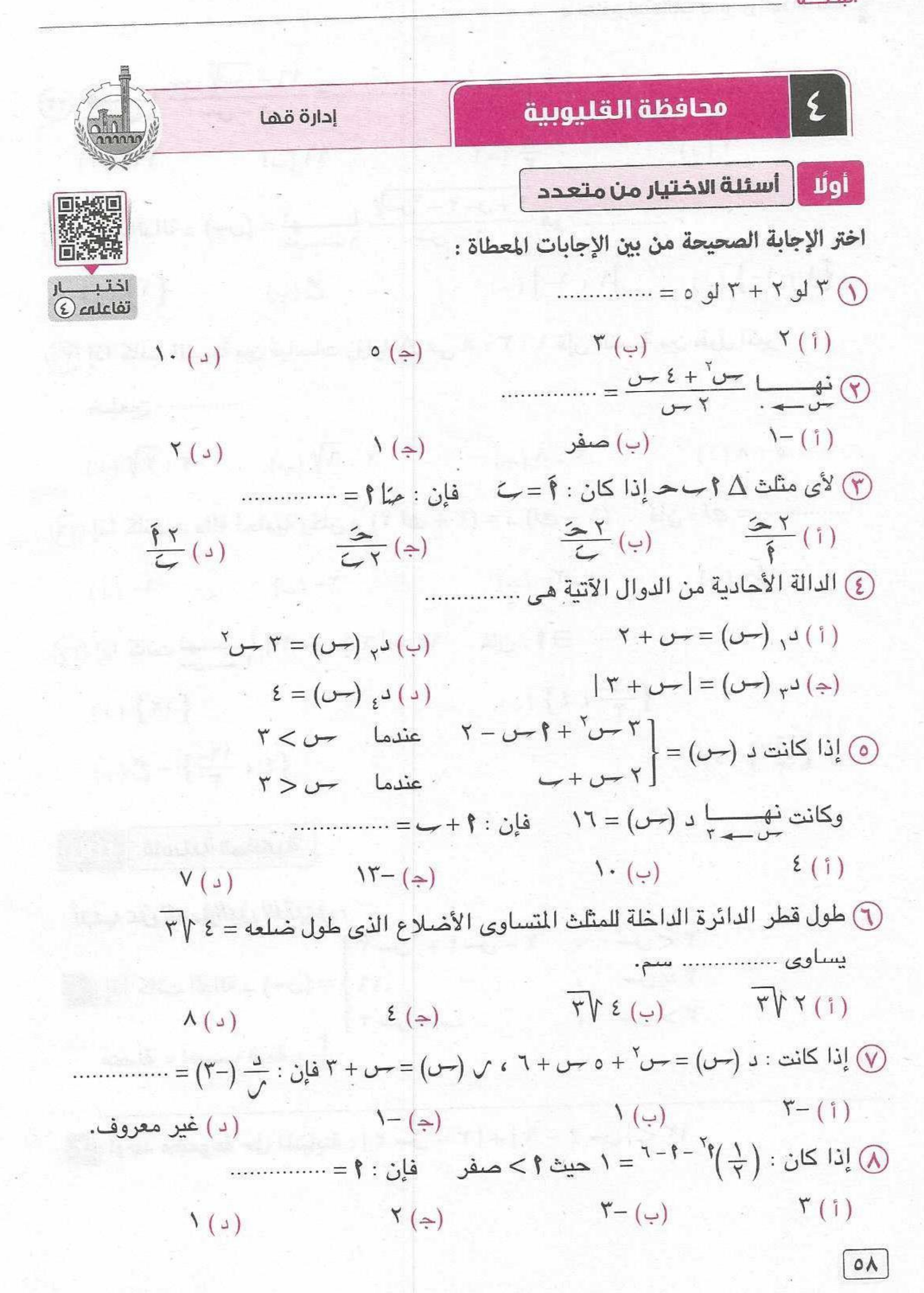
أجب عن السؤالين الآتيين :

١ إذا كانت الدالة د (س) = $\begin{cases} ٣س^٢ + أس - ٢ & ، س > ٣ \\ ١٦ & ، س = ٣ \\ ٢س + ب & ، س < ٣ \end{cases}$

متصلة ، احسب قيمة : $\frac{أ}{ب}$

---

٢ أوجد مجموعة حل المتباينة : | ٢س - ٣ | + | ٦ - ٤س | > ١٢



٤ محافظة القليوبية — إدارة قها

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلى ④

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① ٣ لو ٢ + ٣ لو ٥ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ١٠

② $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ٤ س}{٢ س} =$ ....

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

③ لأى مثلث Δ أ ب حـ إذا كان : أَ = بَ فإن : حتا أ = ...

(أ) $\frac{٢ حـَ}{أَ}$ (ب) $\frac{٢ حـَ}{بَ}$ (جـ) $\frac{حـَ}{٢ بَ}$ (د) $\frac{٢ أَ}{بَ}$

④ الدالة الأحادية من الدوال الآتية هى ....

(أ) $د_{١}(س) = س + ٢$ (ب) $د_{٢}(س) = ٣ س^{٢}$

(جـ) $د_{٣}(س) = |س + ٣|$ (د) $د_{٤}(س) = ٤$

⑤ إذا كانت $د(س) = \begin{cases} ٣ س^{٢} + أ س - ٢ & \text{عندما } س > ٣ \\ ٢ س + ب & \text{عندما } س < ٣ \end{cases}$

وكانت $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} د(س) = ١٦$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) ١٠ (جـ) -١٣ (د) ٧

⑥ طول قطر الدائرة الداخلة للمثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه = $٤\sqrt{٣}$ يساوى .... سم.

(أ) $٢\sqrt{٣}$ (ب) $٤\sqrt{٣}$ (جـ) ٤ (د) ٨

⑦ إذا كانت : $د(س) = س^{٢} + ٥ س + ٦$ ، $ر(س) = س + ٣$ فإن : $\frac{د}{ر}(-٣) =$ ....

(أ) -٣ (ب) ١ (جـ) -١ (د) غير معروف.

⑧ إذا كان : $\left(\frac{١}{٢}\right)^{أ^{٢} - أ - ٦} = ١$ حيث أ > صفر فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) ٢ (د) ١

(٩) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٧س + ١٢}{س - ٣}$ = ...

(أ) −٣ (ب) −٢ (جـ) −١ (د) ١

(١٠) فى △ أ ب حـ فإن : جتا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{ب^٢ + حـ^٢ - أ^٢}{٢ ب حـ}$ (ب) $\frac{أ^٢ + حـ^٢ - ب^٢}{٢ أ حـ}$

(جـ) $\frac{ب^٢ + أ^٢ - حـ^٢}{٢ ب أ}$ (د) $\frac{حـ^٢ - ب^٢ - أ^٢}{٢ ب أ}$

(١١) نقطة تماثل منحنى الدالة د : د (س) = $(س - ٣)^٢ + ٢$ هى ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (−٣ ، ٢) (جـ) (−٣ ، −٢) (د) (٣ ، −٢)

(١٢) $لو_{أ}$ س ÷ $لو_{ب}$ س = ...

(أ) ١ − $لو_{أ}$ ب (ب) ١ + $لو_{أ}$ ب (جـ) ١ − $لو_{ب}$ أ (د) ١ + $لو_{ب}$ أ

(١٣) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣}$ = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٦ (د) ٥

(١٤) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt{\frac{س - ٥}{س + ٤}}$ هو ....

(أ) [٥ ، ∞[(ب) ح − [−٤ ، ٥]

(جـ) [−٤ ، ٥] (د) ح −]−٤ ، ٥]

(١٥) $٣^{لو_{٣} ٤}$ + $لو_{٦}$ ٣٦ = ...

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ١١ (د) ٨

(١٦) إذا كان : $٢^{س} = ٣$ فإن : $٤^{س + ١}$ = ...

(أ) ١٣ (ب) ١٦ (جـ) ٢٤ (د) ٣٦

(١٧) فى △ أ ب حـ المقدار $أ^٢$ + ٢ ب حـ جتا أ = ...

(أ) $أ^٢ + ب^٢$ (ب) $أ^٢ + حـ^٢$ (جـ) $ب^٢ + حـ^٢$ (د) $أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢$

(١٨) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢٠} + س^{١٠} - ٢}{س - ١}$ = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ (د) ١

(١٩) إذا كان : لو (س + ٣) = ١ فإن : س = ...

(أ) ١٠ (ب) ٧ (جـ) ٣ (د) صفر

(٢٠) قيمة $لو_٣$ ٥٤ − $لو_٣$ $\frac{٨}{١٥}$ + $لو_٣$ $\frac{٤}{٥}$ = ...

(أ) لو ٣ (ب) ٤ (جـ) ٢٧ (د) ٣

(٢١) $\underset{س \to \infty}{نهـا} \left(\frac{٣ س^٢ + ٢ س + ١}{س^٢ - ٣ س + ٢}\right)^٤$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

(٢٢) مجموعة حل المعادلة $\sqrt{س^٢ - ٦ س + ٩}$ + ٢ س = ٩ فى ح تساوى ....

(أ) {٤ ، ٦} (ب) {٦} (جـ) {٤} (د) ∅

(٢٣) إذا كانت : $٢^{س} - ٢ ٢^{-س}$ = ١ حيث ٢ > ١ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) لو ٢ (جـ) $لو_٢$ ٢ (د) $لو_٢$ ٢

(٢٤) فى Δ ٢ ب حـ إذا كان : $\frac{جا ٢}{٣} = \frac{جا ب}{٥} = \frac{جا حـ}{٤}$ فإن : أ : ب : حـ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٥ : ٤ : ٣ (د) ٣ : ٥ : ٤

(٢٥) $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{جا ٢ \sqrt{س}}{٣ \sqrt[٣]{س}}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) −٢ (جـ) ٦ (د) $\frac{٤}{٩}$

(٢٦) $\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{١ - جتا س + طا ٥ س}{١ - جتا س - طا س}$ = ...

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) صفر (د) غير معرفة.

(٢٧) فى Δ ٢ ب حـ إذا كان : ق (∠ب) = ٧٦ ، حـ = ١٢ سم ، أ = ١٠ سم
يكون ب ≃ .... سم.

(أ) ١٢,٦ (ب) ١٣,٦ (جـ) ١٤,٦ (د) ١٥,٦

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) أوجد قيمة ٢ التى تجعل الدالة د متصلة عند ٢

حيث د (س) = { ٢ − $س^٢$ عندما س ≤ ٢ ، س عندما س > ٢ }

(٢) إذا كانت : د (س) = $٥^{س}$ فأوجد فى ح مجموعة حل المعادلة د (س) + د (س − ١) = ١٥٠

٥ محافظة الغربية — إدارة بسيون

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلى ⑤

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① فى Δ أ ب جـ إذا كان : أ = ١٥ سم ، ب = ١٩ سم ، ق(∠ جـ) = ٤٦° فإن : جـ = ... سم

(أ) ١٣,٧٩ (ب) ١١,٢٥ (جـ) ١٠,٣٨ (د) ٩,٨٨

② فى Δ س ص ع إذا كان : ٢ جا س = ٤ جا ص = ٣ جا ع فإن : ق(∠ ص) = ...

(أ) ٦٣,٦١° (ب) ٥٥,٢٣° (جـ) ٣٦,٣٤° (د) ٢٦,٣٨°

③ فى Δ ل م ن يكون جا ل : جا (ل + ن) = ...

(أ) ل : (ل + م) (ب) ل : م (جـ) ل : ن (د) ن : م

④ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا } ٢\text{س} + ٤\text{س}}{\text{س} + \text{ظا س}}$ = ...

(أ) ٠ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

⑤ نقطة تقاطع منحنى الدالة د (س) = $\text{لو}_{٢}$ (س − ١) مع محور السينات هى ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (٠ ، ٢) (جـ) (١ ، ٠) (د) (٠ ، ١)

⑥ مجموعة حل المعادلة |س − ٢| + ٣ = ١ فى ح هى ....

(أ) {٠ ، ٤} (ب) {٠ ، −٢} (جـ) {−٢ ، ٤} (د) ∅

⑦ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \frac{٥\text{س}}{٢\text{س}^{٢} + \text{س}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٢,٥ (جـ) ٥ (د) غير موجودة.

⑧ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}}$ (٦س قتا ٢س) = ...

(أ) ١٢ (ب) ٣ (جـ) صفر (د) غير مجودة.

⑨ طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع طول ضلعه ١٢ يساوى .... سم.

(أ) ٨ $\sqrt{٣}$ (ب) ٤ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٨ (د) ٤

(١٠) $\lim_{س \to \infty}$ (٣ س$^{-١}$ + ٧) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ∞

(١١) نقطة تماثل الدالة د (س) = (س − ٢)^{٣} + ٣ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٢ ، −٣) (جـ) (−٢ ، ٣) (د) (٠ ، ٣)

(١٢) إذا كان : ٣$^{٢ن − ٥}$ = ٨١ فإن : ن = ...

(أ) ٨١ (ب) ٢٧ (جـ) ٤ (د) ٣

(١٣) مجال الدالة د (س) = لو س هو ....

(أ) ح (ب) ح$^{+}$ (جـ) ح − {١} (د) ح*

(١٤) إذا كانت د (س) = ٥^{س} ، د (س − ١) = ١٢٥ فإن : س = ...

(أ) ١٢٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٣

(١٥) مجموعة حل المتباينة | س − ٣ | > ٢ فى ح هى ....

(أ) [١ ، ٥] (ب)]١ ، ٥[(جـ) ح − [١ ، ٥] (د) ح −]١ ، ٥[

(١٦) عدد الحلول الممكنة للمثلث س ص ع فيه ق (∠ س) = ٦٠° ، سَ = ٥ سم
، صَ = ٣ سم هو ....

(أ) ٠ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

(١٧) إذا كانت د دالة حيث د (٥) = ٧ فإن : د$^{-١}$ (٧) = ...

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ٣٥

(١٨) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س - ٢}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٣٢ (جـ) ٨٠ (د) ١٦٠

(١٩) الدالة الزوجية من بين الدوال المعرفة بالقواعد الآتية هى د (س) = ...

(أ) حا س (ب) ظا س (جـ) حا س + حتا س (د) حا س ظا س

(٢٠) إذا كانت د (س) = ٢ س − ٥ ، ر (س) = س^{٢} فإن : (د ∘ ر) (س) = ...

(أ) ٢ س^{٢} − ٥ (ب) (٢ س − ٥)^{٢} (جـ) ٢ س^{٢} + ٥ (د) ٢ (س − ٥)^{٢}

(٢١) إذا كانت د (س) = $\begin{cases} س + ١ & ، س < ٢ \\ س^{٢} - ١ & ، س > ٢ \end{cases}$ فإن : $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) غير موجودة.

(٢٢) فى Δ أ ب حـ إذا كان : حـ ب = ٢ حـ أ ، أ حـ = ٦ سم فإن : أ ب = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١٢

(٢٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٥ س + ٦}{س - ٣}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

(٢٤) $\lim_{س^٢ \to أ} \frac{س^{٢ن} - أ^ن}{س^٢ - أ}$ = ...

(أ) $ن أ^{ن-١}$ (ب) $٢ ن أ^{ن-١}$ (جـ) $٢ أ^{ن-١}$ (د) $أ^{ن-١}$

(٢٥) إذا كان : لو ٣ = س ، لو ٥ = ص فإن : لو ١٥ = ...

(أ) س ص (ب) س − ص (جـ) س ÷ ص (د) س + ص

(٢٦) إذا كان : $٣^س = ٥$ فإن : $٣^{س+٢}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٤٥ (د) ٩٠

(٢٧) إذا كان : $٥^س = ١٧$ فإن قيمة س ≃ .... لأقرب رقمين عشريين.

(أ) ١,٧٦ (ب) ٢,٤٦ (جـ) ٣,٤٠ (د) ٥,١٧

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ استخدام منحنى الدالة د (س) = | س | لتمثيل الدالة د (س) = ٣ − | س |
ومن الرسم عين مداها وابحث اطرادها

---

٢ إذا كانت الدالة د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٧ - ١٢٨}{س^٣ - ٨} & ، س \neq ٢ \\ ك & ، س = ٢ \end{cases}$

متصلة فى ح أوجد قيمة : ك

٦ محافظة الدقهلية

إدارة نبروة
توجيه الرياضيات
نموذج (أ)

اختبار تفاعلى ٦

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الدالة د (س) = | س + ٢ | تكون تناقصية فى الفترة ....

(أ)]٠ ، ∞[　(ب)]٢ ، ∞[　(جـ)]-٢ ، ∞[　(د)]-∞ ، -٢[

② مجال الدالة د (س) = $\frac{س}{|س| + أ}$ هو ح - {٣ ، -٣} فإن : أ = ...

(أ) ٣　(ب) ± ٣　(جـ) -٣　(د) صفر

③ إذا كانت د : د (س) دالة أحادية وكان : د (٢ ك + ٣) = د (ك - ١)
فإن : ك = ...

(أ) -١　(ب) -٢　(جـ) -٣　(د) -٤

④ إذا كانت : د (س) = $\sqrt[٣]{س}$ ، ر (س) = $س^٣$ فإن : (د ∘ ر) (س) = ...

(أ) س　(ب) $س^٣$　(جـ) | س |　(د) $\sqrt[٣]{س}$

⑤ حل المتباينة | ٥ - ٢ س | ≥ ٧ فى ح هى ....

(أ)]-١ ، ٦[　(ب) [-١ ، ٦]　(جـ) [-٦ ، ١]　(د)]-٦ ، ١[

⑥ مجال الدالة د (س) = لو | س | هو ....

(أ) $ح^+$　(ب) $ح^-$　(جـ) $ح^*$　(د) ح

⑦ إذا كانت : د (س) = $٢^{س}$ ، د (س) > ١ عندما س ∈ ....

(أ) $ح^+$　(ب) $ح^-$　(جـ) $ح^*$　(د) ح - {١}

⑧ م ، ن جذرا المعادلة : ٣ $س^٢$ - ب س + ١٢ = ٠ فإن : $لو_٢$ م + $لو_٢$ ن = ...

(أ) ٤　(ب) ١٢　(جـ) ٢　(د) ١

⑨ إذا كان : $٢^{س + ١}$ = ٢٤ فإن : $٢^{س - ٢}$ = ...

(أ) ٢　(ب) ٣　(جـ) ٤　(د) ٥

(١٠) مجال د (س) = لو$_{١ - س}$ (س + ٣) هو ....

(أ)]-٣ ، -١[　　(ب)]-٣ ، ١[

(جـ)]-٣ ، ١[- {٠}　　(د) [-٣ ، -١]

(١١) د (س) = ٢^{س} فإن مجموعة حل المعادلة د (س + ١) + د (س - ١) = ٤٠ هى ....

(أ) {٢}　　(ب) {٤}　　(جـ) {٨}　　(د) {١٦}

(١٢) إذا كان لو$_{س}$ (٦ - س) = ٢　　فإن : لو (٥ س) = ...

(أ) ١٠　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) ٣

(١٣) مجموعة حل المعادلة : (٢ س - ٢٥)$^{\frac{٤}{٣}}$ = ٨١ فى ح هى ....

(أ) {-١}　　(ب) {٢٦}　　(جـ) {-١ ، ٢٦}　　(د) ∅

(١٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{(س - ٣)^٢}$ = ...

(أ) صفر　　(ب) ٣

(جـ) ٩　　(د) لا شىء مما سبق.

(١٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - قاس}{حتا س - ١}$ = ...

(أ) ٢　　(ب) ١　　(جـ) صفر　　(د) -١

(١٦) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س - ٣}$ = ...

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) $\sqrt{٣}$　　(د) غير موجودة.

(١٧) $\lim_{س \to \infty} \frac{٤ ا س^ن - ٤ س + ٥}{٣ - ٩ س + ٨ س^٢}$ = ٣　　فإن : (ن ، ا) = ...

(أ) (٦ ، ٢)　　(ب) (٢ ، ٦)　　(جـ) (٣ ، ٥)　　(د) (٥ ، ٣)

(١٨) $\lim_{س \to \pi} \frac{حاس}{\pi - س}$ = ...

(أ) π　　(ب) $\pi^٢$　　(جـ) $-\pi$　　(د) ١

(١٩) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س^٢ - ١}$ = ...

(أ) ٤　　(ب) ٨　　(جـ) $\frac{١}{٤}$　　(د) $\frac{١}{٨}$

(٢٠) $\lim_{س \to ٢} \frac{جا(٣س - ٦)}{س^٢ - ٤}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(٢١) د (س) = $\frac{س}{جا ٢س}$ متصلة عندما س ∈ ح - {س : س = ... ، ن ∈ ص}

(أ) π ن (ب) $\frac{١}{٢}$ π ن

(جـ) $\frac{١}{٣}$ π ن + π ن (د) $\frac{١}{٤}$ π ن + π ن

(٢٢) إذا كان محيط الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ = ٢ π سم

فإن : أ قتا أ + ب قتا ب + جـ قتا جـ = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢٣) المثلث أ ب جـ فيه : أ = ١٥ سم ، ق (∠ ب) = ٣٠° له حل وحيد

فإن : ب = ... سم.

(أ) ٨,٥ (ب) ٨ (جـ) ٧,٥ (د) ٧

(٢٤) فى Δ أ ب جـ إذا كان : جا أ = ٢ جا ب ، ب جـ = ٦ سم فإن : أ جـ = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

(٢٥) المثلث أ ب جـ فيه : أ ب = ١٥ سم^٢ ، ب جـ = ٣٥ سم^٢ ، أ جـ = ٢١ سم^٢

فإن قياس أكبر زوايا المثلث = ...

(أ) ١٥٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

(٢٦) إذا كانت : مساحة المثلث أ ب جـ = ١٢ سم^٢ فإن : (ب^٢ + جـ^٢ - أ^٢) ظا أ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٦

(٢٧) فى المثلث أ ب جـ يكون جتا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{أ^٢ + ب^٢ - جـ^٢}{٢ أ ب}$ (ب) $\frac{أ^٢ - ب^٢ + جـ^٢}{٢ أ ب}$

(جـ) $\frac{جـ^٢ - ب^٢ - أ^٢}{٢ أ ب}$ (د) $\frac{جـ^٢ - ب^٢ - أ^٢}{٢ جـ ب}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ إذا كانت د (س) = $\begin{cases} \dfrac{(س + ٢)^{٥} - ٣٢}{س} & ، \quad س \neq صفر \\ ٥ ك & ، \quad س = صفر \end{cases}$

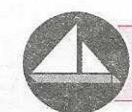
متصلة عند س = صفر **أوجد قيمة : ك**

---

٢ إذا كانت د (س) = | س − ٣ | − ٢ أوجد مداها وفترة التزايد ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية.

٧ محافظة دمياط

إدارة كفر البطيخ
(عام ومنازل)



أولًا أسئلة الاختيار من متعدد (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)



اختبار تفاعلى ⑦

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① نقطة رأس منحنى الدالة د : د (س) = $(١ + س)^{٢}$ − ٣ هى ....

(أ) (١ ، ٣)　(ب) (−١ ، −٣)　(جـ) (−١ ، ٣)　(د) (١ ، −٣)

② مجال الدالة د (س) = $\sqrt{س - ٢}$ هو ....

(أ) ح　(ب) {٢}　(جـ) [٢ ، ∞[　(د)]٢ ، ∞[

③ مدى الدالة د (س) = | س − ٢ | يساوى ....

(أ) [٠ ، ∞[　(ب)]٢ ، ∞[　(جـ) [٢ ، ∞[　(د)]٠ ، ∞[

④ فى Δ أ ب حـ يكون $\dfrac{٤ ب}{حا ب}$ = ... نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ

(أ) ٤　(ب) ٨　(جـ) $\frac{١}{٢}$　(د) $\frac{١}{٨}$

⑤ $\lim\limits_{س \to ∞} \left(\dfrac{٥}{س} + ٢\right)$ = ...

(أ) ٢　(ب) ٥　(جـ) ٧　(د) ١٠

⑥ $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 3س}{5 س^2}$ = ...

(أ) $\frac{9}{25}$ (ب) $\frac{3}{5}$ (جـ) ٩ (د) $\frac{9}{5}$

⑦ إذا تقاطع منحنى الدالتين د (س) ، $د^{-1}$ (س) فى النقطة (ك ، ٢ ك - ١)
فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

⑧ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم تساوى ....°

(أ) ٦٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٥٠

⑨ $\lim_{س \to 1} \frac{س^6 - 1}{س - 1}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) -٦

⑩ $\text{لو}_{س ص}$ س + $\text{لو}_{س ص}$ ص = ...

(أ) س ص (ب) س + ص (جـ) صفر (د) ١

⑪ إذا كانت : د (س) = $٤^{س - ١}$ فإن : د (س + ١) = ...

(أ) $٤^{س}$ (ب) $٤^{س + ١}$ (جـ) $٤^{س + ٢}$ (د) $٢^{س}$

⑫ $\lim_{س \to 3} \frac{س^2 - 9}{س - 3}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٦ (جـ) -٦ (د) ٩

⑬ إذا كان : $س^{\frac{3}{2}}$ = ٨ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٩

⑭ إذا كان : لو (س + ١١) = ٢ فإن : س = ...

(أ) -٩ (ب) ٢٢ (جـ) ٨٩ (د) ٩١

⑮ المعادلة $س^3$ = ٤ عدد جذورها يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑯ عدد الحلول الممكنة للمثلث ا ب حـ حيث ق (∠ ا) = ٣٠° ، ا = ٦ سم ، ب = ٨ سم
يساوى ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ١

(١٧) إذا كانت د دالة زوجية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (−٣ ، ٢ م + ١)

وكانت د (٣) = ٥ فإن : م = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

(١٨) إذا كانت د (س) = س^{٢} + ٦ ، ر (س) = ٣ س فإن : (د ∘ ر) (٣) = ...

(أ) ٧٥ (ب) ٨٧ (جـ) ٩٠ (د) ١٠٠

(١٩) Δ أ ب جـ فيه : $\frac{\text{جا أ}}{٣} = \frac{٢ \text{ جا ب}}{٥} = \frac{\text{جا جـ}}{٤}$ فإن : أ : ب : جـ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٧ : ٢ : ٤ (د) ٣ : ٥ : ٤

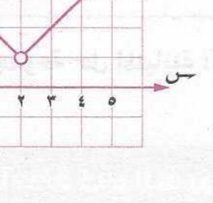
(٢٠) نهــا (س ← $\frac{\pi}{٤}$) $\frac{\text{طا س}}{\text{س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{\pi}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

(٢١) فى Δ س ص ع إذا كان : سَ = صَ فإن : جا س = ...

(أ) $\frac{٢ \text{ صَ}}{\text{عَ}}$ (ب) $\frac{٢ \text{ عَ}}{\text{صَ}}$ (جـ) $\frac{\text{عَ}}{٢ \text{ صَ}}$ (د) $\frac{\text{صَ}}{٢ \text{ عَ}}$

(٢٢) فى الشكل المقابل :



نهــا (س ← ٢) د (س) = ...

(أ) غير موجودة.

(ب) ١

(جـ) −١

(د) ٢

(٢٣) معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين د ، ر حيث د (س) = ٣$^{\text{س}}$

، ر (س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{\text{س}}$ هى ....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) ص = س (د) ص = − س

(٢٤) إذا كانت د دالة حيث د (س) = { ٢ س ، س ≤ ١ ؛ ٣ س − أ ، س > ١ } متصلة عند س = ١

فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −١ (د) −٢

(٢٥) $\lim_{س \to \pi} \frac{جا\, س}{\pi - س} = $ ....

(أ) −١ (ب) π^2 (جـ) π (د) ١

(٢٦) فى الشكل المقابل :

طا θ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$

(جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٢٧) إذا كانت أ ∈]٠ ، ٨[فإن : $لو_٢$ أ ∈ ....

(أ)]−∞ ، ٣[(ب)]٣ ، ١٦[(جـ)]٣ ، ∞[(د)]−∞ ، ٠[

ثانيًا **الأسئلة المقالية**

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ إذا كانت الدالة د : د(س) = $\begin{cases} أس - ٣ & ، س < -١ \\ ٣س - ٢ & ، س > -١ \end{cases}$

لها نهاية عند س = −١ **أوجد : قيمة أ**

---

٢ أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{س^2 - ٦س + ٩} < ٢$

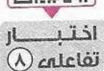


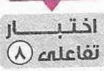
٨ محافظة كفر الشيخ

إدارة بيلا
توجيه الرياضيات

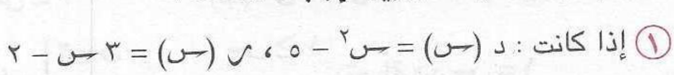
أولًا **أسئلة الاختيار من متعدد** (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)







اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



(١) إذا كانت : د(س) = $س^2 - ٥$ ، ر(س) = ٣س − ٢

فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٤ (ب) −١ (جـ) ١١ (د) ١٦

(٢) إذا كان : $٥^{س - ٢} = ٧^{س - ٢}$ فإن : $٣^{س - ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٣

(٣) مجموعة حل المعادلة $٤^{س} - ٢^{س} - ٢$ = صفر ....

(أ) {١} (ب) {-١ ، ٢} (جـ) {٢} (د) {-١}

(٤) كل الدوال الآتية زوجية ما عدا ....

(أ) د (س) = جا س (ب) د (س) = جتا س

(جـ) د (س) = $س^٢ - ١$ (د) د (س) = | س |

(٥) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}} \frac{س^٢ - ٧ س + ١٢}{س - ٣}$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٧ (د) -٢

(٦) قيمة : لو (جتا θ) + لو (قا θ) = ... حيث θ زاوية حادة.

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) ٢

(٧) إذا كانت النقطة $(س ، \frac{٤}{س})$ نقطة تقاطع منحنى الدالة د والدالة العكسية لها $د^{-١}$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ± ٢ (جـ) ٤ (د) ± ٤

(٨) فى المثلث ٢ ب حـ يكون : جتا (٢ + ب) = ...

(أ) جتا ٢ + جتا ب (ب) جا ٢ + جا ب (جـ) جتا حـ (د) - جتا حـ

(٩) إذا كانت : $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نها}} \frac{٢ س + ٣ س^٢}{٢ س^٢ - ٥ س} = \frac{١}{٣}$ فإن : ٢ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

(١٠) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا } ٣ س \text{ ظا } ٢ س}{١٢ س^٢}$ = ...

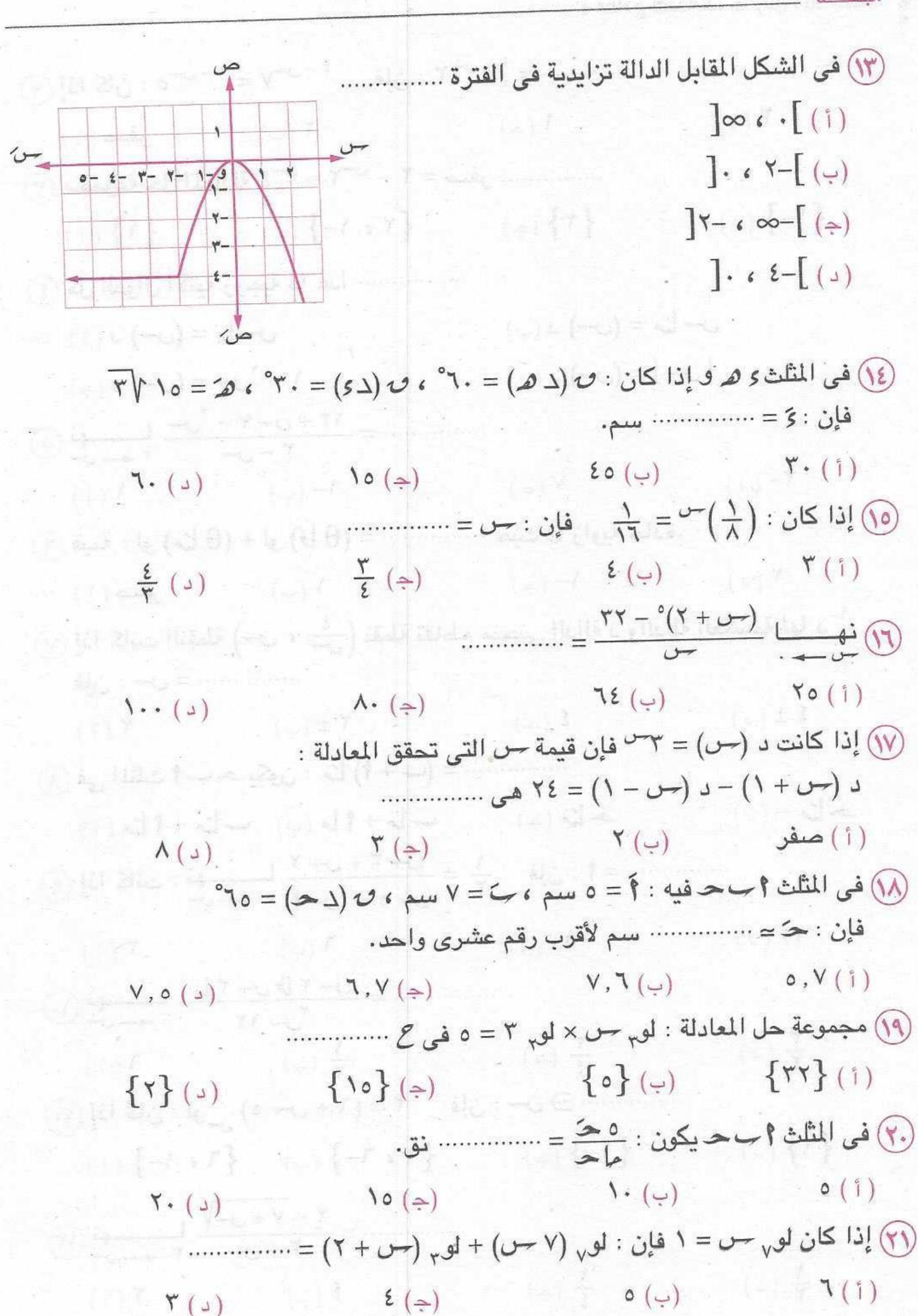
(أ) ٦ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(١١) إذا كان : $لو_{س}$ (٥ س + ٦) = ٢ فإن : س ∈ ....

(أ) {-١ ، ٦} (ب) {-٦ ، ١} (جـ) {-١} (د) {٦}

(١٢) $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س + ٧} - ٢}{س + ٣}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٢}$



(١٣) فى الشكل المقابل الدالة تزايدية فى الفترة ....

(أ)]٠ ، ∞[

(ب)]-٢ ، ٠[

(جـ)]-∞ ، -٢[

(د)]-٤ ، ٠[

(١٤) فى المثلث ء هـ و إذا كان : ق(∠هـ) = ٦٠° ، ق(∠ء) = ٣٠° ، هـَ = ١٥ $\sqrt{٣}$

فإن : ءَ = ... سم.

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ١٥ (د) ٦٠

(١٥) إذا كان : $(\frac{١}{٨})^{س} = \frac{١}{١٦}$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)^{٥} - ٣٢}{س}$ = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٦٤ (جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

(١٧) إذا كانت د(س) = $٣^{س}$ فإن قيمة س التى تحقق المعادلة :

د(س + ١) − د(س − ١) = ٢٤ هى ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٨

(١٨) فى المثلث أ ب جـ فيه : أَ = ٥ سم ، بَ = ٧ سم ، ق(∠جـ) = ٦٥°

فإن : جـَ ≃ .... سم لأقرب رقم عشرى واحد.

(أ) ٥,٧ (ب) ٧,٦ (جـ) ٦,٧ (د) ٧,٥

(١٩) مجموعة حل المعادلة : $لو_{٣}$ س × $لو_{٢}$ ٣ = ٥ فى ح ....

(أ) {٣٢} (ب) {٥} (جـ) {١٥} (د) {٢}

(٢٠) فى المثلث أ ب جـ يكون : $\frac{٥ جـَ}{جا جـ}$ = ... نق.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

(٢١) إذا كان $لو_{٧}$ س = ١ فإن : $لو_{٧}$ (٧ س) + $لو_{٣}$ (س + ٢) = ...

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٣

(٢٢) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٣ س^٢ + أ س - ٢ & \text{عند } س < ٣ \\ ٢ س + ب & \text{عند } س > ٣ \end{cases}$

وكانت : $\lim_{س \to ٣}$ د (س) = ١٦ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) -١ (د) ١٣

(٢٣) مجال الدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س| - ٢}$ هو ....

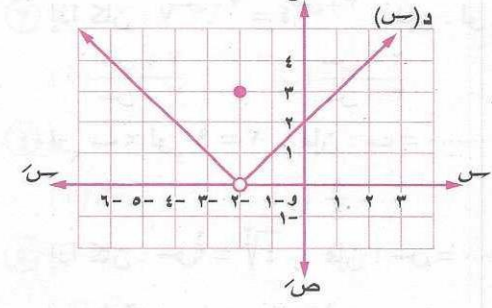
(أ) ح - {٢} (ب) ح - {١ ، ٢} (جـ) ح (د) ح - {-٢ ، ٢}

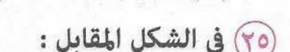
(٢٤) عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ حيث : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ب = ٣ سم

، أ = ٥ سم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) لا يوجد مثلث. (د) عدد لا نهائى.

(٢٥) فى الشكل المقابل :





$\lim_{س \to -٢}$ د (س) = ...

(أ) ٣

(ب) ٢

(جـ) صفر

(د) غير موجودة.

(٢٦) فى المثلث أ ب جـ إذا كان : جا ب = $\frac{جـ}{٢ أ}$ فإن : المثلث أ ب جـ فيه ....

(أ) جـ = أ (ب) جـ = ب (جـ) أ = ب (د) أ = ٢ ب

(٢٧) $\lim_{س \to ٠}$: $\frac{٢ - ٢ جتا س}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : | ٢ س - ٣ | ≤ ٩

٢ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} أ - س^٢ & ، س \le -٢ \\ س & ، س > -٢ \end{cases}$

متصلة عند س = -٢ أوجد : قيمة أ

٩ محافظة البحيرة

إدارة الدلنجات
توجيه الرياضيات

اختبار تفاعلى ٩

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\frac{\text{لو } ٥٠٠ - \text{لو } ٥}{\text{لو}_{\text{س ص}} \text{س} + \text{لو}_{\text{س ص}} \text{ص}} =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٢ (د) ١

② إذا كان : $٣^{\text{لو}_٧ \text{س}} \times ٥^{\text{لو}_٧ \text{س}} = ٢٢٥$ فإن : س = ...

(أ) ٤٩ (ب) ٢٥ (جـ) ٣٦ (د) ١٥

③ إذا كان : $٧^{\text{س} - ٢} = ٤^{\text{س} + ٣}$ فإن : $\text{لو}_٤ ٧ =$ ....

(أ) $\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ٣}$ (ب) $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ٣}$ (جـ) $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢}$ (د) $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س} + ٢}$

④ $\text{لو}_٩ \text{ب} \times \text{لو}_٢ ٩ = ٢$ فإن : ب = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

⑤ إذا كان : $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{٤}$ فإن : س = ...

(أ) ± ٢ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

⑥ إذا كانت : د (س) = ٥ س فإن : $\text{د}^{-١}(٢) + \text{د}^{-١}(٣) =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) ٢٥

⑦ مجموعة حل المعادلة : $٣^{٢\text{س}} - ٣^{\text{س}} - ٦ = ٠$ فى ح هى ....

(أ) {١ ، ٢} (ب) {١} (جـ) {٠} (د) {٠ ، ١}

⑧ إذا كان : د (س) = $\frac{\text{جا } ٣ \text{ س}}{\text{س}^٢ + ٤}$ دالة فردية

فإن : د (٧) + د (٦) + د (٥) + ... + د (-٥) + د (-٦) + د (-٧) = ...

(أ) -٧ (ب) صفر (جـ) -١ (د) ٧

⑨ إذا كان : د (س) = $\text{س}^٢ + ٦$ ، ر (س) = ٣ س فإن : (د ∘ ر) (٣) = ...

(أ) ٧٨ (ب) ٣٠ (جـ) ٨٧ (د) ٦٠

(١٠) مجموعة حل المعادلة : $س^2 - |س| = ١٢$ فى ح هى ....

(أ) {-٣ ، ٢} (ب) {-٤ ، ٤} (جـ) {٣ ، ٤} (د) {-٣ ، ٣}

(١١) نقطة التماثل لمنحنى الدالة د : د (س) = $\frac{١}{س - ١}$ + ٢ هى ....

(أ) (-١ ، ٢) (ب) (-٢ ، ١) (جـ) (-١ ، -٢) (د) (١ ، ٢)

(١٢) مجال الدالة د : د (س) = $\sqrt[٤]{س - ٢}$ هو ....

(أ) ح (ب)]-∞ ، ٢] (جـ)]-٢ ، ١] (د) [٢ ، ∞[

(١٣) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه : ٦ سم ، ١٠ سم ، ١٤ سم تساوى ....

(أ) ١٢٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ١٣٥° (د) ٩٠°

(١٤) عدد حلول Δ أ ب حـ الذى فيه : أ = ٧ سم ، حـ = ٩ سم ، ق (∠ حـ) = ٦٠° يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

(١٥) Δ أ ب حـ فيه : أ = ٦ سم ، ب = ٤ سم ، جا حـ = $\frac{١}{٣}$ فإن : حـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٦) إذا كان : Δ س ص ع فيه : $\frac{س ص ع}{جا س جا ص جا ع}$ = ٢١٦ فإن مساحة الدائرة المارة برؤوسه تساوى .... π وحدة مربعة.

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ١٦

(١٧) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^2 - ٦ س + ٨}{س^2 - ٥ س + ٦}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) -١ (د) ٤

(١٨) $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} \frac{س^{-٣} + ٢ س^{-٢} + ١}{٢ س^{-٣} + س^{-١} + ٣}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) -٣ (د) $\frac{١}{٣}$

(١٩) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{\sqrt{س - أ} - ٨}{س - ٢}$ = ل ، أ ، ل ∈ ح . فإن : أ = ...

(أ) ٦٢ (ب) -٦٢ (جـ) ٦٦ (د) ١٤

(٢٠) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + س - ١٠}{س - ٢} =$ ....

(أ) ١٥ (ب) ١٤ (جـ) ١٣ (د) ١٢

(٢١) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٢س + ٣)^٣ - ٢٧}{٢س} =$ ....

(أ) ٢٧ (ب) ١٨ (جـ) ٩ (د) ٣

(٢٢) $\lim_{س \to ١} \frac{ظا (١ - س)}{٢س - ٢} =$ ....

(أ) −١ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

(٢٣) Δ أ ب جـ فيه : $\frac{أ - ب}{ب + جـ} = \frac{جـ}{أ + ب}$ فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) °٦٠ (ب) °٣٠ (جـ) °٤٥ (د) °١٢٠

(٢٤) Δ أ ب جـ محيطه ٢٤ سم ، ق (∠ ب) = °٣٥ ، ق (∠ جـ) = °٤٨

فإن : ب ≃ .... لأقرب سم.

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ٦

(٢٥) جملة مبلغ ٥٠٠٠ جنيه موضوع فى بنك يعطى فائدة مركبة سنويًا قدرها ٥ ٪
لمدة ٧ سنوات يساوى .... لأقرب جنيه.

(أ) ٦٧٥٠ (ب) ٥٣٥٠ (جـ) ٧٠٣٦ (د) ٨٥٠٠

(٢٦) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} أس + ٣ & ، س < ٢ \\ أس + ب & ، س > ٢ \end{cases}$

، $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = −١ فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (−٢ ، ٣) (ب) (−٢ ، ٥) (جـ) (−٢ ، −٣) (د) (−٥ ، ٢)

(٢٧) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^٤ - ١}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٤ أ & ، س = ١ \end{cases}$

متصلة عند س = ١ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) صفر (د) ٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{٦ س ظا}^{٢}\text{ ٤ س}}{\text{قتا ٨ س}}$

---

(٢) ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = (١ − س)^{٣} + ١ ومن الرسم استنتج مدى الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.



١٠ محافظة الفيوم — توجيه الرياضيات



أولًا أسئلة الاختيار من متعدد



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المتباينة : | ٢ − س | ≤ ٤ هى ....

(أ) [−٢ ، ٦] (ب) ح − [−٢ ، ٦]

(جـ)]−٢ ، ٦[(د) ح −]−٢ ، ٦[

(٢) $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٤} - ٨١}{\text{س}^{٥} + ٢٤٣}$ = ...

(أ) $\dfrac{-٤}{١٥}$ (ب) $\dfrac{-١٢}{٥}$ (جـ) $\dfrac{١٢}{٥}$ (د) $\dfrac{٤}{١٥}$

(٣) فى Δ أ ب حـ إذا كان : ٣ جا أ = ٤ جا ب = ٦ جا حـ   فإن : جتا أ = ...

(أ) $\dfrac{١}{٤}$ (ب) $\dfrac{-١}{٤}$ (جـ) $\dfrac{٤٣}{٤٨}$ (د) $\dfrac{-١١}{٢٤}$

(٤) مجموعة حل المعادلة : (لو س)^{٢} − لو س^{٢} = صفر هى ....

(أ) {١ ، ١٠} (ب) {١ ، ١٠٠}

(جـ) {١٠ ، ١٠٠} (د) {٠ ، ١٠٠}

(٥) إذا كانت : د (س) = ٣ + $\sqrt{\text{٥ − س}}$ فإن مجال الدالة د$^{-١}$ (س) هو ....

(أ) [٥ ، ∞[(ب) [٣ ، ∞[

(جـ)]−∞ ، ٥] (د)]−∞ ، ٣]

⑥ إذا كانت : $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - (٤ + أ) س + ٤ أ}{س - ٤} = ٧$ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ١١ (د) ٣-

⑦ مجال الدالة د (س) = $\sqrt{٤ - س}$ هو ....

(أ)]٤ ، ∞[(ب)]-٤ ، ∞[

(جـ)]-∞ ، ٤[(د)]-∞ ، -٤[

⑧ فى المثلث أ ب حـ إذا كان : أَ = بَ فإن : جتا ب = ...

(أ) $\frac{حَ}{٢ أَ}$ (ب) $\frac{أَ}{٢ حَ}$ (جـ) $\frac{بَ}{٢ حَ}$ (د) $\frac{٢ حَ}{بَ}$

⑨ إذا كانت : $\lim_{س \to \infty} \frac{(أ - ٢) س^٢ - ٥}{٣ س^٢ - ٤} = ١$ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢- (جـ) ٥ (د) ١

⑩ إذا كان : ٣ لو س + ٤ لو ص - لو س ص^٢ = ٢ (لو ٢ + لو ٣)

فإن : ص = ...

(أ) ٦ س (ب) $\frac{٦}{س}$ (جـ) س (د) $\frac{س}{٦}$

⑪ فى Δ أ ب حـ يكون : حَ (أَ جتا ب + بَ جتا أ) = ...

(أ) أَ^{٢} (ب) بَ^{٢} (جـ) حَ^{٢} (د) ٢ حَ^{٢}

⑫ إذا كانت د (س) دالة فردية فإن قيمة المقدار : $\frac{٥ د (س) - ٤ د (-س)}{٣ د (-س)} =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٣- (جـ) ٥ (د) ٤-

⑬ إذا كانت د (س) = $\begin{cases} جا ٢ س ظتا ٥ س & \text{حيث } س > ٠ \\ \frac{٢}{٥} جتا س & \text{حيث } س < ٠ \end{cases}$

فإن : $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) ليس لها وجود

⑭ إذا كان : أَ = ١٢ سم ، بَ = ١٠ سم ، ق (∠ ب) = ٧٠° فإن عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب حـ هى ....

(أ) حل واحد. (ب) حلان.

(جـ) ليس له حل. (د) عدد لا نهائى من الحلول.

(١٥) إذا كانت د (س) = $٣^{س}$ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) + د (س + ٢) = ٩٠
هى ....

(أ) {٠ ، ٢}　(ب) {١ ، ٢}　(جـ) {٢}　(د) {٠ ، ١}

(١٦) مساحة سطح المثلث المحصور بين منحنى الدالة د (س) = |س| - ٣
ومحور السينات يساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٩　(ب) ٦　(جـ) ٣　(د) ١٨

(١٧) $\lim_{س \leftarrow ٥} \frac{\sqrt{٢س - ١} - ٣}{س^{٢} - ٢٥}$ = ...

(أ) ٣٠　(ب) $\frac{١}{٣٠}$　(جـ) $\frac{١}{٥}$　(د) $\frac{-١}{٣٠}$

(١٨) مجال الدالة $لو_{س - ١}$ (س + ٢) هو ....

(أ)]-٢ ، ∞[- {١}　(ب)]١ ، ∞[
(جـ)]١ ، ∞[- {٢}　(د)]-٢ ، ∞[

(١٩) إذا كانت : $٣ س^{\frac{٢}{٣}} = ص^{\frac{٣}{٢}} = ٢٧$ فإن : |س| + ص = ...

(أ) ٢٤　(ب) ٣٠　(جـ) ٣٦　(د) ٤٢

(٢٠) $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{\frac{٥}{س} - ٣}{١ + \frac{٢}{س}}$ = ...

(أ) ٥　(ب) $\frac{٥}{٢}$　(جـ) $\frac{-٣}{٢}$　(د) -٣

(٢١) فى Δ س ص ع إذا كان : ق (∠ س) = ٦٠° ، ق (∠ ص) = ٣٠°
، صَ = ٤ سم فإن : عَ = ... سم

(أ) ٦　(ب) ٤ $\sqrt{٣}$　(جـ) ٨　(د) ٨ $\sqrt{٣}$

(٢٢) إذا كانت : د (س) = ٢ س + ١ ، ر (س) = $\sqrt{س + ٣}$
فإن : (د ∘ ر) (٦) = ...

(أ) ٤　(ب) ٧　(جـ) ١٣　(د) ٣

(٢٣) Δ أ ب حـ مساحة سطحه ٢١ $\sqrt{٣}$ $سم^{٢}$ ، أَ = ٦ سم ، ق (∠ ب) = ٦٠°
فإن : حـَ = ... سم

(أ) ١٤　(ب) ٧　(جـ) ٧ $\sqrt{٣}$　(د) ١٤ $\sqrt{٣}$

(٢٤) إذا كان : $٥^{س+٢} = ٧^{س+٢}$ فإن : $٣^{س+٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١٥ (د) ٢١

(٢٥) الشكل المقابل يمثل د (س)

فإن : د (س) = ...

(أ) متصلة عند س = ٢

(ب) لها نهاية عند س = ٢

(جـ) العبارتان أ ، ب صحيحتان.

(د) العبارتان أ ، ب خاطئتان.

(٢٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{٣س - ٥ ظا ٢س}{جا ٣س + ٤س}$ = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

(٢٧) مجموعة حل المعادلة : $لو_{٣}$ س = $لو_{س}$ ٣ هى ....

(أ) {٣} (ب) $\{\frac{١}{٣}\}$ (جـ) $\{٣ ، \frac{١}{٣}\}$ (د) {٣ ، −٣}

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ ارسم الشكل البيانى للدالة د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣ ، ومن الرسم عين مجال الدالة ومداها واطرادها ، هل الدالة زوجية أو فردية أو غير ذلك.

---

٢ إذا كانت د (س) = { ٣س + ٤ حيث س ≤ ٢ ؛ (س + ١) م + ك حيث −١ ≤ س < ٢ ؛ $٢س^{٣}$ + س + ٧ حيث س < −١ } متصلة فى ح

فأوجد قيمة كل من م ، ك



١١ محافظة بنى سويف

إدارة اهناسيا
توجيه الرياضيات

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة د : د (س) = $(١ - س)^{٢}$ - ٢ تناقصية فى ....

(أ)]-∞ ، ١[(ب)]-∞ ، -١[(جـ)]٢ ، ∞[(د)]-١ ، ∞[

(٢) إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ فإن : د (س) × د (-س) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٩

(٣) مجموعة حل المعادلة : |س| + ٧ = ٥ هى ....

(أ) {-٢} (ب) {١٢} (جـ) ∅ (د) {٢}

(٤) إذا كانت : د (س) = $س^{٢}$ + ١ ، ر (س) = س - ١
فإن : (د ∘ ر) (٢) = ...

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) -١ (د) ١

(٥) الدالة الأحادية من بين الدوال الآتية هى .... حيث س ∈ ح

(أ) د (س) = |س + ٧| (ب) د (س) = س + ١
(جـ) د (س) = حا ٢ س (د) د (س) = ٣ $س^{٢}$

(٦) مدى الدالة د (س) = $س^{٣}$ حيث س ∈]-٣ ، ٢] هو ....

(أ)]٢ ، ∞[(ب) ح (جـ)]-٢٧ ، ٨] (د)]-٢٧ ، ٨]

(٧) إذا كانت : $٣^{س - ٣}$ = $٥^{س - ٣}$ فإن : $٥^{س}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٢٥ (جـ) ١٢٥ (د) ٢

(٨) الدالة العكسية للدالة : ص = ٢ س + ١ هى ....

(أ) س = ص + ١ (ب) ص = ٢ س + ١
(جـ) ص = $\frac{١}{٢}$ س - ١ (د) ص = $\frac{١}{٢}$ (س - ١)

(٩) إذا كانت : $٥^{س} \times ٥^{ص} = ٢٥$ ، $٣^{ص} \div ٣^{س} = ٨١$ فإن : $س^{ص} =$ ....

(أ) ٣ (ب) ‎-١ (جـ) ٥ (د) ٩

(١٠) مجال الدالة د (س) = $لو_{س - ٣}$ (س - ٢) هو ....

(أ)]٢ ، ∞[(ب)]٣ ، ∞[

(جـ)]٣ ، ∞[- {٣} (د)]٣ ، ∞[- {٤}

(١١) مجموعة حل المعادلة : $٢٥^{س} - ١٠ \times ٥^{س} + ٢٥ =$ صفر ....

(أ) {١} (ب) {١ ، ٢} (جـ) {-١} (د) ∅

(١٢) نهــــا (س ← ٥) $\frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٤

(١٣) نهــــا (س ← ٣) $\frac{س^{٢} - س - ٦}{س - ٣} =$ ....

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ٥ (جـ) ١ (د) صفر

(١٤) نهــــا (س ← ٠) $\frac{(س + ٣)^{٤} - ٨١}{س} =$ ....

(أ) ١٠٨ (ب) ٧٢ (جـ) ٣٦ (د) ٣٢٤

(١٥) فى المثلث أ ب حـ إذا كان : أ = ٤ سم ، ب = ٥ سم ، جتا حـ = ٠,٤ .
فإن : حـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(١٦) نهــــا (س ← ١) $\frac{س^{٧} + س^{٥} - ٢}{س - ١} =$ ....

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(١٧) إذا كانت : نهــــا (س ← ∞) $\frac{(ك - ٢) س^{٢} + ٥}{٣ س^{٢} + ٤ س} = ٢$ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٨

(١٨) نهــــا (س ← ٤) $(٣ س + \sqrt{س}) =$ ....

(أ) ٨ (ب) ١٩ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(١٩) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٣س - ك}{س^٢ - ١} = \frac{٥}{٢}$ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) -١ (د) -٣

(٢٠) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{طا ٣س}{س} & ، س > ٠ \\ ٢ + جتاس & ، س \leq ٠ \end{cases}$

فإن : $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٤ (د) ٣

(٢١) المثلث أ ب حـ فيه : حا أ + حا حـ = ٤ حا ب ومحيطه ٣٠ سم

فإن : ب = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ١٤

(٢٢) المثلث أ ب حـ فيه : ق (∠ أ) = ٣٠° ، أ = ٦ سم ، ب = ١٢ سم

فإن عدد المثلثات الممكنة = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٣) إذا كان طول قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ = ٣ سم

فإن : $\frac{أ ب حـ}{حا أ حا ب حا حـ}$ = ...

(أ) ٢١٦ (ب) ٨ (جـ) $\frac{٢٧}{٨}$ (د) ٢٧

(٢٤) المثلث أ ب حـ فيه : ٣ حا أ = ٦ حا ب = ٤ حا حـ

فإن قياس أصغر زاوية فى المثلث ≃ ....

(أ) ٢٩ (ب) ١٠٤ (جـ) ٧٦ (د) ١٥١

(٢٥) المثلث أ ب حـ فيه : أ = ٨ سم ، ق (∠ ب) = ٥٠° ، ق (∠ أ) = ٦٠°

فإن مساحة المثلث أ ب حـ ≃ .... سم^٢

(أ) ٥٦ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٧ (د) ٤٨

(٢٦) مستطيل طولا بعديه (لو ٤٠) سم ، (لو ٢٥) سم محيطه = ... سم

(أ) ٤ سم　　(ب) (لو ٦٥) سم

(جـ) ٢ (لو ٦٥) سم　　(د) ٦ سم

(٢٧) أى من الدوال الآتية ليست دالة أسية ؟

(أ) د : د (س) = $٧^{س}$　　(ب) د : د (س) = $(-٣)^{س}$

(جـ) د : د (س) = $٧^{س+١}$　　(د) د : د (س) = $\left(\frac{٧}{٨}\right)^{س-١}$

ثانيًا **الأسئلة المقالية**

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ استخدم منحنى الدالة د حيث د : د (س) = $س^{٢}$ لتمثيل الدالة ر (س) = $-(س-١)^{٢}$

ومن الرسم عين مدى ر وابحث اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

---

٢ أوجد : $\underset{س \leftarrow ١٦}{نهـا} \frac{س - ٦\sqrt{س} + ٨}{س - ١٦}$

١٢ محافظة المنيا

إدارة المنيا
نموذج (أ)



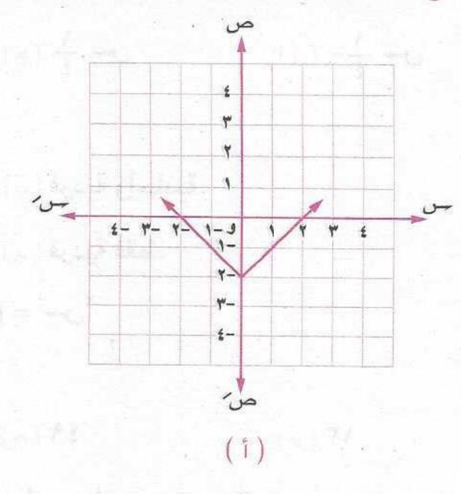
أولًا **أسئلة الاختيار من متعدد**

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

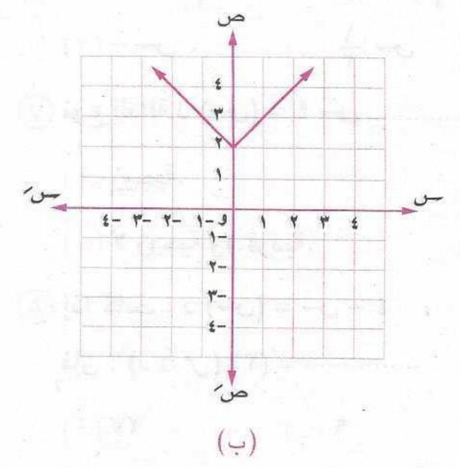
(١) مجال الدالة د (س) = $\sqrt{س^{٢} + ٩}$ هو ....

(أ) ح　　(ب) {٣ ، -٣}　　(جـ) ح - {-٩}　　(د) (-٣ ، ٣)

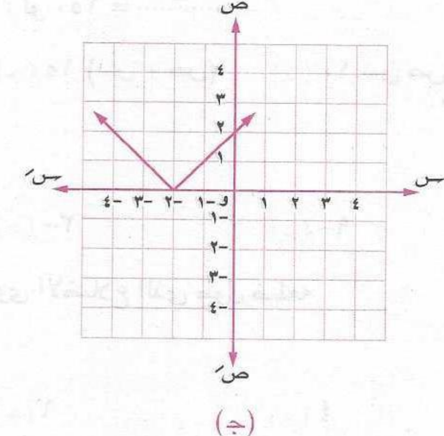
(٢) الشكل الذى يمثل منحنى الدالة د (س) = | س + ٢ | هو ....



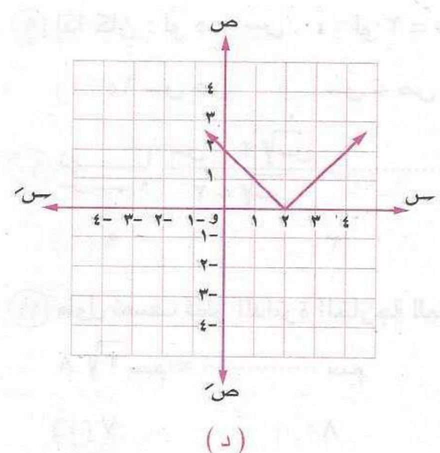
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

(٣) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٦ سم ، ١٠ سم ، ١٤ سم يساوى ....

(أ) °١٣٥ (ب) °٩٠ (جـ) °١٢٠ (د) °١٥٠

(٤) $\underset{س \leftarrow 1}{نهـا} \frac{س^{3} + س^{2} + 4}{س + 1}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) ٢

(٥) إذا كان : $لو_{س}$ ١٢٥ = ٣ فإن : س = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٦) إذا كان : $لو_م ٤ = س$ فإن : $لو_م \frac{١}{٤} = ...$

(أ) $-س$ (ب) $\frac{١}{٢} س$ (جـ) $\frac{١}{٤} س$ (د) $-\frac{١}{٤} س$

(٧) نوع الدالة د (س) = ٤ س ....

(أ) زوجية. (ب) فردية وأحادية.

(جـ) لا زوجية ولا فردية. (د) فردية فقط.

(٨) إذا كانت : د (س) = س + ٤ ، ر (س) = $س^٢$

فإن : (د ∘ ر) (٣) = ...

(أ) ٢٧ (ب) ٩ (جـ) ٤٩ (د) ١٣

(٩) إذا كان : لو ٥ = س ، لو ٣ = ص فإن : لو ١٥٠ = ...

(أ) ١٥ س ص (ب) س + ص + ١ (جـ) ١٥ (س + ص) (د) ١٠ س ص

(١٠) $\lim_{س \to ٩} \frac{س - ٣\sqrt{س}}{٣ - \sqrt{س}} = ...$

(أ) ٩ (ب) ٣ (جـ) −٣ (د) −٩

(١١) طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه

$٨\sqrt{٣}$ سم = ... سم

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٤

(١٢) Δ أ ب حـ فيه : جا أ + جا ب + جا حـ = ٢,٤ ومحيط المثلث = ٢٤ سم فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(١٣) محور تماثل الدالة : د (س) = $(س + ٣)^٢ + ٤$ هو ....

(أ) س = ٤ (ب) س = −٤ (جـ) س = ٣ (د) س = −٣

(١٤) مجموعة حل المعادلة فى ح : لو س + لو (س + ٩) = ١ هى ....

(أ) {١ ، ١٠} (ب) {١} (جـ) {٩} (د) {١ ، ٩}

(١٥) $\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{\sqrt{س + ١٢} - ٤}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١٦ (جـ) -٨ (د) ٨

(١٦) Δ أ ب جـ فيه : ق (∠ب) = ٣٥° ، ق (∠جـ) = ٥٥° ، أ = ١٠ سم

فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ...

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٨

(١٧) إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ ، فإن قيمة س التى تحقق أن :

د (س + ١) - د (س - ١) = ٢٤ تساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) -١

(١٨) إذا كانت : د (س) = ٣ س + ٢ فإن : $د^{-١}$ (س) = ...

(أ) ٢ س - ٣ (ب) $\frac{١}{٣}$ س + ٢

(جـ) ٢ س + $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٣}$ (س - ٢)

(١٩) مجموعة حل المتباينة : | س + ٢ | < ٦ فى ح تساوى ....

(أ)]-٨ ، ٤[(ب) ح -]-٨ ، ٤[

(جـ) ح - {-٨ ، ٤} (د) ح - [-٨ ، ٤]

(٢٠) فى Δ أ ب جـ إذا كان : $ب^{٢}$ = $أ^{٢}$ + $جـ^{٢}$ + أ جـ فإن : ق (∠ب) = ...

(أ) ١٢٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٣٠° (د) ٦٠°

(٢١) إذا كان : $\lim_{س \to \infty} \frac{أ س^{٢} + ٦ س}{٧ + ب س}$ = ٣ فإن : قيمة أ + ب = ...

(أ) ٩ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١٨

(٢٢) المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د (س) = ٤ - | س | ومحور السينات = ...

وحدة مساحة.

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٣٢ (د) ١٢

(٢٣) إذا كان : $لو_{ب} أ = \frac{٢}{٣}$ فإن : $لو_{أ} ب$ = ...

(أ) ٦ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) ٥ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٢٤) $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{\text{طا ٣ س حا ٦ س حتا ٤ س}}{س^٢}$ = ...

(أ) ٧٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٨ (د) ٩

(٢٥) الشكل المقابل يمثل

منحنى الدالة د (س)

فإن : د (١) + $\lim_{س \to ١^+}$ د (س)

+ $\lim_{س \to ١^-}$ د (س) = ...

(أ) ٤ (ب) ٦

(جـ) ٨ (د) ١٠

(٢٦) إذا كانت : د (س) = $\frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$ حيث س ≠ ٤ فإن قيمة د (٤) التى تجعل الدالة متصلة عند س = ٤ تساوى ....

(أ) صفر (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) ٨

(٢٧) Δ أ ب حـ مساحته ٤٩ $\sqrt{٣}$ سم^٢ ، فيه : أ = ١٤ سم ، ق(∠ب) = ٦٠°

فإن : ب = ... سم

(أ) ١٤ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٠

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

(١) ارسم منحنى الدالة ر (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ١ موضحًا المجال والمدى.

(٢) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + أ س + ١ & ، س < ٣ \\ ٧ & ، س = ٣ \\ ٢ أ + ب س & ، س > ٣ \end{cases}$

متصلة عند س = ٣ احسب كل من : أ ، ب



١٣ محافظة أسيوط

إدارة القوصية
توجيه الرياضيات

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① محور تماثل الدالة د : د (س) = $(س + ٢)^٢$ هو ....

(أ) س = ٢ (ب) س = −٢ (جـ) ص = ٢ (د) ص = −٢

② إذا كانت : $س^{\frac{٣}{٢}}$ = ٦٤ فإن : س = ...

(أ) ٥١٢ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٢

③ إذا كان : $لو_٣$ ٣ س − $لو_٩$ س = ٣ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

④ إذا كانت : د (س) = $\sqrt{س + ٤}$ ، ر (س) = $س^٢$ − ٤

فإن : (د ∘ ر) (س) = ...

(أ) |س| (ب) $س^٢$ (جـ) $س^٢$ + ٤ (د) ٢

⑤ $\underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} \frac{س^٢ - ٣ س - ١٠}{س - ٥}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٧ (د) ٤

⑥ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{طا^٢ ٢ س \ حتا ٥ س}{حا ٢ س^٢}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٢ (د) ١

⑦ عدد الحلول الممكنة التى تحقق الشروط الآتية :

Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ أ) = ١٥٠° ، أ = ٤ سم ، ب = ٦ سم هو ....

(أ) عدد لا نهائى. (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

⑧ الدالة د : س ⟵ ٤ س فإن : $د^{-١}$: س ⟵ ....

(أ) −س (ب) −٤ س (جـ) $\frac{١}{٤}$ س (د) $\frac{-١}{٤}$ س

(٩) مجموعة حل المتباينة : |س| - ١ > صفر فى ح هى ....

(أ) ح - [-١ ، ١]　　(ب)]-١ ، ١[

(جـ) ح -]-١ ، ١[　　(د) [-١ ، ١]

(١٠) نهــــا $\frac{١}{س}$ |س - ٣| = ...
س ← ∞

(أ) صفر　　(ب) ∞　　(جـ) ١　　(د) -٣

(١١) طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث الذى فيه : ق(∠ب) = ٥٠° ، ق(∠حـ) = ٦٥°
، حـَ - بَ = ٦ سم يساوى .... (لأقرب سم)

(أ) ٤٠　　(ب) ٤١　　(جـ) ٤٢　　(د) ٤٣

(١٢) Δ أ ب حـ فيه : ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠حـ) = ٤٠° ، بَ = ١٢,٩ سم
فإن : أَ ≃ .... سم

(أ) ٥,٣　　(ب) ١١,٣　　(جـ) ٢٢,٦　　(د) ١٢

(١٣) نهــــا س جتا س = ...
س ← π

(أ) صفر　　(ب) -π　　(جـ) π　　(د) غير موجودة

(١٤) Δ أ ب حـ فيه : أَ^{٢} + بَ^{٢} - حـَ^{٢} = ك أَ بَ　فإن : ك ∈ ....

(أ) [-٢ ، ٢[　　(ب)]-٢ ، ٢]　　(جـ) [-٢ ، ٢]　　(د)]-٢ ، ٢[

(١٥) إذا كانت : د(س) دالة فردية على [- س ، س]
فإن : د(- س) + د(س) = ...

(أ) ٢ س　　(ب) غير معرفة.　　(جـ) -٢ س　　(د) صفر

(١٦) إذا كانت : د(س) = لو$_{س}$ (س - ٣) فإن مجالها هو ....

(أ)]٣ ، ∞[　　(ب) [٣ ، ∞[　　(جـ) [٠ ، ∞[　　(د)]٠ ، ∞[

(١٧) إذا كانت د : د(س) = $\frac{س + ٣}{س^{٢} + ك س + ٩}$ متصلة على ح　فإن : ك ∈ ....

(أ) ٦　　(ب) -٦　　(جـ)]-٦ ، ٦[　　(د) [-٦ ، ٦]

(١٨) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{س - ٤}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ∞ (د) غير موجودة.

(١٩) إذا كانت : د (س) = $٧^{س}$ فإن : د (س) × د (ص − س) = ...

(أ) ٧ (ب) $٧^{س}$ (جـ) $٧^{ص}$ (د) $٧^{(٢س + ص)}$

(٢٠) نقطة تقاطع منحنى الدالة : د (س) = $(س - ١)^٣ - ١$ مع محور الصادات هى ....

(أ) (−١ ، −٢) (ب) (٠ ، −٣) (جـ) (٠ ، −٢) (د) (١ ، ٢)

(٢١) مثلث أطوال أضلاعه ٦ ، ١٠ ، ١٤ سم فإن قياس أكبر زواياه تساوى ....°

(أ) ٦٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ١٣٥ (د) ١٥٠

(٢٢) إذا كان منحنى الدالة د (س) = $لو_{م}$ س يمر بالنقطة (٨ ، ٣)

فإن : د (٤) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) −٢

(٢٣) مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه $لو_{٨}$ ٢ سم فإن محيطه يساوى ....

(أ) $لو_{٨}$ (٦) (ب) ١ (جـ) ٨ (د) ٦

(٢٤) $\lim_{س \to ∞} \frac{٣ + س^{-٢}}{٤ س^{-٣} + ١}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{١}{٣}$

(٢٥) $\lim_{س \to -٢} \frac{(س + ٣)^٥ - ١}{س^٢ - ٤}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) $-\frac{٥}{٤}$ (جـ) $-\frac{٥}{٨}$ (د) ٥

(٢٦) Δ أ ب حـ فيه : ب = ٢,٥ سم ، حـ = ٢ سم ، حا أ = $\frac{٢}{٥}$

فإن : Δ أ ب حـ يكون ....

(أ) متساوى الساقين. (ب) متساوى الأضلاع.

(جـ) قائم الزاوية. (د) قائم الزاوية ومتساوى الساقين.

(٢٧) إذا كانت د : د (س) = $أ^{س}$ ، (أ > ١) تكون د (س) < ١ عندما س ∈ ....

(أ) ح (ب) $ح^{+}$ (جـ) $ح^{-}$ (د) $ح^{*}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

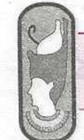
أجب عن السؤالين الآتيين :

١ ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = $\frac{١}{|س - ١|}$ ومن الرسم ابحث اطرادها واستنتج مداها.

---

٢ إذا كانت : د (س) = $\frac{٣ - \sqrt{س + م}}{س^{٢} - ٩}$ حيث $\lim\limits_{س \to ٣}$ د (س) = ك حيث ∈ ح

فأوجد قيمة : ك × م



١٤ محافظة سوهاج

إدارة المنشأة
توجيه الرياضيات

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان محيط Δ أ ب حـ = ٢٤ سم ، ق (∠ب) = ٣٠° ، ق (∠حـ) = ٤٨°

فإن : ب = ...

(أ) ٤,٥ سم (ب) ٦,٤ سم (جـ) ٥,٤ سم (د) ٧,٢ سم

(٢) إذا كان : د (٣) = ٥ ، ٢ ر (-١) = ٦ فإن : (د ٥ ر) (-١) = ...

(أ) ٣ (ب) ١١ (جـ) ١٥ (د) ٥

(٣) مجموعة حل المعادلة : |س - ٣| = ٢ س - ٣ فى ح هى ....

(أ) {٠} (ب) {٢} (جـ) {-٢} (د) {٠ ، ٢}

(٤) أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك بفائدة سنوية مركبة ٧ ٪ فإن إجمالى المبلغ والربح بعد ٥ سنوات = ... جنيه (مقربًا لأقرب عدد صحيح)

(أ) ٧٠٣٦ (ب) ٧٠١٣ (جـ) ٧١١٢ (د) ٨٠٠٠

٥ إذا كان : $٣^{٧ - ٢ س} = ١٣,٤$ فإن : س ≃ ....

(أ) ٢,٣٢ (ب) ٣,٢٣ (جـ) ٢,٨٧ (د) ٣,٧٨

٦ مجموعة حل المعادلة : $٣^{٢ س} - ١٠ × ٣^{س} + ٩ =$ صفر فى ح هى ....

(أ) {٠} (ب) {٢} (جـ) {-٢} (د) {٠ ، ٢}

٧ إذا كان : د (س) = $لو_{(س - ٣)}$ س فإن مجال د (س) هو ....

(أ) [٣ ، ∞[(ب)]٣ ، ∞[

(جـ) [٣ ، ∞[- {٤} (د)]٣ ، ∞[- {٤}

٨ Δ س ص ع فيه : س = ع فإن : جتا ع = ...

(أ) $\frac{ص}{س}$ (ب) $\frac{س}{٢ ص}$ (جـ) $\frac{ص}{س + ع}$ (د) $\frac{ص}{س + ص}$

٩ الدالة : د (س) = $س^{٢} - ٤$ تكون تزايدية فى الفترة ....

(أ)]-٤ ، ∞[(ب)]٠ ، ∞[

(جـ)]-∞ ، ٤[(د)]-∞ ، ٠[

١٠ $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٣} - ٨} =$ ....

(أ) $\frac{٢٠}{٣}$ (ب) $\frac{-٢٠}{٣}$ (جـ) -٤ (د) ٤

١١ $\lim_{س \to ∞} \frac{(أ - ٢) س^{٣} + ٦ س^{٢} - ٧ س + ١}{(ب - ٢) س^{٢} + ٥ س - ٣} = ٣$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) -١

١٢ $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} + س - ٢}{س - ١} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

١٣ الدالة د (س) = $\frac{١}{\sqrt{س - ٢} + ٣}$ مجالها ....

(أ) [٢ ، ∞[(ب)]٢ ، ∞[

(جـ) [٢ ، ∞[- {١١} (د)]٢ ، ∞[- {١١}

(١٤) إذا كانت د دالة زوجية وكان : ٧ د (س) − ٣ د (− س) = ١٢

فإن : د (٥) = ...

(أ) ١٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) −٥

(١٥) إذا كان : لو$_٣$ س + لو$_٣$ (س + ٦) = ٣ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) −٩ (جـ) −٣ (د) ٩

(١٦) إذا كان : ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا جـ فإن : $\frac{ب + جـ}{أ + ب}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٧}{٥}$ (جـ) $\frac{٧}{١٠}$ (د) ٢

(١٧) Δ أ ب جـ فيه : ق (∠ أ) = ١٢٠° ، أ = ١٠ سم ، ب = ١٢ سم

فإن عدد المثلثات التى تحقق ذلك هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٨) منحنى الدالة د : د (س) = (س + ٢)^٣ هو صورة المنحنى د (س) = س^٣ بإزاحة مقدرها وحدتان فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{و س}$ (ب) $\overleftarrow{و س}$ (جـ) $\overleftarrow{و ص}$ (د) $\overleftarrow{و ص}$

(١٩) إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة د$^{-١}$ فى النقطة ($\frac{٩}{أ}$ ، أ)

فإن : أ = ...

(أ) ± ٩ (ب) ٩ (جـ) ± ٣ (د) ٣

(٢٠) نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{جا^٢ ٢ س}{٥ س^٢}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٢٥}$ (د) $\frac{٢}{٢٥}$

(٢١) لو س + لو ص − لو ع$^{-١}$ = ٢ فإن : س ص ع = ...

(أ) ٢ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ١٠٠

(٢٢) فى Δ أ ب جـ يكون : $\frac{٢ أ}{جا أ}$ = ... نق

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٣) Δ متساوى الأضلاع طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ١٠ سم

فإن طول ضلعه = ...

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٠ $\sqrt{٣}$

(٢٤) د (س) = { س + ١ عندما س < أ ، ٣ س − ١ عندما س ≥ أ } متصلة عند س = أ فإن : أ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٥) فى الشكل المقابل :

نهــا د (س) = ... (س ← ٢)

(أ) غير موجودة. (ب) ٢

(جـ) ١ (د) صفر

(٢٦) نهــا (س ← ٣) $\frac{س^٢ - ٥ س + ٦}{س^٢ - ٩}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{١}{٦}$

(٢٧) إذا كانت د (س) متصلة عند س = ٣ ، د (٣^+) = د (٣^-) = ٢

فإن : د (٣) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) غير معرفة

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ ارسم منحنى الدال د (س) = | س − ١ | + ٢ ومن الرسم أوجد مدى الدالة وابحث اطرادها.

---

٢ أوجد : نهــا (س ← -١) $\frac{\sqrt{س^٢ + ٨} - ٣}{س + ١}$



١٥ محافظة أسوان

إدارة إدفو
توجيه الرياضيات

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① مجال الدالة د (س) = $\sqrt[3]{س - ٣}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح - {٣} (جـ) [٣ ، ∞[(د)]-∞ ، ٣]

② إذا كان : هـ (س) = (د ∘ ر) (س) وكان : د (س) = س + ١ ، ر (س^٢) = س^٢ + ١

فإن : هـ (٣) = ...

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٤ (د) ١٧

③ الدالة د (س) = س جا س دالة ....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) أحادية. (د) ليست زوجية ولا فردية.

④ مدى الدالة د (س) = $\frac{٢ س^٢ - ٢}{س^٢ - ١}$ هو ....

(أ) ح (ب) {٢} (جـ) ح - {±١} (د) ح - {٢}

⑤ مجموعة حل المتباينة : $\sqrt{(س - ١)^٢} \geq ١$ هى ....

(أ) ∅ (ب) [٢ ، ∞[(جـ)]-∞ ، ٢] (د) [٠ ، ٢]

⑥ إذا كان : $\sqrt[٤]{(س + ١٠)^٣} = ٨$ فإن : س^٢ = ...

(أ) ٩ (ب) ١٦ (جـ) ٣٦ (د) ٦٤

⑦ أودع رجل مبلغ ك جنيه فى بنك يعطى عائد ربع سنوى وفائدة مركبة قدرها ٨ ٪

فإن جملة المبلغ بعد سنة واحدة هو ....

(أ) ك (١ + ٠,٠٢) (ب) ك (١ + ٠,٠٨)

(جـ) ك (١ + ٠,٠٨)^٤ (د) ك (١ + ٠,٠٢)^٤

(٨) مجموعة حل المعادلة : $٤^{س + ٢} = س^{س + ٢}$ هى ....

(أ) {-٢} (ب) {٤} (جـ) {-٢ ، ± ٤} (د) ∅

(٩) الدالة العكسية للدالة د (س) = $\frac{١}{٢}$ - س هى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ - س (ب) ٢ + س (جـ) س - ٢ (د) س - $\frac{١}{٢}$

(١٠) قيمة س التى تحقق لو$_٤$ لو$_٢$ لو$_٣$ (س + ١) = ٠ هى ....

(أ) ٠ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ٨

(١١) مجموعة حل المعادلة : لو$_٣$ (س + ٦) = ٢ لو$_٣$ س هى ....

(أ) {٢ ، ٣} (ب) {-٢ ، ٣} (جـ) {٢} (د) {٣}

(١٢) إذا كان : لو س + لو ٥ = ٢ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(١٣) نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ هى ....

(أ) (٣ ، ٠) (ب) (-٣ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٣) (د) (٠ ، -٣)

(١٤) $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{أ س - ٧}{٤ س + ١} = ٥$ فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) ٢٠ (جـ) ٧ (د) ٤

(١٥) $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{٢ س^٣ - ١٦}{س^٢ - ٤} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ١٦

(١٦) $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{س + س \text{ جتا } س}{\text{جا } س \text{ جتا } س} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(١٧) $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} (٣ س^{-٤} + ٢ س^{-٣} + ١) =$ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

(١٨) إذا كان : $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ د (س) = ل ، $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ هـ (س) = م

فإن : $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ [د (س) + هـ (س)] = ...

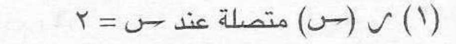
(أ) ل (ب) م (جـ) ل + م (د) ل × م

(١٩) إذا كانت د : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^2 - ٣ س - ١٨}{س + ٣} & ، س \neq -٣ \\ ٩ ك & ، س = -٣ \end{cases}$ متصلة عند س = -٣

فإن : ك = ...

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) -٣

(٢٠) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د (س) وكانت ر (س) = | د (س) | فإن :



(١) ر (س) متصلة عند س = ٢

(٢) $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ± ١

(٣) $\lim_{س \to ٢}$ ر (س) = ١ ....

(أ) (١) ، (٢) صح

(ب) (١) ، (٣) صح

(جـ) (١) ، (٢) ، (٣) صح

(د) (٢) ، (٣) صح

(٢١) $\lim_{س \to ٠}$ س قتا س = ...

(أ) ١ (ب) ∞ (جـ) -∞ (د) غير موجودة

(٢٢) إذا كانت : نق هى طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب حـ

فإن : ٢ نق حا أ = ...

(أ) أ (ب) ب (جـ) حـ (د) حا ب

(٢٣) قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٧ سم يساوى ....°

(أ) ١٥٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠

(٢٤) المثلث أ ب حـ الذى فيه : ب = ٣ سم ، ق (∠ب) = ٣٠° يكون محيط الدائرة المارة برؤوسه = ... سم

(أ) ٣ π (ب) ٣٠ π (جـ) ٦ π (د) ٢ π

(٢٥) طول قطر الدائرة الخارجة للمثلث س ص ع المتطابق الأضلاع وطول ضلعه ٦ سم هو .... سم

(أ) $٢\sqrt{٣}$ (ب) $٣\sqrt{٦}$ (جـ) $٦\sqrt{٣}$ (د) $٤\sqrt{٣}$

(٢٦) عدد الحلول الممكنة للمثلث ع ص س حيث ق (∠س) = ١١٢° ، سَ = ٤ سم ، صَ = ٧ سم ....

(أ) حل وحيد. (ب) حلان. (جـ) ثلاثة. (د) لايمكن الحل.

(٢٧) خماسى منتظم محيطه ٣٠ سم فإن مساحة سطحه تقريبًا تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٦٢ (ب) ٧٢ (جـ) ٨٢ (د) ٩٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث د (س) = ٢ - |س|
ومن الرسم استنتج المدى وفترات التزايد للدالة.

---

٢ أوجد قيمة النهاية الآتية إن وجدت (موضحًا خطوات الحل) : $\lim_{س \to ٠} \frac{(أ + ٢س)^{٦} - أ^{٦}}{٥س}$

الإجابــات

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الجبـــر

الاختبـــار الأول

١ ① (جـ) ② (د) ③ (جـ) ④ (أ)

٢
① تزايدية فى]٠ ، ٢[وثابتة فى]٢ ، ∞[
② تزايدية فى]-١ ، ٠[وتناقصية فى]٠ ، ٤[
③ تناقصية فى]- ∞ ، ١[وتزايدية فى]١ ، ∞[

الاختبـــار الثانى

١ ① (جـ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (ب) ⑤ (د) ⑥ (جـ)

٢
① (د ∘ ر) (س) = $\frac{١}{س + ٣}$
، مجال (د ∘ ر) = ح - {-٣}
② (ر ∘ د) (س) = $\frac{١}{س}$ + ٣
، مجال (ر ∘ د) = ح - {٠}

الاختبـــار الثالث

١ ① (ب) ② (جـ) ③ (د) ④ (ب) ⑤ (جـ) ⑥ (أ)

٢
($د_١$ + $د_٢$) (س) = $س^٥$ + جا س ونوعها فردية

الاختبـــار الرابع

١
مثل بنفسك ، المدى = [٠ ، ∞[والنوع : ليست زوجية وليست فردية الاطراد : تناقصية فى]- ∞ ، ٠[وتزايدية فى]٠ ، ∞[

٢ المجال = ح - {٢} وأثبت بنفسك

٣ مثل بنفسك ، المجال = ح - {-١}
، المدى = ح - {-٢}
الاطراد : تزايدية فى ح - {-١}

٤
مثل بنفسك ، المدى =]١ ، ٣[∪ {-١}

الاختبـــار الخامس

١ ① (جـ) ② (أ) ③ (جـ) ④ (أ) ⑤ (جـ) ⑥ (ب)

٢
مثل بنفسك ، المدى = [٠ ، ∞[والنوع : زوجية
الاطراد : تناقصية فى]- ∞ ، -٢[،]٠ ، ٢[
وتزايدية فى]-٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[

الاختبـــار السادس

١ ① (ب) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (د) ⑥ (د)

٢
① م.ح = {٤}
② م.ح = [$\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٧}{٤}$] - {$\frac{٣}{٢}$}

الاختبـــار السابع

١ ① (ب) ② (أ) ③ (ب) ④ (د) ⑤ (أ) ⑥ (أ)

٢
① م.ح = {١ ، -١ ، ٢٧ ، -٢٧}
② م.ح = {٦}

الاختبـــار الثامن

١ ① (د) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (ب) ⑤ (د) ⑥ (ب)

٢
د (ن) = ٦٠ (١ + ٠,٢٥)^{ن} ، ٢٢٩ نحلة تقريبًا

الاختبـــار التاسع

١ ① (أ) ② (أ) ③ (ب) ④ (د) ⑤ (ب) ⑥ (جـ)

٢
① المجال = ح - {-١} ، المدى = ح - {٢}
② $د^{-١}$ (س) = $\frac{-س + ٣}{س - ٢}$ ، مجال $د^{-١}$ = ح - {٢}
، مدى $د^{-١}$ = ح - {-١}

الاختبـــار العاشر

١ ① (جـ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (ب) ⑥ (أ)

٢
① مجموعة الحل = {٨}
② مجموعة الحل = {-١ ، ٥}

الاختبار الحادى عشر

١ ① (جـ) ② (أ) ③ (جـ) ④ (ب) ⑤ (أ) ⑥ (د)

٢ أثبت بنفسك.

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى التفاضل

الاختبـار الأول

١ (١) ١ (٢) ٤ (٣) غير معرفة (٤) ٣

٢ (١) (د) (٢) (د) (٣) (جـ)

الاختبـار الثانى

١ (١) (أ) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (د)

٢ (١) $\frac{١}{٤}$ (٢) $\frac{٧}{٢}$ (٣) ٣٣ (٤) ١

الاختبـار الثالث

١ (١) (أ) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (أ) (٥) (أ) (٦) (د)

٢ (١) ٦٤ (٢) ٥

الاختبـار الرابع

١ (١) (د) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (د)

٢ (١) ٢ (٢) $\frac{١}{٤}$ (٣) ∞ (٤) ٧

الاختبـار الخامس

١ (١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (جـ) (٥) (جـ) (٦) (ب)

٢ (١) ٢ (٢) $\frac{١}{٤}$

الاختبـار السادس

١ (١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (د) (٥) (أ) (٦) (جـ)

٢ نهـا د(س) عندما س ← ٢ = −١

الاختبـار السابع

١ (١) (د) (٢) (أ) (٣) (جـ) (٤) (جـ) (٥) (جـ) (٦) (أ)

٢ الدالة د متصلة عند س = ١

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى حساب المثلثات

الاختبـار الأول

١ (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (ب)

٢ حـ ≃ ١٨,٠٤ سم ، نق = ١٦,٥٦ سم

الاختبـار الثانى

١ (١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (جـ) (٥) (د) (٦) (د)

٢ مساحة الدائرة المارة برؤوس Δ أ حـ ء = ٢٥ π سم^2

الاختبـار الثالث

١ (١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (جـ) (٤) (أ) (٥) (جـ) (٦) (ب)

٢ يوجد حلان ، حـَ ≃ ٣٧,٣ سم أ، ٨,٧ سم

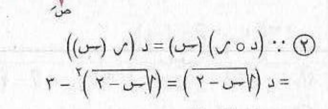
إجابات اختبارات شهر أكتوبر

اختبـار ١

١ (١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (جـ) (٥) (جـ) (٦) (أ) (٧) (د) (٨) (ب) (٩) (جـ) (١٠) (أ) (١١) (د) (١٢) (جـ)

٢

(١) من الرسم :



• مدى الدالة د = ح −]−١ ، ١[

• الدالة تزايدية فى ح − {٠}

(٢) ∵ (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

= د($\sqrt{س - ٢}$) = $(\sqrt{س - ٢})^2$ − ٣

= س − ٢ − ٣ = س − ٥

، ∵ م$_1$ = مجال ر = [٢ ، ∞[

، قيم س التى تجعل ر(س) فى مجال د هى م$_2$ = ح

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_1$ ∩ م$_2$ = [٢ ، ∞[

، (د ∘ ر)(٣) = ٣ − ٥ = −٢

(٣) نهـا (س ← ١) $\frac{\sqrt{٤س + ٥} - ٣}{س - ١} \times \frac{\sqrt{٤س + ٥} + ٣}{\sqrt{٤س + ٥} + ٣}$

= نهـا (س ← ١) $\frac{٤س + ٥ - ٩}{(س - ١)(\sqrt{٤س + ٥} + ٣)}$

= نهـا (س ← ١) $\frac{٤(س - ١)}{(س - ١)(\sqrt{٤س + ٥} + ٣)}$

= $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$

(٤) ∵ أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

∴ ق(∠حـ) = ٥٠°

فى Δ ب ء حـ : ق(∠ب ء حـ)

= ١٨٠° − (٥٠° + ٧٠°) = ٦٠°

∴ $\frac{٨}{جا ٥٠°} = \frac{ب حـ}{جا ٦٠°} = \frac{ء حـ}{جا ٧٠°}$

∴ ب حـ ≃ ٩ سم ، ء حـ ≃ ٩,٨ سم

∴ محيط متوازى الأضلاع = ٢ (ب حـ + حـ ء)

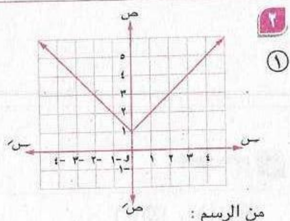
≃ ٣٨ سم

اختبـار ٢

١ (١) (ب) (٢) (د) (٣) (د) (٤) (د) (٥) (جـ) (٦) (جـ) (٧) (د) (٨) (أ) (٩) (جـ) (١٠) (جـ) (١١) (ب) (١٢) (جـ)

٢

(١)



من الرسم :

• المدى = [١ ، ∞[

• الاطراد : الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠]

وتزايدية فى]٠ ، ∞[

• النوع : الدالة زوجية.

(٢) د(س) = |س| + ١ ، ر(س) = $\frac{١}{س - ١}$

∴ (د ∘ ر)(س) = د[ر(س)]

= د$\left(\frac{١}{س - ١}\right)$

= $\left|\frac{١}{س - ١}\right|$ + ١

، $م_1$ = مجال ر = ح − {١}

، قيم س التي تجعل ر(س) في مجال د

هي $م_2$ = ح

∴ مجال (د ∘ ر) = ح − {١}

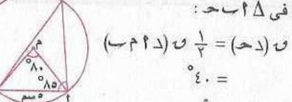
③ $$\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س+١١}-٤}{س^2-٢٥} \times \frac{\sqrt{س+١١}+٤}{\sqrt{س+١١}+٤}$$

$$= \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{س+١١-١٦}{(س-٥)(س+٥)(\sqrt{س+١١}+٤)}$$

$$= \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{١}{(س+٥)(\sqrt{س+١١}+٤)}$$

$$= \frac{١}{(٥+٥)(\sqrt{٥+١١}+٤)} = \frac{١}{٨٠}$$

④ في Δ أ ب حـ :



ق(∠حـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠أ م ب)

= ٤٠°

، ق(∠أ ب حـ)

= ١٨٠° − (٤٠° + ٨٥°) = ٥٥°

∴ $\frac{٥}{\text{جا } ٤٠°} = \frac{ب}{\text{جا } ٥٥°} = \frac{أ}{\text{جا } ٨٥°}$ = ٢ نق

$= \frac{\text{محيط } Δ \text{ أ ب حـ}}{\text{جا } ٤٠° + \text{جا } ٥٥° + \text{جا } ٨٥°}$

∴ محيط Δ أ ب حـ ≃ ١٩,١٢ سم

، نق ≃ ٣,٨٩ سم

∴ مساحة الدائرة = π نق² = π (٣,٨٩)²

≃ ٤٧,٥ سم²

إجابات أختبارات شهر نوفمبر

اختبــار ١

١

① (ب)	② (جـ)	③ (أ)	④ (أ)
⑤ (د)	⑥ (د)	⑦ (ب)	⑧ (د)
⑨ (ب)	⑩ (جـ)	⑪ (ب)	⑫ (د)

٢

① ∵ $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \frac{س^{١٢}-أ^{١٢}}{س^{١٠}-أ^{١٠}} = ٣٠$

∴ $\frac{١٢}{١٠}(أ)^2 = ٣٠$ ∴ $أ^2 = ٢٥$

∴ أ = ±٥

② ∵ $\frac{١}{٣}$ جا أ = $\frac{١}{٤}$ جا ب = $\frac{١}{٥}$ جا حـ

∴ $\frac{\text{جا أ}}{٣} = \frac{\text{جا ب}}{٤} = \frac{\text{جا حـ}}{٥}$

∴ أ : ب : حـ = ٣ : ٤ : ٥

، وبفرض أن: أ = ٣ك ، ب = ٤ك

، حـ = ٥ك

∴ جتا حـ $= \frac{(٣ك)^2 + (٤ك)^2 - (٥ك)^2}{٢ \times ٣ك \times ٤ك} = ٠$

∴ ق(∠حـ) = ٩٠°

∴ ٣ك + ٤ك + ٥ك = ٢٤

∴ ك = ٢

∴ أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم ، حـ = ١٠ سم

، مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم²

③ ∵ $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ = ٠$

∴ $(س^{\frac{٢}{٣}} - ٩)(س^{\frac{٢}{٣}} - ١) = ٠$

∴ $س^{\frac{٢}{٣}} = ٩$ ∴ س = ±٢٧

أ، $س^{\frac{٢}{٣}} = ١$ ∴ س = ±١

∴ مجموعة الحل = {−١ ، ١ ، −٢٧ ، ٢٧}

④ ∵ |س − ٣| = |٩ − ٢س|

∴ س − ٣ = ٩ − ٢س

∴ ٣س = ١٢

∴ س = ٤

أ، س − ٣ = −٩ + ٢س

∴ س = ٦

∴ مجموعة الحل = {٤ ، ٦}

اختبــار ٢

١

① (ب)	② (أ)	③ (ب)	④ (د)
⑤ (ب)	⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (د)
⑨ (ب)	⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	⑫ (جـ)

٢

① $٥^{س} + ٥^{س-١} = ١٥٠$

∴ $٥^{س-١}(٥+١) = ١٥٠$

∴ $٥^{س-١} = ٢٥ = ٥^2$

∴ س = ٣

② ∵ $\frac{١}{|س-٢|} \geq ٥$ ∴ $|س-٢| \leq \frac{١}{٥}$

∴ $-\frac{١}{٥} \leq س-٢ \leq \frac{١}{٥}$

∴ $\frac{٩}{٥} \leq س \leq \frac{١١}{٥}$

∴ |س − ٢| = ٠ عندما س = ٢

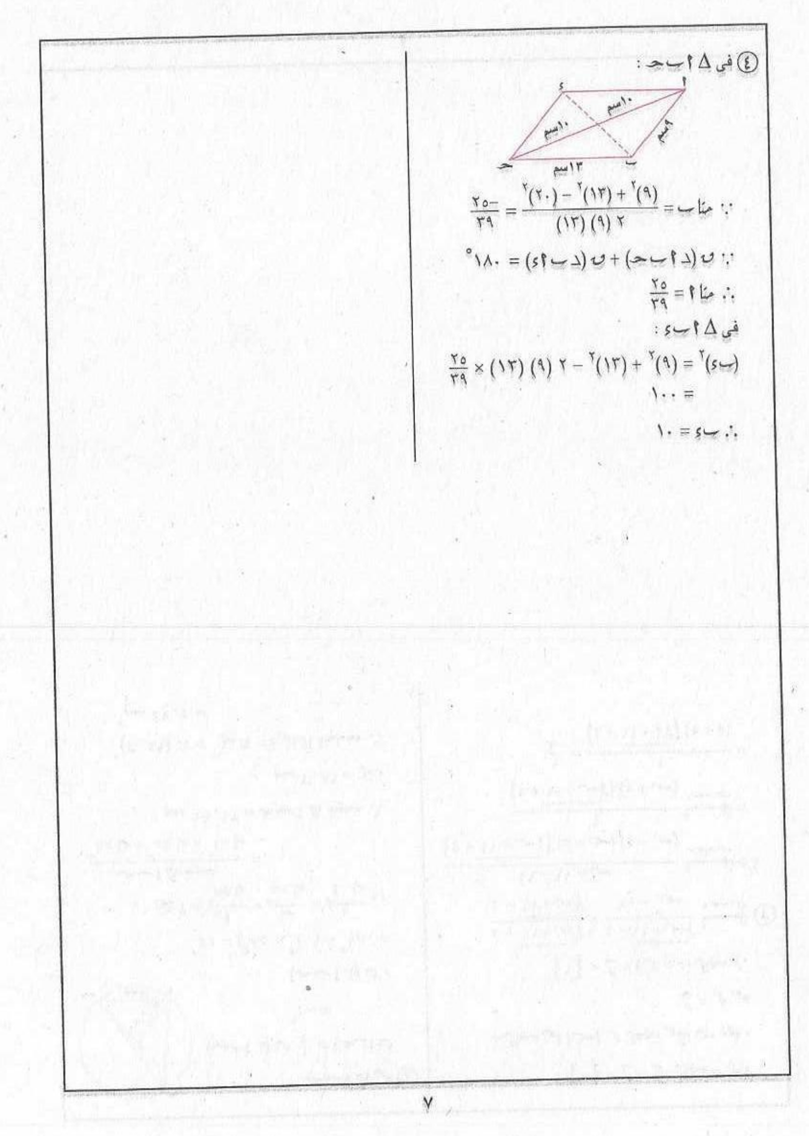
∴ مجموعة الحل = $[\frac{٩}{٥} ، \frac{١١}{٥}] - \{٢\}$

③ $$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\sqrt{س+١}-١} \times \frac{\sqrt{س+١}+١}{\sqrt{س+١}+١}$$

$$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}(\sqrt{س+١}+١)}{س+١-١}$$

$$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{س} \times \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} (\sqrt{س+١}+١)$$

$$= ١ \times (\sqrt{٠+١}+١) = ١ \times ٢ = ٢$$



④ فى Δ أ ب جـ :

∵ جتا ب = $\frac{(٩)^{٢} + (١٣)^{٢} - (٢٠)^{٢}}{٢ \ (٩) \ (١٣)} = \frac{٢٥-}{٣٩}$

∵ ق(∠ أ ب جـ) + ق(∠ ب أ ء) = ١٨٠°

∴ جتا أ = $\frac{٢٥}{٣٩}$

فى Δ أ ب ء :

$(بء)^{٢} = (٩)^{٢} + (١٣)^{٢} - ٢ \ (٩) \ (١٣) \times \frac{٢٥}{٣٩}$

= ١٠٠

∴ ب ء = ١٠

إجابات نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى الجبر

الاختبار الأول

١

① (د) ② (جـ) ③ (أ) ④ (أ)

٢

(أ) ① مجال د =]- ∞ ، ١[

② مجال ر = ح - {١ ، -١}

(ب) ارسم بنفسك ، المدى =]٠ ، ∞[

٣

(أ) ارسم بنفسك

؛ المجال = [-٢ ، ٣]

؛ الدالة تزايدية على الفترة]-٢ ، ٣[

(ب) ص = س - ١ ومثل بنفسك.

٤

(أ) ① م.ح = {٤} ② م.ح = {$\frac{١}{٢}$}

(ب) ارسم بنفسك.

٥

(أ) مجموعة الحل = ح -] $\frac{٥-}{٣}$ ، ٣[

(ب) مجموعة الحل = {٢٧ ، -٢٧ ، ١ ، -١}

الاختبار الثانى

١

① (د) ② (ب) ③ (د) ④ (ب)

٢

(أ) أثبت بنفسك. (ب) ٦

٣

(أ) مثِّل بنفسك.

(ب) ① ارسم بنفسك ، المدى = [٠ ، ∞ [

، الدالة تناقصية فى الفترة]- ∞ ، ٢[

وتزايدية فى الفترة]٢ ، ∞ [

② ارسم بنفسك ، المدى = [٠ ، ٣]

، الدالة تناقصية فى الفترة]٠ ، ٠,٢٧[

،]٢ ، ٣,٧٣[

، تزايدية فى الفترة]٠,٢٧ ، ٢[

،]٣,٧٣ ، ٤[

٤

(أ) ① فردية ② ليست زوجية وليست فردية.

③ زوجية

(ب) ① مجموعة الحل =]- ∞ ، ٠]

② مجموعة الحل = ∅

٥

(أ) ارسم بنفسك ، المجال = ح - {-١}

، المدى = ح - {-٢} ، تزايدية على ح - {-١}

(ب) ٢

إجابات نماذج اختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل وحساب المثلثات

الاختبار الأول

١

① (جـ)	② (ب)	③ (د)	④ (جـ)

٢

(أ) ① $\frac{٨٠}{٧}$ ② ١٧

(ب) ق(∠أ) ≈ ٣٥ ٤٨° ، ق(∠ب) ≈ ١٤ ٦٣°

، ق(∠حـ) ≈ ١١ ٦٨° ، حـَ ≈ ٢٦ سم

٣

(أ) ① صفر ② ١ ③ غير موجودة

(ب) محيط متوازى الأضلاع ≈ ٣٨ سم

٤

(أ) ق(∠ب) ≈ ٩ ٦٤° أ، ٥١ ١١٥°

(ب) أ = $-\frac{١}{٢}$

٥

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{١٦}$

الاختبار الثانى

١

① (د)	② (د)	③ (أ)	④ (جـ)

٢

(أ) أ = −١

(ب) ق(∠حـ) = ٩٠° ، مساحة Δ أ ب حـ = ٢٤ $سم^{٢}$

٣

(أ) $\frac{٣}{٢}$

(ب) حـَ ≈ ١٩,٥٠٤ سم ، ق(∠أ) ≈ ٢٠ ٢٦°

، ق(∠ب) = ٤٠ ٤٧°

٤

(أ) $-\frac{٥}{٤}$

(ب) أثبت بنفسك ، مساحة الشكل أ ب حـ ء ≈ ١٢٤ $سم^{٢}$

٥

(أ) ① $\frac{١}{٤}$ ② ٢

(ب) ٦١,٩ $سم^{٢}$

إجابات امتحانات مدارس المحافظات

١ محافظة القاهرة

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

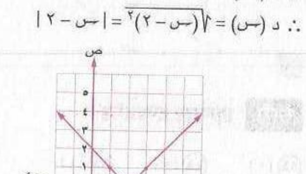
① (د)	② (د)	③ (ب)	④ (أ)
⑤ (ب)	⑥ (ب)	⑦ (ب)	⑧ (جـ)
⑨ (ب)	⑩ (د)	⑪ (د)	⑫ (جـ)
⑬ (ب)	⑭ (جـ)	⑮ (د)	⑯ (جـ)
⑰ (د)	⑱ (د)	⑲ (ب)	⑳ (ب)
㉑ (د)	㉒ (د)	㉓ (د)	㉔ (ب)
㉕ (ب)	㉖ (ب)	㉗ (ب)	

ثانيًا الأسئلة المقاليـة

١

∵ د(س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$

∴ د(س) = $\sqrt{(س - ٢)^{٢}}$ = |س − ٢|



المدى = [٠ ، ∞[

الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٢[

، تزايدية فى]٢ ، ∞[

٢

∵ د(٣^{-}) = $\lim_{س \to ٣^{-}}$ ($س^{٢}$ + ١) = $٣^{٢}$ + ١ = ١٠

، د(٣^{+}) = $\lim_{س \to ٣^{+}}$ (٣س + ١) = ٣ × ٣ + ١ = ١٠

∵ د(٣^{-}) = د(٣^{+})

∴ $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = ١٠

٢ محافظة الجيزة

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (ب)	③ (أ)	④ (جـ)
⑤ (أ)	⑥ (د)	⑦ (أ)	⑧ (أ)
⑨ (د)	⑩ (جـ)	⑪ (ب)	⑫ (ب)
⑬ (ب)	⑭ (د)	⑮ (ب)	⑯ (جـ)
⑰ (ب)	⑱ (جـ)	⑲ (ب)	⑳ (جـ)
㉑ (جـ)	㉒ (أ)	㉓ (جـ)	㉔ (ب)
㉕ (ب)	㉖ (أ)	㉗ (ب)	

ثانيًا الأسئلة المقاليـة

١

① المدى = [٢ ، ∞[

② الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ١[

، تزايدية فى]١ ، ∞[

٢

∵ $\lim_{س \to أ}$ د(س) موجودة

∴ د($أ^{-}$) = د($أ^{+}$)

∴ $\lim_{س \to أ^{-}}$ (٣س − ١) = $\lim_{س \to أ^{+}}$ (س + ١)

$\text{٣أ} - ١ = \text{أ} + ١$

$\text{٣أ} - \text{أ} = ١ + ١$

$\text{٢أ} = ٢$

$\text{أ} = ١$

٣ محافظة الإسكندرية

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (د)	③ (جـ)	④ (د)
⑤ (جـ)	⑥ (د)	⑦ (أ)	⑧ (أ)
⑨ (ب)	⑩ (أ)	⑪ (د)	⑫ (ب)
⑬ (جـ)	⑭ (جـ)	⑮ (أ)	⑯ (أ)
⑰ (د)	⑱ (جـ)	⑲ (جـ)	⑳ (ب)
㉑ (أ)	㉒ (د)	㉓ (جـ)	㉔ (د)
㉕ (ب)	㉖ (د)	㉗ (ب)	

ثانيًا الأسئلة المقاليـة

١

∵ الدالة متصلة عند س = ٣

∴ د (٣^{+}) = د (٣^{-}) = د (٣)

∴ ٢ × ٣ + ب = ١٦ ∴ ٦ + ب = ١٦

∴ ب = ١٠

، $٣(٣)^{٢}$ + أ × ٣ − ٢ = ١٦

∴ ٢٥ + ٣أ = ١٦ ∴ أ = −٣

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{-٣}{١٠}$

٢

|٢س − ٣| + |٤س − ٦| > ١٢

|٢س − ٣| + ٢|٢س − ٣| > ١٢

٣|٢س − ٣| > ١٢ ÷ ٣

|٢س − ٣| > ٤

∴ ٢س − ٣ > ٤ ، ٢س − ٣ < −٤

∴ ٢س > ٧ ، ٢س < −١

∴ س > $\frac{٧}{٢}$ ، س < $\frac{-١}{٢}$

∴ م.ح = ح − $[\frac{-١}{٢} ، \frac{٧}{٢}]$

٤ محافظة القليوبية

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (د)	③ (جـ)	④ (أ)
⑤ (د)	⑥ (جـ)	⑦ (د)	⑧ (أ)
⑨ (جـ)	⑩ (د)	⑪ (أ)	⑫ (ب)
⑬ (ب)	⑭ (ب)	⑮ (جـ)	⑯ (د)
⑰ (جـ)	⑱ (أ)	⑲ (ب)	⑳ (ب)
㉑ (د)	㉒ (جـ)	㉓ (جـ)	㉔ (د)
㉕ (أ)	㉖ (ب)	㉗ (ب)	

ثانيًا الأسئلة المقاليـة

١

∵ الدالة متصلة عند أ

∴ د (أ^{+}) = د (أ^{-})

٢ − $\text{أ}^{٢}$ = أ

$\text{أ}^{٢}$ + أ − ٢ = ٠

أ = −٢ ، أ = ١

٢

∵ د (س) + د (س − ١) = ١٥٠

∴ $٥^{\text{س}} + ٥^{\text{س} - ١} = ١٥٠$

بأخذ $٥^{\text{س}}$ عامل مشترك

∴ $٥^{\text{س}} (١ + ٥^{-١}) = ١٥٠$

∴ $٥^{\text{س}} (\frac{٦}{٥}) = ١٥٠$

∴ $٥^{\text{س}} = ١٢٥ = ٥^{٣}$

∴ س = ٣

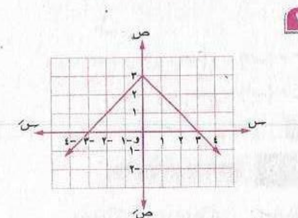
٥ محافظة الغربية

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (د)	③ (ب)	④ (جـ)
⑤ (أ)	⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)
⑨ (ب)	⑩ (جـ)	⑪ (أ)	⑫ (د)
⑬ (ب)	⑭ (جـ)	⑮ (جـ)	⑯ (ب)
⑰ (أ)	⑱ (جـ)	⑲ (د)	⑳ (أ)
㉑ (أ)	㉒ (ب)	㉓ (أ)	㉔ (أ)
㉕ (د)	㉖ (جـ)	㉗ (أ)	

ثانيًا الأسئلة المقاليـة

١



المدى =]− ∞ ، ٣]

الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠[

وتناقصية فى]٠ ، ∞[

٢

∵ الدالة متصلة فى ح

∴ الدالة متصلة عند س = ٢

∴ $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٧} - ٢^{٧}}{\text{س}^{٣} - ٢^{٣}} = \text{ك}$

$\frac{٧}{٣} \times ٢^{٤} = \text{ك}$

∴ ك = $\frac{١١٢}{٣}$

٦ محافظة الدقهلية

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (جـ)	③ (د)	④ (أ)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (أ)	⑧ (جـ)
⑨ (ب)	⑩ (جـ)	⑪ (ب)	⑫ (ب)
⑬ (جـ)	⑭ (د)	⑮ (ب)	⑯ (د)
⑰ (ب)	⑱ (د)	⑲ (د)	⑳ (جـ)
㉑ (ب)	㉒ (جـ)	㉓ (جـ)	㉔ (ب)
㉕ (ب)	㉖ (جـ)	㉗ (جـ)	

ثانيًا الأسئلة المقاليـة

١

∵ الدالة متصلة عند س = صفر

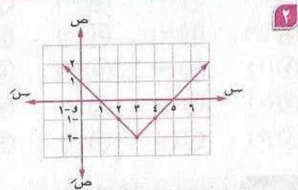
∴ $\lim_{\text{س} \to ٠}$ د (س) = د (س)

$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(\text{س} + ٢)^{٥} - ٢^{٥}}{\text{س} + ٢ - ٢} = \text{٥ك}$

$\frac{٥}{١} \times ٢^{٤} = \text{٥ك}$

∴ ك = ١٦

٢



المدى = [−٢ ، ∞[

الدالة تزايدية فى]٣ ، ∞[

الدالة ليست زوجية ولا فردية.

٧ محافظة دمياط

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب)	(٢) (جـ)	(٣) (أ)	(٤) (ب)
(٥) (أ)	(٦) (د)	(٧) (ب)	(٨) (جـ)
(٩) (جـ)	(١٠) (د)	(١١) (أ)	(١٢) (ب)
(١٣) (ب)	(١٤) (جـ)	(١٥) (جـ)	(١٦) (ب)
(١٧) (د)	(١٨) (ب)	(١٩) (أ)	(٢٠) (جـ)
(٢١) (جـ)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (أ)	(٢٤) (أ)
(٢٥) (د)	(٢٦) (جـ)	(٢٧) (أ)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

∵ د(س) لها نهاية عند س = -١

∴ $د(-١^{+}) = د(-١^{-})$

٣ × -١ - ٢ = أ × -١ - ٣

-٥ = -أ - ٣

∴ أ = ٢

٢

∵ $\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩} < ٢$ ∴ $\sqrt{(س - ٣)^{٢}} < ٢$

∴ |س - ٣| < ٢ ∴ -٢ < س - ٣ < ٢

∴ -٢ + ٣ < س < ٢ + ٣ ∴ ١ < س < ٥

∴ م.ح =]١ ، ٥[

٨ محافظة كفر الشيخ

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)	(٢) (د)	(٣) (أ)	(٤) (أ)
(٥) (ب)	(٦) (أ)	(٧) (ب)	(٨) (د)
(٩) (جـ)	(١٠) (ب)	(١١) (د)	(١٢) (جـ)
(١٣) (ب)	(١٤) (جـ)	(١٥) (د)	(١٦) (جـ)
(١٧) (ب)	(١٨) (جـ)	(١٩) (أ)	(٢٠) (ب)
(٢١) (جـ)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (د)	(٢٤) (أ)
(٢٥) (جـ)	(٢٦) (جـ)	(٢٧) (أ)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

-٩ ≤ ٢س - ٣ ≤ ٩

-٦ ≤ ٢س ≤ ١٢

بالقسمة ÷ ٢

-٣ ≤ س ≤ ٦

∴ م.ح = [-٣ ، ٦]

٢

∵ الدالة متصلة عند س = -٢

∴ $د(-٢)^{+} = د(-٢)^{-}$

$-٢ = أ - (-٢)^{٢}$

أ = ٢

٩ محافظة البحيرة

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)	(٢) (أ)	(٣) (جـ)	(٤) (جـ)
(٥) (أ)	(٦) (ب)	(٧) (ب)	(٨) (ب)
(٩) (جـ)	(١٠) (ب)	(١١) (د)	(١٢) (د)
(١٣) (أ)	(١٤) (جـ)	(١٥) (د)	(١٦) (ب)
(١٧) (أ)	(١٨) (د)	(١٩) (ب)	(٢٠) (جـ)
(٢١) (أ)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (د)	(٢٤) (د)
(٢٥) (جـ)	(٢٦) (أ)	(٢٧) (أ)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

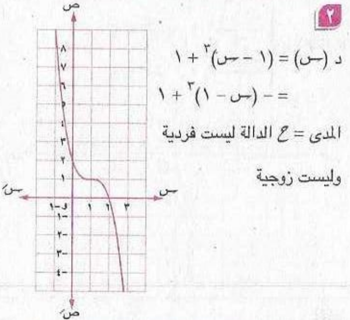
١

$نهـــا_{س \to ٠} \frac{٦س \times \frac{١}{ظا^{٢} ٤س}}{\frac{١}{حا ٨س}} = نهـــا_{س \to ٠} \frac{٦س \times حا ٨س}{ظا^{٢} ٤س}$

بالقسمة ÷ $س^{٢}$ بسطًا ومقامًا

∴ $نهـــا_{س \to ٠} \frac{\frac{٦س}{س} \times \frac{حا ٨س}{س}}{\left(\frac{ظا ٤س}{س}\right)^{٢}} = \frac{٦ \times ٨}{٤^{٢}} = ٣$

٢



$د(س) = (١ - س)^{٣} + ١$

$= -(س - ١)^{٣} + ١$

المدى = ح الدالة ليست فردية

وليست زوجية

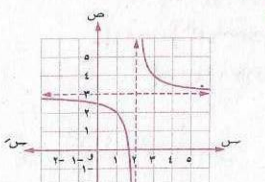
١٠ محافظة الفيوم

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (أ)	(٢) (أ)	(٣) (ب)	(٤) (ب)
(٥) (ب)	(٦) (د)	(٧) (جـ)	(٨) (أ)
(٩) (جـ)	(١٠) (ب)	(١١) (جـ)	(١٢) (ب)
(١٣) (جـ)	(١٤) (جـ)	(١٥) (جـ)	(١٦) (أ)
(١٧) (ب)	(١٨) (جـ)	(١٩) (جـ)	(٢٠) (ب)
(٢١) (جـ)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (أ)	(٢٤) (ب)
(٢٥) (ب)	(٢٦) (ب)	(٢٧) (جـ)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١



مجال ر = ح - {٢} ، المدى = ح - {٣}

، ر تناقصية فى كل من]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

، ر ليست زوجية وليست فردية.

٢

∵ الدالة متصلة على ح

∴ د متصلة عند س = -١

∴ $د(-١^{-}) = د(-١^{+}) = د(-١)$

∴ $نهـــا_{س \to -١^{+}} ((س + ١) م + ك)$

$= نهـــا_{س \to -١^{-}} (٢س^{٣} + س + ٧)$

∴ $(-١ + ١) م + ك = ٢ \times (-١)^{٣} + (-١) + ٧ = ٤$

∴ ك = ٤

، د متصلة عند س = ٢

∴ $د(٢^{-}) = د(٢^{+}) = د(٢)$

∴ $نهـــا_{س \to ٢^{+}} (٣س + ٤) = ٣ \times ٢ + ٤ = ١٠$

∴ (٢ + ١) م + ك = ١٠

٣م + ٤ = ١٠

∴ ٣م = ٦

∴ م = ٢

١١ محافظة بنى سويف

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (أ)	(٢) (ب)	(٣) (جـ)	(٤) (أ)
(٥) (ب)	(٦) (د)	(٧) (جـ)	(٨) (د)
(٩) (ب)	(١٠) (د)	(١١) (أ)	(١٢) (أ)
(١٣) (ب)	(١٤) (أ)	(١٥) (ب)	(١٦) (د)
(١٧) (د)	(١٨) (د)	(١٩) (ب)	(٢٠) (د)
(٢١) (جـ)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (د)	(٢٤) (أ)
(٢٥) (جـ)	(٢٦) (د)	(٢٧) (ب)	

ثانيا الأسئلة المقاليـة

١

مدى الدالة =]-∞ ، ٠]

الدالة تزايدية فى الفترة]-∞ ، ١[

وتناقصية فى الفترة]١ ، ∞[والدالة ليست زوجية وليست فردية.

٢

$$\lim_{\text{س} \to ١٦} \frac{\text{س} - ٦\sqrt{\text{س}} + ٨}{\text{س} - ١٦}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١٦} \frac{(\sqrt{\text{س}} - ٤)(\sqrt{\text{س}} - ٢)}{(\sqrt{\text{س}} - ٤)(\sqrt{\text{س}} + ٤)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١٦} \frac{\sqrt{\text{س}} - ٢}{\sqrt{\text{س}} + ٤} = \frac{\sqrt{١٦} - ٢}{\sqrt{١٦} + ٤} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$$

١٢ محافظة المنيا

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (أ)	(٢) (جـ)	(٣) (جـ)	(٤) (ب)
(٥) (جـ)	(٦) (أ)	(٧) (ب)	(٨) (د)
(٩) (ب)	(١٠) (جـ)	(١١) (ب)	(١٢) (أ)
(١٣) (د)	(١٤) (ب)	(١٥) (د)	(١٦) (جـ)
(١٧) (ب)	(١٨) (د)	(١٩) (أ)	(٢٠) (أ)
(٢١) (جـ)	(٢٢) (أ)	(٢٣) (د)	(٢٤) (جـ)
(٢٥) (د)	(٢٦) (د)	(٢٧) (أ)	

ثانيا الأسئلة المقاليـة

١

المجال = ح - {٢}

المدى = ح - {١}

٢

∵ الدالة متصلة عند س = ٣

∴ د (٣⁺) = د (٣⁻) = د (٣)

$∴ ٣^٢ + أ × ٣ + ١ = ٧$

∴ ٣أ + ١٠ = ٧   ∴ ٣أ = -٣

∴ أ = -١   ، ∴ ٢أ + ب × ٣ = ٧

، ∴ ٢أ + ٣ب = ٧   ، ∴ ٢ × -١ + ٣ب = ٧

، ∴ -٢ + ٣ب = ٧

، ٣ب = ٩   ∴ ب = ٣



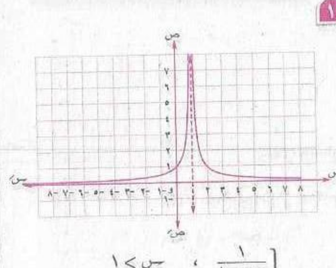
١٣ محافظة أسيوط

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب)	(٢) (جـ)	(٣) (د)	(٤) (أ)
(٥) (جـ)	(٦) (جـ)	(٧) (د)	(٨) (جـ)
(٩) (أ)	(١٠) (جـ)	(١١) (د)	(١٢) (ب)
(١٣) (ب)	(١٤) (د)	(١٥) (د)	(١٦) (أ)
(١٧) (جـ)	(١٨) (د)	(١٩) (جـ)	(٢٠) (جـ)
(٢١) (ب)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (ب)	(٢٤) (جـ)
(٢٥) (ب)	(٢٦) (أ)	(٢٧) (جـ)	

ثانيا الأسئلة المقاليـة

١



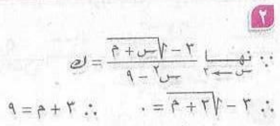
$$\text{د (س)} = \begin{cases} \frac{١}{\text{س} - ١} &، \text{س} > ١ \\ \frac{-١}{\text{س} - ١} &، \text{س} < ١ \end{cases}$$

الدالة تزايدية فى]-∞ ، ١[

وتناقصية فى]١ ، ∞[

المدى =]٠ ، ∞[

٢



$$∵ \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{٣ - \sqrt{\text{س} + \text{م}}}{\text{س}^٢ - ٩} = \text{ك}$$

$∴ ٣ - \sqrt{٣ + \text{م}} = ٠$ $∴ ٣ + \text{م} = ٩$

∴ م = ٦

$$∴ \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{٣ - \sqrt{\text{س} + ٦}}{\text{س}^٢ - ٩} \times \frac{٣ + \sqrt{\text{س} + ٦}}{٣ + \sqrt{\text{س} + ٦}}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{٩ - (\text{س} + ٦)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)\left(٣ + \sqrt{\text{س} + ٦}\right)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{٣ - \text{س}}{-(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)\left(٣ + \sqrt{\text{س} + ٦}\right)}$$

$$= \frac{١}{-(٣ + ٣)\left(٣ + \sqrt{٣ + ٦}\right)} = \frac{-١}{٣٦}$$

$∴ \text{ك} = \frac{-١}{٣٦}$ $∴ \text{ك} \times \text{م} = \frac{-١}{٣٦} \times ٦ = \frac{-١}{٦}$

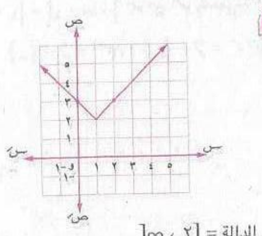
١٤ محافظة سوهاج

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)	(٢) (د)	(٣) (ب)	(٤) (ب)
(٥) (أ)	(٦) (د)	(٧) (د)	(٨) (جـ)
(٩) (ب)	(١٠) (د)	(١١) (جـ)	(١٢) (ب)
(١٣) (أ)	(١٤) (ب)	(١٥) (أ)	(١٦) (جـ)
(١٧) (أ)	(١٨) (ب)	(١٩) (جـ)	(٢٠) (ب)
(٢١) (د)	(٢٢) (د)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (ب)
(٢٥) (جـ)	(٢٦) (د)	(٢٧) (ب)	

ثانيا الأسئلة المقاليـة

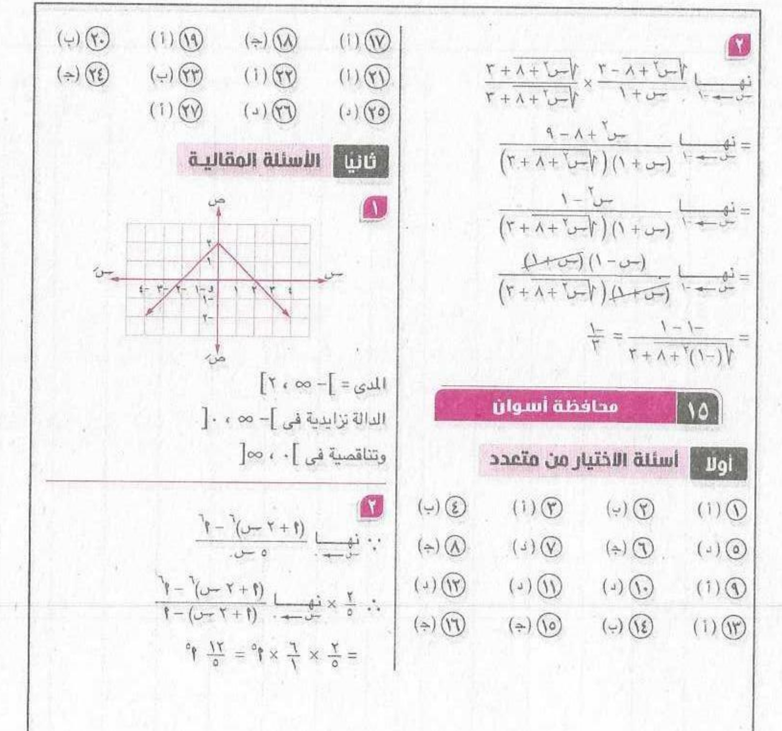
١



مدى الدالة = [٢ ، ∞[

الدالة تناقصية فى]-∞ ، ١[

وتزايدية فى]١ ، ∞[



٢

$$\lim_{\text{س} \to -1} \frac{\sqrt{\text{س}^2 + 8} - 3}{\text{س} + 1} \times \frac{\sqrt{\text{س}^2 + 8} + 3}{\sqrt{\text{س}^2 + 8} + 3}$$

$$= \lim_{\text{س} \to -1} \frac{\text{س}^2 + 8 - 9}{(\text{س} + 1)\left(\sqrt{\text{س}^2 + 8} + 3\right)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to -1} \frac{\text{س}^2 - 1}{(\text{س} + 1)\left(\sqrt{\text{س}^2 + 8} + 3\right)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to -1} \frac{(\text{س} - 1)\cancel{(\text{س} + 1)}}{\cancel{(\text{س} + 1)}\left(\sqrt{\text{س}^2 + 8} + 3\right)}$$

$$= \frac{-1 - 1}{\sqrt{(-1)^2 + 8} + 3} = \frac{-1}{3}$$

١٥ محافظة أسوان

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (ب)	③ (أ)	④ (ب)
⑤ (د)	⑥ (جـ)	⑦ (د)	⑧ (جـ)
⑨ (أ)	⑩ (د)	⑪ (د)	⑫ (د)
⑬ (أ)	⑭ (ب)	⑮ (جـ)	⑯ (جـ)
⑰ (أ)	⑱ (جـ)	⑲ (أ)	⑳ (ب)
㉑ (أ)	㉒ (أ)	㉓ (ب)	㉔ (جـ)
㉕ (د)	㉖ (د)	㉗ (أ)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

المدى =]-∞ ، ٢]

الدالة تزايدية فى]-∞ ، ٠[

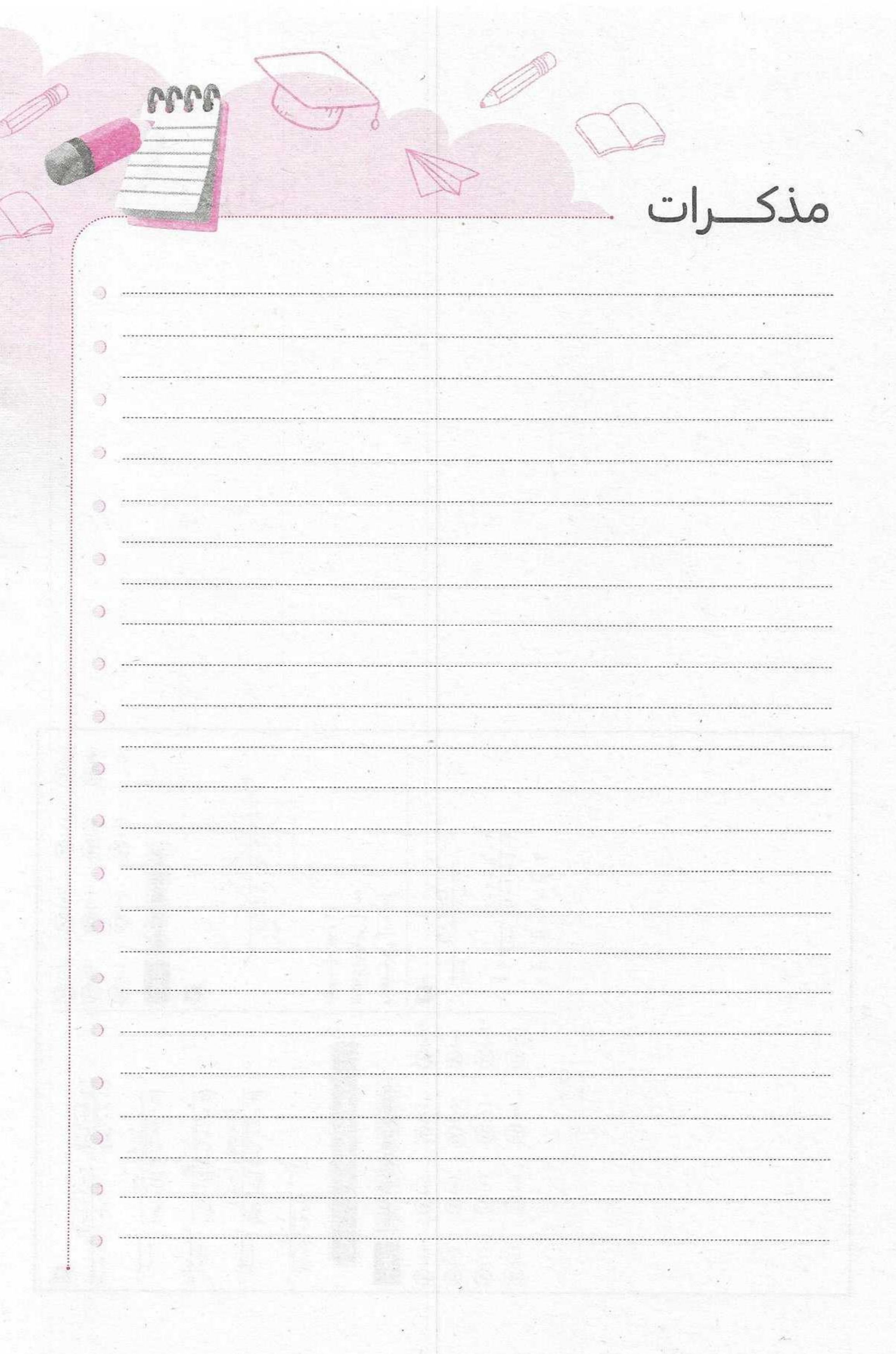
وتناقصية فى]٠ ، ∞[

٢

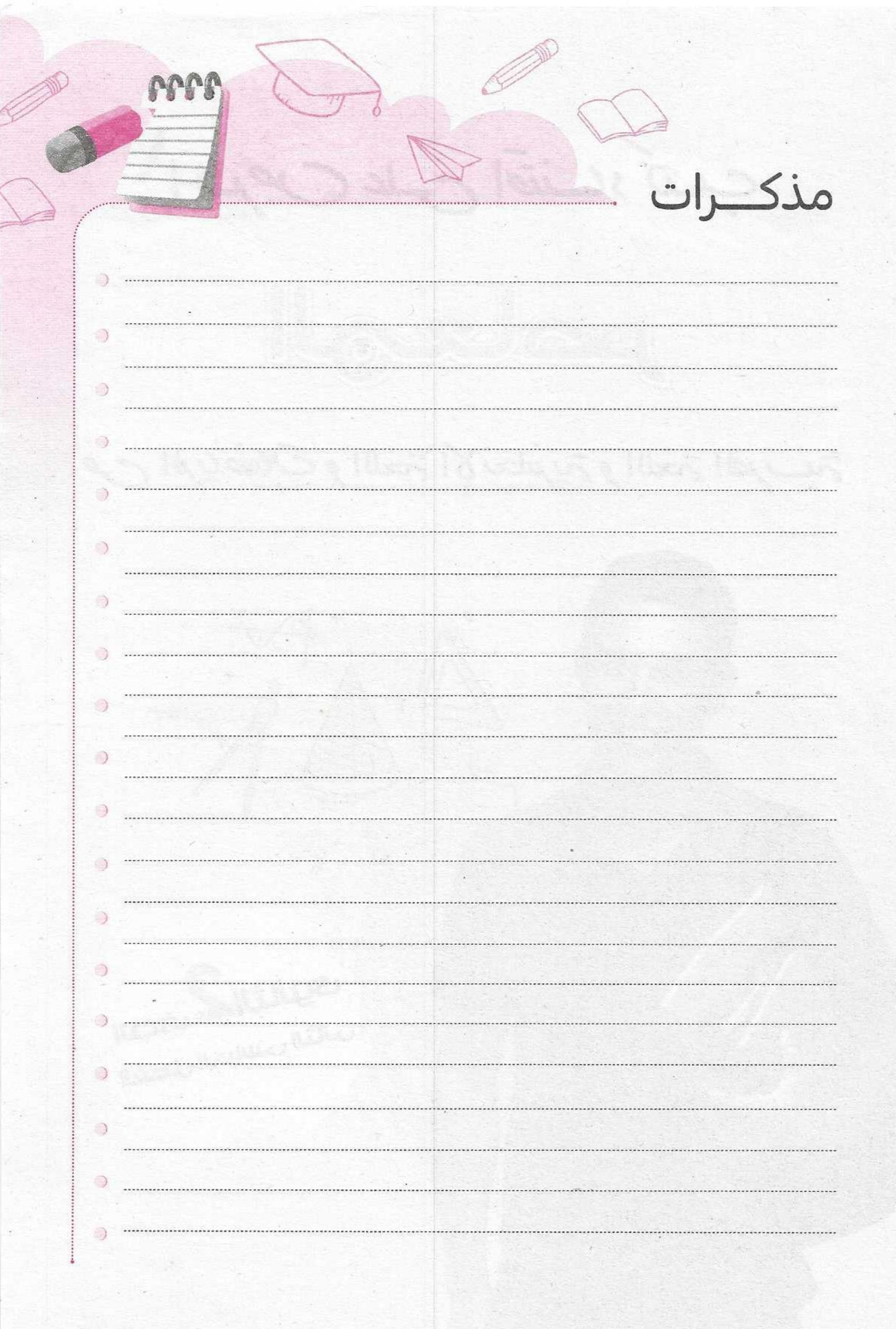
$$\because \lim_{\text{س} \to 0} \frac{(\text{أ} + 2\text{س})^6 - \text{أ}^6}{5\text{س}}$$

$$\therefore \frac{2}{5} \times \lim_{\text{س} \to 0} \frac{(\text{أ} + 2\text{س})^6 - \text{أ}^6}{(\text{أ} + 2\text{س}) - \text{أ}}$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{6}{1} \times \text{أ}^5 = \frac{12}{5}\,\text{أ}^5$$



مذكـــرات



مذکـــرات





البحتة



إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى

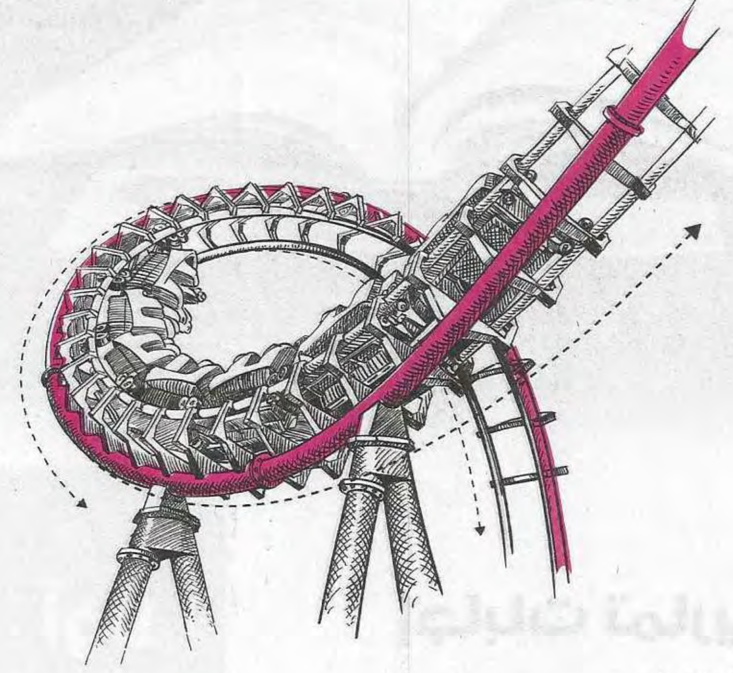
القسم العلمى

الفصل الدراسى الأول



الرياضيات البحتة

الجزء الخاص بالإجابات



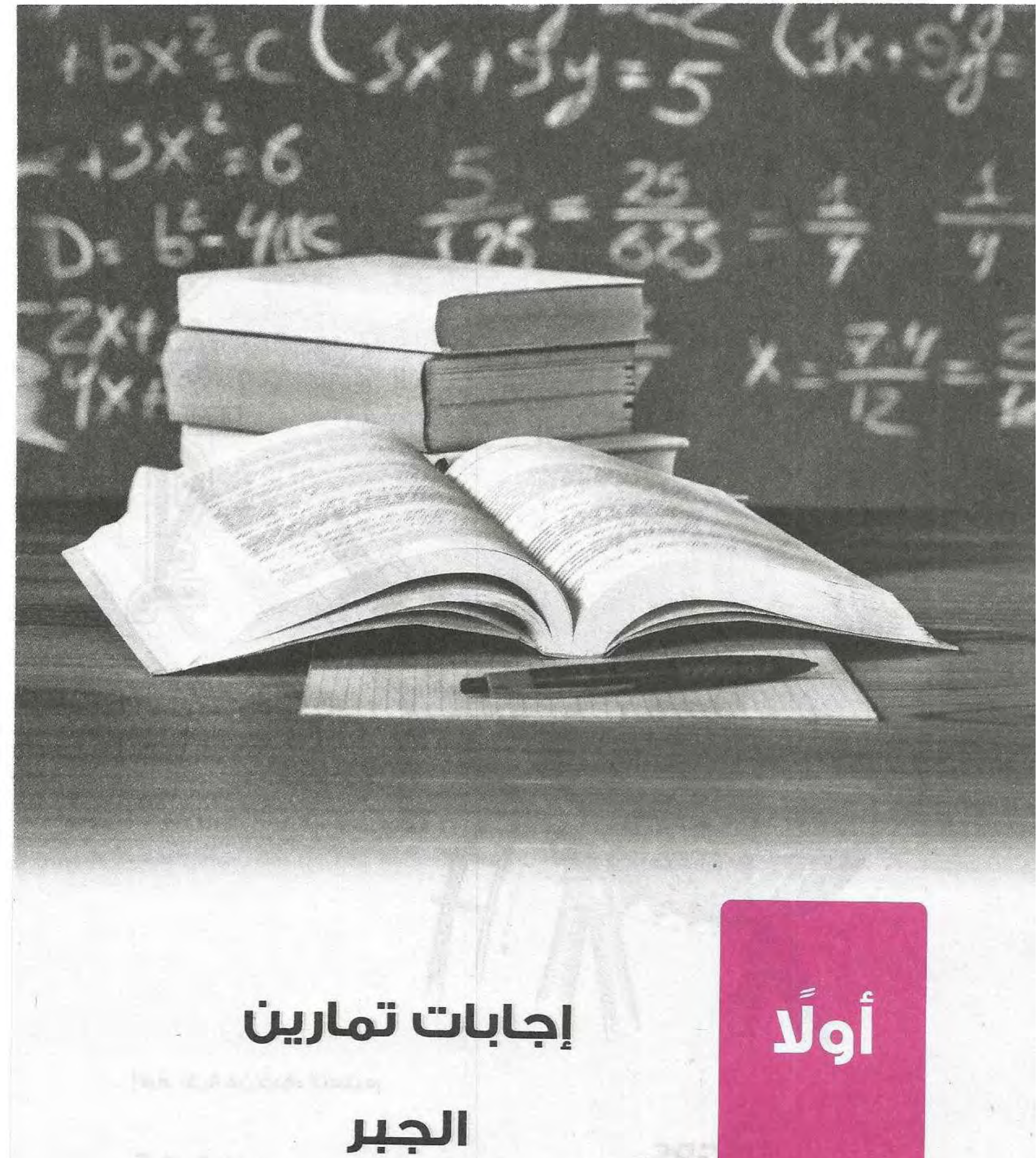
إعداد نخبة من خبراء التعليم



الصف الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الأول



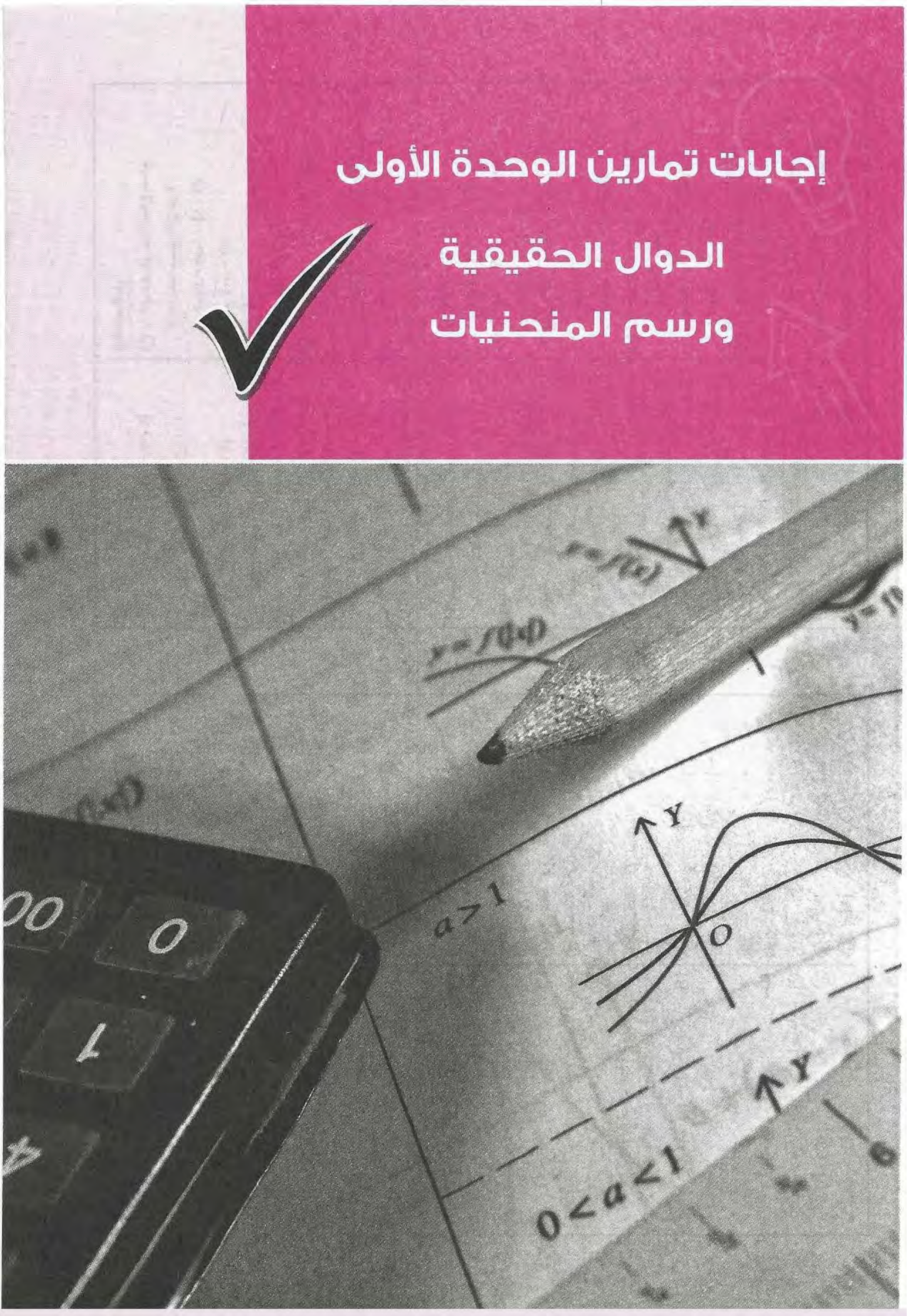
مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقى - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٠١٢٢٥٩٣٤٠١٢ / ٠٢
e-mail: info@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com
الخط الساخن 15014



أولًا

إجابات تمارين

الجبر


إجابات تمارين الوحدة الأولى
الدوال الحقيقية
ورسم المنحنيات
Y
a>1
O
0<a<1



إجابات الوحدة الأولى

إجابات تمارين المتطلبات القبلية

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (ب) ③ (د) ④ (جـ)
⑤ (جـ) ⑥ (أ) ⑦ (جـ)

ثانياً الأسئلة المقالية

1

∵ د(س) = أ² س² + ١٠ أ س + ٢٥
، ر(س) = ٩ س² + ٣٠ س + حـ − ٤
، د(س) = ر(س)
∴ ١٠ أ = ٣٠   ∴ أ = ٣
، حـ − ٤ = ٢٥   ∴ حـ = ٢٩

2

① ∵ أ + ب = ٥ (١) ، أ + حـ = ٣ (٢)
، ب = −٢ وبالتعويض عن قيمة ب في (١)
∴ أ − ٢ = ٥
∴ أ = ٧ وبالتعويض عن قيمة أ في (٢)
∴ ٧ + حـ = ٣   ∴ حـ = −٤

② ∵ أ + ب = ١ (١) ، أ + حـ = ٠ (٢)
، ب = −٢   ∴ أ − ٢ = ١   ∴ أ = ٣
، ٣ + حـ = ٠   ∴ حـ = −٣

③ ∵ أ + ٢ ب = ٧ (١)
، −حـ = ٥   ∴ حـ = −٥ ، أ − ب = ٤ (٢)
من (١) ، (٢) :
∴ ب = ١ ، أ = ٥

إجابات تمارين 1

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (د) ③ (د) ④ (جـ)
⑤ (أ) ⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (أ)
⑨ (د) ⑩ (جـ) ⑪ (ب) ⑫ (جـ)
⑬ (د) ⑭ (جـ) ⑮ (ب) ⑯ (ب)
⑰ (د) ⑱ (أ) ⑲ (د) ⑳ (د)
㉑ (ب) ㉒ (ب) ㉓ (جـ) ㉔ (جـ)
㉕ (د) ㉖ (ب) ㉗ (جـ) ㉘ (د)
㉙ (جـ) ㉚ (د) ㉛ (جـ) ㉜ (د)
㉝ (د) ㉞ (ب) ㉟ (جـ)
㊱ أولاً : (ب) ثانياً : (جـ) ㊲ (ب)
㊳ (د) ㊴ (جـ)

ثانياً الأسئلة المقالية

1

① دالة ② ليست دالة ③ دالة
④ ليست دالة ⑤ دالة ⑥ دالة
⑦ ليست دالة ⑧ دالة ⑨ دالة

2

① ليست دالة ② ليست دالة ③ دالة

3

① ح − {١ ، ٢} ② ح − {٣}
③ ح − {١ ، −٢/٣} ④ ح − {−١}

4

① ح − {٥/٢} ②]٣ ، ∞[
③]−∞ ، ١[④ ح −]−٤ ، ٤[
⑤]−٣ ، ٣[⑥ ح
⑦ ح − {٢} ⑧]٠ ، ∞[− {١}

5

① ح ②]−∞ ، ٤[
③ [٠ ، ٦]

6

① المجال = ح ، المدى = {−٢ ، ٣}
، الدالة ثابتة في]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

② المجال = ح − {٠} ، المدى = ح − [−٢ ، ٢]
، الدالة تناقصية في]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

③ المجال = ح − {١} ، المدى =]−٢ ، ∞[
، الدالة تناقصية في]−∞ ، ١[
، تزايدية في]١ ، ∞[

④ المجال = ح − {٢} ، والمدى = ح − {٢}
، الدالة تزايدية في]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

⑤ المجال = ح − {−١ ، ٢} ، المدى = {٣}
، الدالة ثابتة على مجالها.

⑥ المجال = ح −]٠ ، ١]
، المدى =]٣ ، ∞[∪ {٢} ، الدالة ثابتة في]−∞ ، ٠] ، وتزايدية في]١ ، ∞[

⑦ المجال = ح ، المدى =]−∞ ، ٤]
، الدالة تزايدية في]−∞ ، −٢[،]٠ ، ٢[
وتناقصية في]−٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[

⑧ المجال = ح ، المدى = ح −]١ ، ٢[
، الدالة تناقصية في]−∞ ، ٠[،]١ ، ∞[
وتزايدية في]٠ ، ١[

⑨ المجال = [−٢ ، ∞[، المدى = [٠ ، ∞[
، الدالة تزايدية في]−٢ ، ٠[.
وتناقصية في]٠ ، ٢[،]٢ ، ∞[

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

① (د) ② (د) ③ (د)
④ (جـ) ⑤ (أ) ⑥ (د)

إرشادات الحل :

① ∵ س تدل على عدد أضلاع مضلع
∴ س عدد صحيح أكبر من ٢
∴ المجال = ص⁺ − {١ ، ٢}

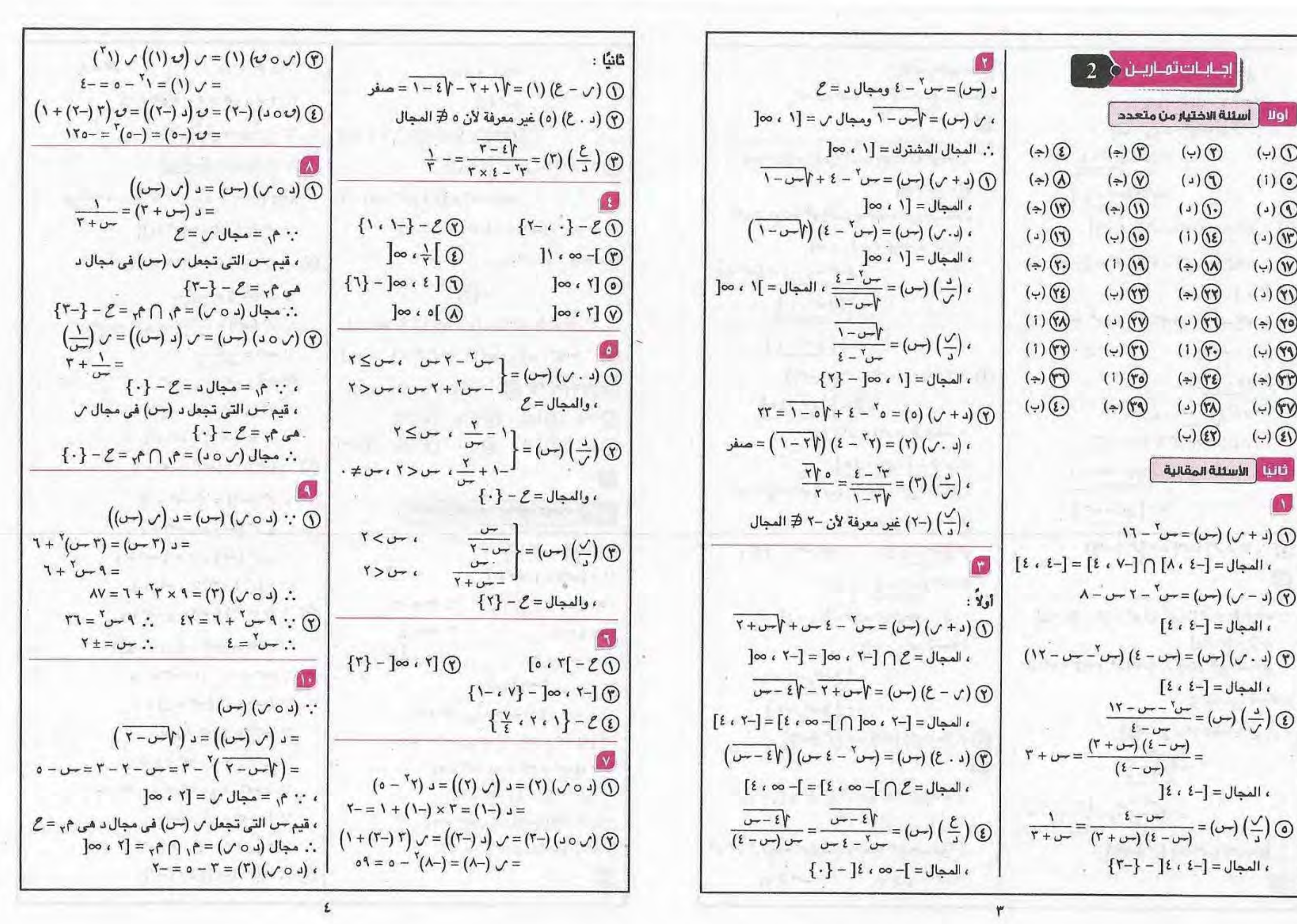
② بوضع ∛س − ٢ = ٠
∴ ∛س = ٢   ∴ س = ٨
∴ المجال = ح − {٨}

③ ∵ ٣ س ≥ ٠   ∴ س ≥ ٠
∴ س ∈ [٠ ، ∞[
بوضع √(٣ س) − س = ٠   ∴ √(٣ س) = س
∴ ٣ س = س²   ∴ س² − ٣ س = ٠
∴ س(س − ٣) = ٠
∴ س = ٠ أو س = ٣
∴ المجال = [٠ ، ∞[− {٣}

④ ∵ س − ١ ≥ ٠   ∴ س ≥ ١
∴ س ∈ [١ ، ∞[
وبوضع √(س − ١) = ٣   ∴ س − ١ = ٩
∴ س = ١٠
∴ المجال = [١ ، ∞[− {١٠}

⑤ ∵ س − ١ ≥ ٠   ∴ س ≥ ١
∴ س ∈ [١ ، ∞[
وبوضع √(س − ١) + ٣ = ٠ (تعارض)
∴ المجال = [١ ، ∞[

⑥ ∵ د(س) = √(−(س² − ٦ س + ٩))
= √(−(س − ٣)²)
∴ −(س − ٣)² ≥ ٠   ∴ (س − ٣)² ≤ ٠
وهذا لا يتحقق إلا في حالة التساوي فقط
أي عندما س = ٣   ∴ المجال = {٣}



إجابات تمارين 2

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (ب)	③ (جـ)	④ (جـ)
⑤ (أ)	⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (د)	⑩ (د)	⑪ (جـ)	⑫ (جـ)
⑬ (د)	⑭ (أ)	⑮ (ب)	⑯ (د)
⑰ (ب)	⑱ (جـ)	⑲ (أ)	⑳ (جـ)
(٢١) (د)	(٢٢) (جـ)	(٢٣) (ب)	(٢٤) (ب)
(٢٥) (جـ)	(٢٦) (د)	(٢٧) (د)	(٢٨) (أ)
(٢٩) (ب)	(٣٠) (أ)	(٣١) (ب)	(٣٢) (أ)
(٣٣) (جـ)	(٣٤) (جـ)	(٣٥) (أ)	(٣٦) (جـ)
(٣٧) (ب)	(٣٨) (د)	(٣٩) (جـ)	(٤٠) (ب)
(٤١) (ب)	(٤٢) (ب)		

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

① (د + ر)(س) = س^{٢} − ١٦

، المجال = [−٤ ، ٨] ∩ [−٧ ، ٤] = [−٤ ، ٤]

② (د − ر)(س) = س^{٢} − ٢س − ٨

، المجال = [−٤ ، ٤]

③ (د . ر)(س) = (س − ٤)(س^{٢} − س − ١٢)

، المجال = [−٤ ، ٤]

④ (د/ر)(س) = (س^{٢} − س − ١٢)/(س − ٤) = (س − ٤)(س + ٣)/(س − ٤) = س + ٣

، المجال = [−٤ ، ٤[

⑤ (ر/د)(س) = (س − ٤)/((س − ٤)(س + ٣)) = ١/(س + ٣)

، المجال = [−٤ ، ٤[− {−٣}

٢

د(س) = س^{٢} − ٤ ومجال د = ح

، ر(س) = √(س − ١) ومجال ر = [١ ، ∞[

∴ المجال المشترك = [١ ، ∞[

① (د + ر)(س) = س^{٢} − ٤ + √(س − ١)

، المجال = [١ ، ∞[

، (د . ر)(س) = (س^{٢} − ٤)(√(س − ١))

، المجال = [١ ، ∞[

، (د/ر)(س) = (س^{٢} − ٤)/√(س − ١) ، المجال =]١ ، ∞[

، (ر/د)(س) = √(س − ١)/(س^{٢} − ٤)

، المجال = [١ ، ∞[− {٢}

② (د + ر)(٥) = ٥^{٢} − ٤ + √(٥ − ١) = ٢٣

، (د . ر)(٢) = (٢^{٢} − ٤)(√(٢ − ١)) = صفر

، (د/ر)(٣) = (٣^{٢} − ٤)/√(٣ − ١) = ٥√٢/٢

، (ر/د)(−٢) غير معرفة لأن −٢ ∉ المجال

٣

أولاً :

① (د + ر)(س) = س^{٢} − ٤س + √(س + ٢)

، المجال = ح ∩ [−٢ ، ∞[= [−٢ ، ∞[

② (ر − ع)(س) = √(س + ٢) − √(٤ − س)

، المجال = [−٢ ، ∞[∩]−∞ ، ٤] = [−٢ ، ٤]

③ (د . ع)(س) = (س^{٢} − ٤س)(√(٤ − س))

، المجال = ح ∩]−∞ ، ٤] =]−∞ ، ٤]

④ (ع/د)(س) = √(٤ − س)/(س^{٢} − ٤س) = √(٤ − س)/(س(س − ٤))

، المجال =]−∞ ، ٤[− {٠}

ثانيًا :

① (ر − ع)(١) = √(١ + ٢) − √(٤ − ١) = صفر

② (د . ع)(٥) غير معرفة لأن ٥ ∉ المجال

③ (ع/د)(٣) = √(٤ − ٣)/(٣^{٢} − ٤ × ٣) = −١/٣

٤

① ح − {٠ ، −٢}　② ح − {−١ ، ١}

③]−∞ ، ١[　④]١/٢ ، ∞[

⑤ [٢ ، ∞[　⑥ [٤ ، ∞[− {٦}

⑦ [٣ ، ∞[　⑧]٥ ، ∞[

٥

① (د . ر)(س) = { س^{٢} − ٢س ، س ≥ ٢ ؛ −س^{٢} + ٢س ، س < ٢ }

، والمجال = ح

② (د/ر)(س) = { ١ − ٢/س ، س ≥ ٢ ؛ −١ + ٢/س ، س < ٢ ، س ≠ ٠ }

، والمجال = ح − {٠}

③ (ر/د)(س) = { س/(س − ٢) ، س > ٢ ؛ س/(−س + ٢) ، س < ٢ }

، والمجال = ح − {٢}

٦

① ح −]٣ ، ٥]　② [٢ ، ∞[− {٣}

③ [−٢ ، ∞[− {٧ ، −١}

④ ح − {١ ، ٢ ، ٧/٤}

٧

① (د ∘ ر)(٢) = د(ر(٢)) = د(٢^{٢} − ٥)

= د(−١) = ٣ × (−١) + ١ = −٢

② (ر ∘ د)(−٣) = ر(د(−٣)) = ر(٣(−٣) + ١)

= ر(−٨) = (−٨)^{٢} − ٥ = ٥٩

③ (ر ∘ ع)(١) = ر(ع(١)) = ر(١^{٣})

= ر(١) = ١^{٢} − ٥ = −٤

④ (ع ∘ د)(−٢) = ع(د(−٢)) = ع(٣(−٢) + ١)

= ع(−٥) = (−٥)^{٣} = −١٢٥

٨

① (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

= د(س + ٣) = ١/(س + ٣)

∵ م$_{١}$ = مجال ر = ح

، قيم س التي تجعل ر(س) في مجال د

هي م$_{٢}$ = ح − {−٣}

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح − {−٣}

② (ر ∘ د)(س) = ر(د(س)) = ر(١/س)

= ١/س + ٣

، ∵ م$_{١}$ = مجال د = ح − {٠}

، قيم س التي تجعل د(س) في مجال ر

هي م$_{٢}$ = ح − {٠}

∴ مجال (ر ∘ د) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح − {٠}

٩

① ∵ (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

= د(٣س) = (٣س)^{٢} + ٦

= ٩س^{٢} + ٦

∴ (د ∘ ر)(٣) = ٩ × ٣^{٢} + ٦ = ٨٧

② ∵ ٩س^{٢} + ٦ = ٤٢　∴ ٩س^{٢} = ٣٦

∴ س^{٢} = ٤　∴ س = ±٢

١٠

∵ (د ∘ ر)(س)

= د(ر(س)) = د(√(س − ٢))

= (√(س − ٢))^{٢} − ٣ = س − ٢ − ٣ = س − ٥

، ∵ م$_{١}$ = مجال ر = [٢ ، ∞[

، قيم س التي تجعل ر(س) في مجال د هي م$_{٢}$ = ح

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = [٢ ، ∞[

، (د ∘ ر)(٣) = ٣ − ٥ = −٢

١١

∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (٢ / (س − ٢)) = √(٢ / (س − ٢) + ١)

= √((س − ١) / (س − ٢))

، ∵ م١ = مجال ر = ح − {٢}

، بوضع (س − ١) / (س − ٢) ≥ ٠

∴ قيم س التي تجعل ر (س) فى مجال د هى م٢

= ح −]١ ، ٢]

∴ مجال (د ∘ ر) = م١ ∩ م٢ = ح −]١ ، ٢]

١٢

① ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (√(٤ − س))

= √(√(٤ − س) − ٢)

، ∵ م١ = مجال ر =]−∞ ، ٤]

، بوضع √(٤ − س) − ٢ ≥ ٠

أى √(٤ − س) ≥ ٢

أى ٤ − س ≥ ٤   أى س ≤ ٠

∴ قيم س التي تجعل ر (س) فى مجال د هى

م٢ =]−∞ ، ٠]

∴ مجال (د ∘ ر) = م١ ∩ م٢ =]−∞ ، ٠]

② ∵ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر (√(س − ٢))

= √(٤ − √(س − ٢))

، ∵ م١ = مجال د = [٢ ، ∞[

، بوضع ٤ − √(س − ٢) ≥ ٠

∴ √(س − ٢) ≤ ٤

∴ س − ٢ ≤ ١٦   ∴ س ≤ ١٨

∴ قيم س التي تجعل د (س) فى مجال ر هى م٢

=]−∞ ، ١٨]

∴ مجال (ر ∘ د) = م١ ∩ م٢ = [٢ ، ١٨]

١٣

① ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (√(س² − ٤))

= √(√(س² − ٤) − ١)

، بوضع س² − ٤ ≥ ٠

∴ م١ = مجال ر = ح −]−٢ ، ٢[

وبوضع √(س² − ٤) − ١ ≥ ٠

أى √(س² − ٤) ≥ ١   أى س² − ٤ ≥ ١

أى س² − ٥ ≥ ٠

، قيم س التي تجعل ر (س) فى مجال د هى

م٢ = ح −]−√٥ ، √٥[

∴ مجال (د ∘ ر) = م١ ∩ م٢

= ح −]−√٥ ، √٥[

② ∵ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر (√(س − ١))

= √((√(س − ١))² − ٤)

= √(س − ١ − ٤) = √(س − ٥)

، ∵ م١ = مجال د = [١ ، ∞[

، قيم س التي تجعل د (س) فى مجال ر هى

م٢ = [٥ ، ∞[

∴ مجال (ر ∘ د) = م١ ∩ م٢ = [٥ ، ∞[

١٤

د (س) = √(س − ٤) ، ر (س) = س²

(توجد حلول أخرى)

١٥

بفرض د (س) = أ س + ب

، ∵ (د ∘ د) (س) = ١٦ س + ١٥

∴ د (د (س)) = ١٦ س + ١٥

∴ د (أ س + ب) = ١٦ س + ١٥

∴ أ (أ س + ب) + ب = ١٦ س + ١٥

∴ أ² س + أ ب + ب = ١٦ س + ١٥

∴ أ² = ١٦ ومنها أ = ± ٤

، أ ب + ب = ١٥   ∴ ب = ١٥ / (أ + ١)

، عند أ = ٤   ∴ ب = ٣

، عند أ = −٤   ∴ ب = −٥

∴ د (س) = ٤ س + ٣

أ، د (س) = −٤ س − ٥

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (د) ② (د) ③ (د) ④ (ج) ⑤ (ج)

⑥ (د) ⑦ (أ) ⑧ (د) ⑨ (ج)

إرشادات لحل رقم ١

① ∵ مجال د = [١ ، ∞[، مجال ر =]−∞ ، ١]

∴ مجال (د + ر) = [١ ، ∞[∩]−∞ ، ١]

= {١}

② عندما ٠ < س < ١

(د + ر) (س) = د (س) + ر (س)

= (−س + ٢) + (س + ٢) = ٤

③ (ر ∘ د) (−١) = ر (د (−١))

[لاحظ أن د (−١) = (−١)² + ١ = ٢]

= ر (٢)

= (٢)² + ٢ = ٦

④ ∵ د (ر (س)) = د (س)

∴ د (٢ س + ٣) = د (س)

∴ (٢ س + ٣)² = س²

∴ ٤ س² + ١٢ س + ٩ − س² = ٠

∴ ٣ س² + ١٢ س + ٩ = ٠

∴ س² + ٤ س + ٣ = ٠

∴ (س + ١) (س + ٣) = ٠

∴ س = −١   أ، س = −٣

∴ مجموعة الحل = {−١ ، −٣}

⑤ ∵ (د ∘ ر) (س) = ٣ س + ٢

∴ د (ر (س)) = ٣ س + ٢

∴ ٢ ر (س) + ١ = ٣ س + ٢

∴ ٢ ر (س) = ٣ س + ١

∴ ر (س) = ٣/٢ س + ١/٢

⑥ ∵ (ر ∘ د) (س) = س + ٢

∴ ر (د (س)) = س + ٢

∴ ر (٢ س − ٣) = س + ٢

وبوضع ٢ س − ٣ = ص

∴ س = (ص + ٣) / ٢

∴ ر (ص) = (ص + ٣) / ٢ + ٢ = (ص + ٧) / ٢

∴ ر (س) = (س + ٧) / ٢

⑦ ∵ (ر ∘ د) (٠) = (د ∘ ر) (١)

∴ ر [د (٠)] = د [ر (١)]

لاحظ أن : د (٠) = ٢ ، ر (١) = (١ − ك) / ٢

∴ ر (٢) = د ((١ − ك) / ٢)

∴ (٢ − ك) / ٥ = (١ − ك) / ٢ + ٢

∴ ٤ − ٢ ك = ٥ − ٥ ك + ٢٠

∴ ٣ ك = ٢١   ∴ ك = ٧



⑧ ∵ (د ∘ د ∘ د) (١)

= د (د [د (١)]) [من الرسم د (١) = ٥]

= د (د (٥)) [من الرسم د (٥) = صفر]

= د (صفر) [من الرسم د (٠) = ٢]

= ٢

⑨ (د ∘ ت) (٣) − (د ∘ ت) (٨)

= د (ت (٣)) − د (ت (٨))

= د (٢) − د (٤)

= ٤ − ٨ = −٤

٢

① (د ∘ د) (س) = د (د (س)) = د ($\frac{١}{س}$)

= ١ ÷ $\frac{١}{س}$ = س

② (د ∘ د ∘ د) (س) = د (د (د (س)))

= د (د ($\frac{١}{س}$))

= د (س) = $\frac{١}{س}$

③ نلاحظ مما سبق أن التركيب مرتين يعطى س والتركيب ثلاثة مرات يعطى $\frac{١}{س}$ وهكذا نلاحظ أن فى باقى التركيب يعطى س ثم $\frac{١}{س}$

∴ (د ∘ د ∘ د ∘ ..... إلى ن من المرات) (س)

= { س إذا كانت ن زوجية
$\frac{١}{س}$ إذا كانت ن فردية

إجابات تمارين 3

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (أ) ③ (أ) ④ (ب)
⑤ (أ) ⑥ (جـ) ⑦ (ب) ⑧ (ب)
⑨ (أ) ⑩ (جـ) ⑪ (أ) ⑫ (د)
⑬ (أ) ⑭ (د) ⑮ (ب) ⑯ (د)
⑰ (د) ⑱ (ب) ⑲ (جـ) ⑳ (جـ)
㉑ (أ) ㉒ (جـ) ㉓ (ب) ㉔ (جـ)
㉕ (جـ) ㉖ (ب) ㉗ (د) ㉘ (جـ)
㉙ (أ) ㉚ (جـ) ㉛ (أ) ㉜ (جـ)
㉝ (جـ) ㉞ (أ) ㉟ (أ) ㊱ (ب)
㊲ (د) ㊳ (د) ㊴ (ب) ㊵ (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

شكل (١) : متماثل حول محور السينات ومحور الصادات ونقطة الأصل

شكل (٢) : متماثل حول محور السينات

شكل (٣) : متماثل حول نقطة الأصل

شكل (٤) : متماثل حول نقطة الأصل

شكل (٥) : متماثل حول محور الصادات

شكل (٦) : متماثل حول نقطة الأصل

٢

① فردية ② ليست زوجية وليست فردية

③ زوجية ④ ليست زوجية وليست فردية

⑤ فردية ⑥ فردية

٣

شكل (١) : د (س) = س^٣ + س

∵ مجال د = ح والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل

∴ الدالة د فردية.

التحقيق الجبرى : لكل س ، −س ∈ ح

∵ د (−س) = (−س)^٣ + (−س)

= −س^٣ − س = −(س^٣ + س)

= −د (س)

∴ الدالة فردية

شكل (٢) : د (س) = س^٣ − ٢

∵ مجال د = ح

، المنحنى ليس متماثلاً حول محور الصادات وليس متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل.

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

التحقيق الجبرى : لكل س ، −س ∈ ح

∵ د (−س) = (−س)^٣ − ٢ = −س^٣ − ٢

= −(س^٣ + ٢)

∴ د (−س) ≠ د (س) ≠ −د (س)

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

شكل (٣) : د (س) = ٢ − س^٢

∵ مجال د = [−٢ ، ٢]

، المنحنى متماثل حول محور الصادات.

∴ الدالة د زوجية.

التحقيق الجبرى : لكل س ، −س ∈ [−٢ ، ٢]

∵ د (−س) = ٢ − (−س)^٢

= ٢ − س^٢ = د (س)

∴ الدالة زوجية.

٤

أولاً :

شكل (١)

شكل (٣)

ثانيًا :

شكل (٢)

ثالثًا :

شكل (١) : المجال = [−٥ ، ٥] ، المدى = [−٢ ، ٧] ، ليست أحادية

شكل (٢) : المجال = ح − {٠} ، المدى = [−٢ ، ٢] − {٠} ، ليست أحادية

شكل (٣) : المجال = ح ، المدى = [−٣ ، ٦] ، ليست أحادية

٥

① د (−س) = ٥ = د (س) ∴ الدالة زوجية.

② د (−س) = (−س)^٤ + (−س)^٢ − ١

= س^٤ + س^٢ − ١ = د (س)

∴ الدالة زوجية.

③ د (−س) = ٣ (−س) − ٤ (−س)^٣

= −٣ س + ٤ س^٣

= −(٣ س − ٤ س^٣) = −د (س)

∴ الدالة فردية.

(٤) $د(-س) = (-س)^{٢} - ٣(-س) + ٤$

$= س^{٢} + ٣س + ٤$

$\ne د(س) \ne -د(س)$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

(٥) $د(-س) = (-س)^{٣}\left((-س)^{٢} - ١\right)$

$= -س^{٣}(س^{٢} - ١) = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

(٦) $د(-س) = (-س - ٣)^{٢} - ٧$

$= (س + ٣)^{٢} - ٧$

$\ne د(س) \ne -د(س)$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

(٧) ∵ مجال الدالة $= ح - \{٣\}$

∴ $-٣ \in$ مجال الدالة ، $٣ \notin$ مجالها

∴ الدالة ليست فردية وليست زوجية.

(٨) $د(-س) = \frac{٢(-س)^{٣} - (-س)^{٥}}{-س}$

$= \frac{-٢س^{٣} + س^{٥}}{-س}$

$= \frac{-(٢س^{٣} - س^{٥})}{-س}$

$= \frac{٢س^{٣} - س^{٥}}{س} = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

(٩) ∵ مجال د $= [-٣ ، \infty[$

∴ لكل $س \in [-٣ ، \infty[$

ليس بالضرورة أن يوجد $-س \in [-٣ ، \infty[$

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

(١٠) $د(-س) = \left((-س)^{٢} + ١\right)^{٣} = (س^{٢} + ١)^{٣}$

$= د(س)$

∴ الدالة زوجية.

(١١) $د(-س) = \sqrt[٣]{(-س)^{٢} + ٦} = \sqrt[٣]{س^{٢} + ٦} = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

(١٢) $د(-س) = \sqrt[٣]{(-س)^{٣} + (-س)}$

$= \sqrt[٣]{-(س^{٣} + س)} = -\sqrt[٣]{س^{٣} + س}$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

(١٣) $د(-س) = (-س)^{٣} - \frac{١}{-س}$

$= -س^{٣} + \frac{١}{س}$

$= -\left(س^{٣} - \frac{١}{س}\right) = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

(١٤) $د(-س) = \left(-س - \frac{٢}{-س}\right)^{٣}$

$= \left(-\left(س - \frac{٢}{س}\right)\right)^{٣}$

$= -\left(س - \frac{٢}{س}\right)^{٣} = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

(١٥) $د(-س) = \left(\frac{(-س)^{٢}}{٣} - \frac{٥}{(-س)^{٤}}\right)^{٥}$

$= \left(\frac{س^{٢}}{٣} - \frac{٥}{س^{٤}}\right)^{٥} = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

(١٦) $د(-س) = \left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)^{٢} - \left(\frac{١ - س}{١ + س}\right)^{٢}$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

(١٧) $د(-س) = \left(\frac{-س - ١}{-س + ١}\right)^{٥} + \left(\frac{-س + ١}{-س - ١}\right)^{٥}$

$= \left[\frac{-(س + ١)}{-(س - ١)}\right]^{٥} + \left[\frac{-(س - ١)}{-(س + ١)}\right]^{٥}$

$= \left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^{٥} + \left(\frac{س - ١}{س + ١}\right)^{٥}$

$= د(س)$

∴ الدالة زوجية.

(١٨) $د(-س) = \left((-س)^{٣} + ١\right)^{٤} - \left((-س)^{٣} - ١\right)^{٤}$

$= \left(-(س^{٣} - ١)\right)^{٤} - \left(-(س^{٣} + ١)\right)^{٤}$

$= (س^{٣} - ١)^{٤} - (س^{٣} + ١)^{٤}$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

(١٩) $د(-س) = -س\ حتا(-س) = -س\ حتاس$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

(٢٠) $د(-س) = \frac{-٣س}{طا(-س)} = \frac{-٣س}{-طاس} = \frac{٣س}{طاس}$

$= د(س)$

∴ الدالة زوجية.

(٢١) $د(-س) = \frac{(-س)^{٣} \times جا(-٣س)}{١ + (-س)^{٤}}$

$= \frac{س^{٣}\ جا٣س}{١ + س^{٤}} = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

(٢٢) $د(-س) = \frac{٣(-س)^{٢} - حتا(-س)}{(-س)^{٣} + ٦س}$

$= \frac{٣س^{٢} - حتاس}{-س^{٣} + ٦س} = \frac{٣س^{٢} - حتاس}{-(س^{٣} - ٦س)}$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

(٢٣) $د(-س) = (-س)^{٢}\left(جا(-س)\right)^{٣}$

$= س^{٢}(-جاس)^{٣} = -س^{٢}\ جا^{٣}س$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

(٢٤) $د(-س) = -س\ جا(-س)^{٣}$

$= -س\ جا(-س^{٣})$

$= س\ جاس^{٣} = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

(٢٥) $د(-س) = \frac{(-س)^{٢} + طا(-س)}{(-س)^{٤} + جا(-س)}$

$= \frac{س^{٢} - طاس}{س^{٤} - جاس} \ne د(س) \ne -د(س)$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

(٢٦) $د(-س) = جا(-س)^{٢} - \left(جا(-س)\right)^{٢}$

$= جاس^{٢} - (-جاس)^{٢}$

$= جاس^{٢} - جا^{٢}س = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

(٢٧) $د(-س) = (-س)^{٤} + جا^{٦}(-س)$

$= س^{٤} + (-جاس)^{٦}$

$= س^{٤} + جا^{٦}س = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

(٢٨) $د(-س) = (-س)^{٧} + طا^{٥}(-س)$

$= -س^{٧} + (-طاس)^{٥}$

$= -س^{٧} - طا^{٥}س = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

(٢٩) $د(-س) = \frac{جا(-٣س)\ حتا(-٢س)}{قا(-س)}$

$= \frac{-جا٣س\ حتا٢س}{قاس} = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

(٣٠) ∵ $د(س) = ٢^{٢س} + حتاس + ٢^{-٢س}$

∴ $د(-س) = ٢^{-٢س} + حتا(-س) + ٢^{٢س}$

$= ٢^{-٢س} + حتاس + ٢^{٢س}$

$= د(س)$

∴ الدالة زوجية.

(٣١) ∵ $د(س)$

$= \left((حتاس + جاس) - ١\right)\left((حتاس + جاس) + ١\right)$

$= (حتاس + جاس)^{٢} - ١$

$= حتا^{٢}س + جا^{٢}س + ٢\ جاس\ حتاس - ١$

$= ١ + ٢\ جاس\ حتاس - ١ = ٢\ جاس\ حتاس$

∴ $د(-س) = ٢\ جا(-س)\ حتا(-س)$

$= -٢\ جاس\ حتاس = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

(٣٢) د (−س) = { −٢س ، −س ≤ ٠ ؛ ٢س ، −س > ٠ }

= { −٢س ، س ≥ ٠ ؛ ٢س ، س < ٠ }

= { ٢س ، س ≤ ٠ ؛ −٢س ، س > ٠ }

= د (س)

∴ الدالة زوجية.

(٣٣) د (−س)

= { −٢س + (−س)^{٢} ، −س ≥ ٠ ؛ −٢س − (−س)^{٢} ، −س < ٠ }

= { −(٢س − س^{٢}) ، س ≤ ٠ ؛ −(٢س + س^{٢}) ، س > ٠ }

= { −(٢س + س^{٢}) ، س ≥ ٠ ؛ −(٢س − س^{٢}) ، س < ٠ }

= − { ٢س + س^{٢} ، س ≥ ٠ ؛ ٢س − س^{٢} ، س < ٠ }

= − د (س)

∴ الدالة فردية.

٦

شكل (١) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

التحقيق الجبرى :

بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = ٢ − ٢أ ، د (ب) = ٢ − ٢ب

وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ ٢ − ٢أ = ٢ − ٢ب

∴ −٢أ = −٢ب ∴ أ = ب

∴ الدالة د أحادية

شكل (٢) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

التحقيق الجبرى :

بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = ٤ − أ^{٣} ، د (ب) = ٤ − ب^{٣}

وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ ٤ − أ^{٣} = ٤ − ب^{٣}

∴ −أ^{٣} = −ب^{٣} ∴ أ = ب

∴ الدالة د أحادية.

شكل (٣) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

التحقيق الجبرى :

بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = $\frac{أ - ١}{أ - ٢}$ ، د (ب) = $\frac{ب - ١}{ب - ٢}$

وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ $\frac{أ - ١}{أ - ٢} = \frac{ب - ١}{ب - ٢}$

∴ (أ − ١) (ب − ٢) = (أ − ٢) (ب − ١)

∴ أب − ٢أ − ب + ٢ = أب − أ − ٢ب + ٢

∴ −٢أ − ب = −أ − ٢ب

∴ ٢ب − ب = ٢أ − أ ∴ ب = أ

∴ الدالة د أحادية.

٧

(١) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ٢أ − ٣ ، د (ب) = ٢ب − ٣

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٢أ − ٣ = ٢ب − ٣ ∴ ٢أ = ٢ب

∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

(٢) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ٤ − أ^{٣} ، د (ب) = ٤ − ب^{٣}

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٤ − أ^{٣} = ٤ − ب^{٣} ∴ −أ^{٣} = −ب^{٣}

∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية

(٣) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = $\frac{٣}{٢أ + ٥}$ ، د (ب) = $\frac{٣}{٢ب + ٥}$

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{٣}{٢أ + ٥} = \frac{٣}{٢ب + ٥}$ ∴ ٢أ + ٥ = ٢ب + ٥

∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

(٤) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = $\frac{٣أ - ٥}{٤أ + ٣}$ ، د (ب) = $\frac{٣ب - ٥}{٤ب + ٣}$

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{٣أ - ٥}{٤أ + ٣} = \frac{٣ب - ٥}{٤ب + ٣}$

∴ (٣أ − ٥) (٤ب + ٣) = (٤أ + ٣) (٣ب − ٥)

∴ ١٢أب + ٩أ − ٢٠ب − ١٥

= ١٢أب − ٢٠أ + ٩ب − ١٥

∴ ٩أ − ٢٠ب = −٢٠أ + ٩ب

∴ ٢٩أ = ٢٩ب

∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

٨

(١) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د ، أ ≠ ب

، ∵ د (أ) = ٣ ، د (ب) = ٣

∴ د (أ) = د (ب) ∴ د دالة ليست أحادية.

(٢) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = (أ + ٣)^{٢} ، د (ب) = (ب + ٣)^{٢}

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ (أ + ٣)^{٢} = (ب + ٣)^{٢} ∴ أ + ٣ = ± (ب + ٣)

∴ أ + ٣ = ب + ٣ ∴ أ = ب

أ، أ + ٣ = −ب − ٣ ∴ أ = −ب − ٦

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، −ب − ٦

∴ د دالة ليست أحادية.

(٣) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = أ^{٢} − ٥أ + ٦

، د (ب) = ب^{٢} − ٥ب + ٦

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ أ^{٢} − ٥أ + ٦ = ب^{٢} − ٥ب + ٦

∴ أ^{٢} − ٥أ = ب^{٢} − ٥ب

∴ أ^{٢} − ب^{٢} − ٥أ + ٥ب = ٠

∴ (أ − ب) (أ + ب) − ٥ (أ − ب) = ٠

∴ (أ − ب) (أ + ب − ٥) = ٠

∴ أ − ب = ٠ ∴ أ = ب

أ، أ + ب − ٥ = ٠ ∴ أ = −ب + ٥

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، −ب + ٥

∴ د دالة ليست أحادية.

(٤) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = $\frac{١}{أ^{٢} - ٤}$ ، د (ب) = $\frac{١}{ب^{٢} - ٤}$

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{١}{أ^{٢} - ٤} = \frac{١}{ب^{٢} - ٤}$ ∴ أ^{٢} − ٤ = ب^{٢} − ٤

∴ أ^{٢} = ب^{٢} ∴ أ = ± ب

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، −ب

∴ د دالة ليست أحادية.

٩

(١) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ٢أ^{٢} − أ − ٣

، د (ب) = ٢ب^{٢} − ب − ٣

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٢أ^{٢} − أ − ٣ = ٢ب^{٢} − ب − ٣

∴ ٢أ^{٢} − ٢ب^{٢} − أ + ب = ٠.

∴ ٢ (أ^{2} − ب^{2}) − (أ − ب) = ٠
∴ ٢ (أ − ب) (أ + ب) − (أ − ب) = ٠
∴ (أ − ب) (٢ (أ + ب) − ١) = ٠
∴ أ − ب = ٠ ∴ أ = ب
أ، ٢ (أ + ب) − ١ = ٠
∴ أ + ب = $\frac{1}{2}$ ∴ أ = $\frac{1}{2}$ − ب
∴ أ لها قيمتان هما : ب ، $\frac{1}{2}$ − ب
∴ د دالة ليست أحادية.

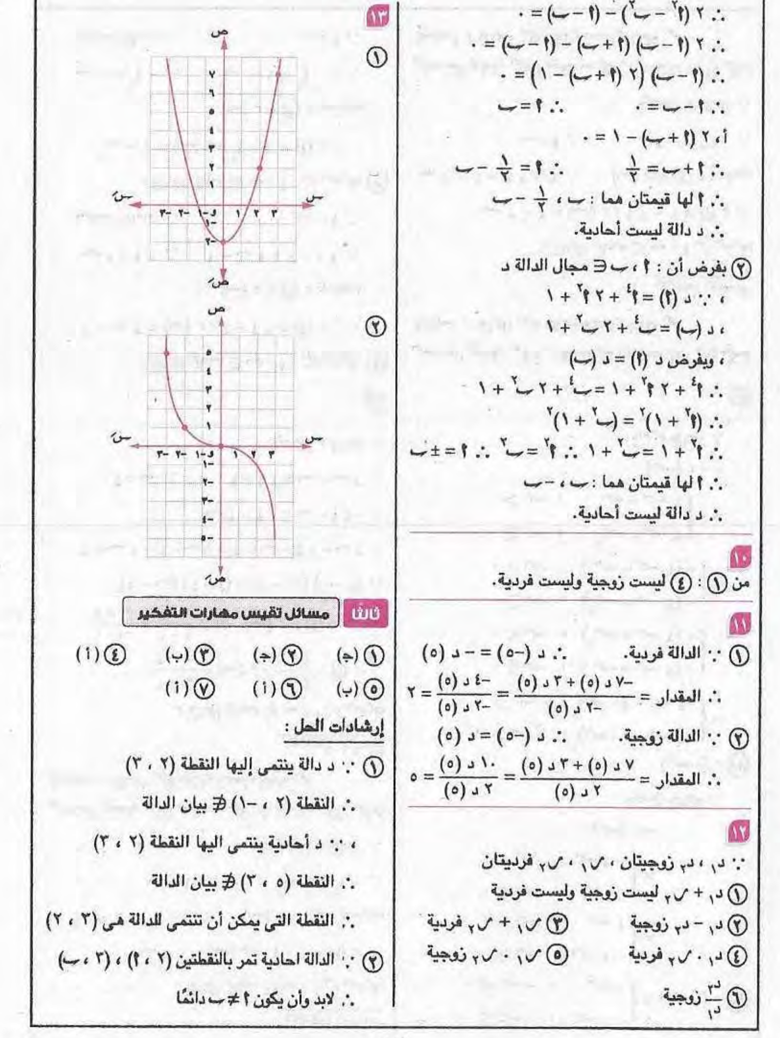
② بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د
، ∵ د (أ) = أ^{4} + ٢ أ^{2} + ١
، د (ب) = ب^{4} + ٢ ب^{2} + ١
، ويفرض د (أ) = د (ب)
∴ أ^{4} + ٢ أ^{2} + ١ = ب^{4} + ٢ ب^{2} + ١
∴ (أ^{2} + ١)^{2} = (ب^{2} + ١)^{2}
∴ أ^{2} + ١ = ب^{2} + ١ ∴ أ^{2} = ب^{2} ∴ أ = ± ب
∴ أ لها قيمتان هما : ب ، −ب
∴ د دالة ليست أحادية.

١٠
من ① : ④ ليست زوجية وليست فردية.

١١
① ∵ الدالة فردية. ∴ د (−٥) = − د (٥)
∴ المقدار = $\frac{-٧\ د(٥) + ٣\ د(٥)}{-٢\ د(٥)} = \frac{-٤\ د(٥)}{-٢\ د(٥)} = ٢$

② ∵ الدالة زوجية. ∴ د (−٥) = د (٥)
∴ المقدار = $\frac{٧\ د(٥) + ٣\ د(٥)}{٢\ د(٥)} = \frac{١٠\ د(٥)}{٢\ د(٥)} = ٥$

١٢
∵ د$_1$ ، د$_2$ زوجيتان ، ر$_1$ ، ر$_2$ فرديتان
① د$_1$ + ر$_2$ ليست زوجية وليست فردية
② د$_1$ − د$_2$ زوجية ③ ر$_1$ + ر$_2$ فردية
④ د$_1$. ر$_2$ فردية ⑤ ر$_1$. ر$_2$ زوجية
⑥ $\frac{د_2}{د_1}$ زوجية

١٣
①

②

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (جـ) ② (جـ) ③ (ب) ④ (أ)
⑤ (ب) ⑥ (أ) ⑦ (أ)

إرشادات الحل :
① ∵ د دالة ينتمى إليها النقطة (٢ ، ٣)
∴ النقطة (٢ ، −١) ∉ بيان الدالة
، ∵ د أحادية ينتمى اليها النقطة (٢ ، ٣)
∴ النقطة (٥ ، ٣) ∉ بيان الدالة
∴ النقطة التى يمكن أن تنتمى للدالة هى (٣ ، ٢)
② ∵ الدالة احادية تمر بالنقطتين (٢ ، أ) ، (٣ ، ب)
∴ لابد وأن يكون أ ≠ ب دائمًا

③ ∵ د فردية ، د (١) = ك ∴ د (−١) = −ك
، ∵ د (س + ٢) = د (س) + د (٢)
بوضع س = −١
∴ د (١) = د (−١) + د (٢)
∴ ك = −ك + د (٢) ∴ د (٢) = ٢ك
، بوضع س = ١
∴ د (٣) = د (١) + د (٢) = ك + ٢ك = ٣ك

④ ∵ (د + ر) (−س)
$= \frac{١ + (-س)}{١ - (-س)} + \frac{١ - (-س)}{١ + (-س)}$
$= \frac{١ - س}{١ + س} + \frac{١ + س}{١ - س}$ = (د + ر) (س)
∴ (د + ر) دالة زوجية
∵ (د . ر) (س) = $\frac{١ + س}{١ - س} \times \frac{١ - س}{١ + س} = ١$
∴ (د . ر) دالة زوجية أيضًا.

⑤ ∵ ر (−س) = د (−س) + د (س) = ر (س)
∴ ر دالة زوجية دائمًا

⑥ ∵ ٣ د (س) + ٢ د (−س) = س^{3} − جاس (١)
ويوضع −س بدلًا من س
∴ ٣ د (−س) + ٢ د (س) = (−س)^{3} − جا(−س)
∴ ٣ د (−س) + ٢ د (س) = −س^{3} + جاس (٢)
بجمع (١) ، (٢) :
∴ ٥ د (س) + ٥ د (−س) = صفر
∴ د (س) = − د (−س)
∴ الدالة فردية.

⑦ د (س) = س^{3} ، ر (س) = س^{2} + ١
(١) (د × ر) (س) = س^{3} (س^{2} + ١)
∴ (د × ر) (−س) = (−س)^{3} ((−س)^{2} + ١)
= −س^{3} (س^{2} + ١)
∴ (د × ر) (−س) = − (د × ر) (س)
أى أن : (د × ر) فردية.

(٢) (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))
= د (س^{2} + ١)
= (س^{2} + ١)^{3}
∴ (د ∘ ر) (−س) = ((−س)^{2} + ١)^{3}
= (س^{2} + ١)^{3}
= (د ∘ ر) (س)
∴ (د ∘ ر) زوجية.

(٣) (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))
= ر (س^{3}) = س^{6} + ١
∴ (ر ∘ د) (−س) = ((−س)^{6} + ١)
= س^{6} + ١ = (ر ∘ د) (س)
∴ (ر ∘ د) زوجية.
∴ الإجابة (أ) هى الصحيحة.

إجابات تمارين 4

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ) ② (جـ) ③ (د) ④ (ب)
⑤ (د) ⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (جـ)
⑨ (جـ) ⑩ (جـ) ⑪ (د) ⑫ (ب)
⑬ (ب) ⑭ (ب) ⑮ (جـ) ⑯ (ب)
⑰ (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١
①

المدى = {−٣ ، ١ ، ٥ ، ٧}

②

المدى = [٢ ، ٦[

③

المدى =]٢ ، ∞[

④

المدى = ح

⑤

المدى =]٠ ، ∞[

⑥

المدى = [−٥ ، ∞[

⑦

* لاحظ أن رأس المنحنى $\left(١{,}٥ ، -٢\frac{١}{٤}\right)$

* المدى = $\left[-٢\frac{١}{٤} ، ١٨\right]$

٢

①

* المدى = [١ ، ٦[

* الدالة تناقصية فى]−٢ ، ١[

، وتزايدية فى]١ ، ٦[

② الدالة ليست أحادية لأنه يوجد خط أفقى يقطع الدالة فى أكثر من نقطة.

٣

①

$د(س) = \frac{٣(س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)}$

∴ د (س) = ٣

، س ≠ ± ١

* المجال = ح − {١ ، −١} * المدى = {٣}

* الدالة ثابتة على مجالها. * الدالة زوجية.

* الدالة متماثلة حول محور الصادات.

②

$د(س) = \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{س + ٢} = ٢ - س$

، س ≠ −٢

* المجال = ح − {−٢}

* المدى = ح − {٤}

* الدالة تناقصية على مجالها

* الدالة ليست فردية

وليست زوجية.

③

$د(س) = \frac{س(س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)} = س$ ، س ≠ ± ١

* المجال = ح − {−١ ، ١}

* المدى = ح − {−١ ، ١}

* الدالة تزايدية

على ح − {−١ ، ١}

* الدالة فردية.

* الدالة متماثلة حول نقطة الأصل.

④

د (س)

$= \frac{س^٢(س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)} = س^٢$

حيث س ≠ ± ١

* المجال = ح − {١ ، −١}

* المدى = [٠ ، ∞[− {١}

* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠] − {−١}

، وتزايدية فى [٠ ، ∞[− {١} * الدالة زوجية.

* الدالة متماثلة حول محور الصادات.

٤

①

* المجال =]−∞ ، ٣[

* المدى = {٢}

* الدالة ثابتة فى الفترة]−∞ ، ٣[

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

②

* المجال = ح

* المدى = {−٣ ، ٢}

* الدالة ثابتة فى كل من :

]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

③

* المجال = ح

* المدى

=]−∞ ، −١] ∪ {٢}

* الدالة ثابتة فى]١ ، ∞[، وتزايدية فى]−∞ ، ١[

* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

④

* المجال = [−٢ ، ٤]
* المدى = [٠ ، ٣]
* الدالة تزايدية في]−٢ ، ١[
، وتناقصية في]١ ، ٤[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* محور التماثل هو المستقيم س = ١

⑤

* المجال = ع
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة ثابتة في]−∞ ، −٢[
، وتناقصية في]−٢ ، ٠[، وتزايدية في]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑥

* المجال = ع
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية في]−∞ ، ٠[
، وتزايدية في]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑦

* المجال = ع − {١}
* المدى =]−∞ ، ١[
* الدالة تزايدية في]−∞ ، ١[
، وثابتة في]١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑧

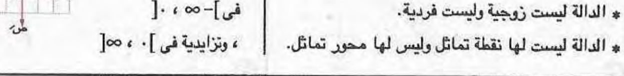
* المجال = ع
* المدى =]−∞ ، ١]
* الدالة تزايدية في]−∞ ، ١[
، وتناقصية في]١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑨

* المجال = ع
* المدى = [صفر ، ∞[
* الدالة تناقصية في]−∞ ، ٠[
،]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑩

* المجال = ع
* المدى = [صفر ، ∞[
* الدالة تناقصية في]−∞ ، ٠[
، وتزايدية في]٠ ، ∞[



* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑪

* المجال = ع   * المدى = [٠ ، ٣]
* الدالة ثابتة في كل من]−∞ ، −٣[،]٣ ، ∞[
، وتناقصية في]−٣ ، ٠[، وتزايدية في]٠ ، ٣[
* الدالة زوجية.   * محور التماثل هو المستقيم : س = ٠

⑫

د(س) = { −٣ ، س > ٢ ؛ ٢ ، س < ٢ }

* المجال = ع − {٢}
* المدى = {٢ ، −٣}
* الدالة ثابتة في كل من :]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑬

* المجال = [−٣ ، ٣]
* المدى = {٠ ، ٢}
* الدالة ثابتة في كل من :
]−٣ ، −١[،]−١ ، ١[،]١ ، ٣[
* الدالة زوجية
* محور التماثل هو المستقيم س = ٠

⑭

* المجال = [−٤ ، ٤]   * المدى = [١ ، ٣]
* الدالة تناقصية في]−٤ ، −٢[
، وثابتة في]−٢ ، ٢[
وتزايدية في]٢ ، ٤[* الدالة زوجية.
* محور التماثل هو المستقيم س = ٠

٥

$د_1$(س) = ٣س − ١ ، مجالها = ع
، $د_2$(س) = ٣ − ٢س ، مجالها = [−٢ ، ٣]
، ($د_1$ + $د_2$)(س) = س + ٢ ، ومجالها = [−٢ ، ٣]

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣
($د_1$ + $د_2$)(س)	٠	١	٢	٣	٤	٥

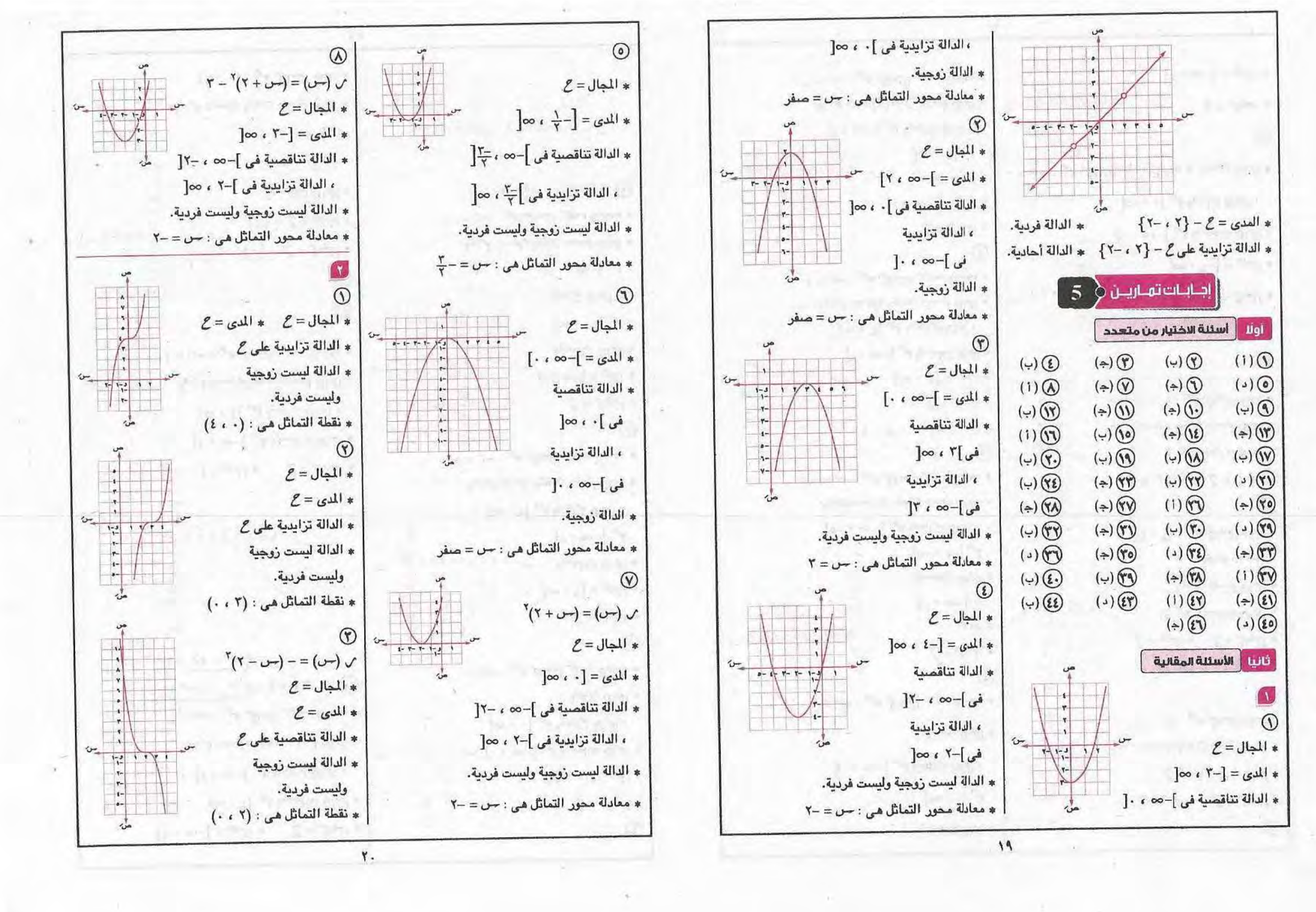
* المجال = [−٢ ، ٣]
* الدالة تزايدية في]−٢ ، ٣[

٦

∵ د(س) = $س^3$ − ٤س ومجالها = ع
، ر(س) = $س^2$ − ٤ ومجالها = ع

$$\therefore \frac{د}{ر}(س) = \frac{س^3 - ٤س}{س^2 - ٤} = \frac{س(س^2 - ٤)}{س^2 - ٤} = س$$

حيث س ≠ ±٢
ومجال $\frac{د}{ر}$ = ع − {٢ ، −٢}



* المدى = ح − {٢ ، −٢} * الدالة فردية.
* الدالة تزايدية على ح − {٢ ، −٢} * الدالة أحادية.

إجابات تمارين 5

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (أ)	(٢) (ب)	(٣) (جـ)	(٤) (ب)
(٥) (د)	(٦) (جـ)	(٧) (جـ)	(٨) (أ)
(٩) (ب)	(١٠) (جـ)	(١١) (جـ)	(١٢) (ب)
(١٣) (جـ)	(١٤) (جـ)	(١٥) (ب)	(١٦) (أ)
(١٧) (ب)	(١٨) (ب)	(١٩) (ب)	(٢٠) (ب)
(٢١) (د)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (ب)
(٢٥) (جـ)	(٢٦) (أ)	(٢٧) (جـ)	(٢٨) (جـ)
(٢٩) (د)	(٣٠) (ب)	(٣١) (جـ)	(٣٢) (ب)
(٣٣) (جـ)	(٣٤) (د)	(٣٥) (جـ)	(٣٦) (د)
(٣٧) (أ)	(٣٨) (جـ)	(٣٩) (ب)	(٤٠) (ب)
(٤١) (جـ)	(٤٢) (أ)	(٤٣) (د)	(٤٤) (ب)
(٤٥) (د)	(٤٦) (جـ)		

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١)

* المجال = ح
* المدى = [−٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠]

، الدالة تزايدية فى [٠ ، ∞[
* الدالة زوجية.
* معادلة محور التماثل هى : س = صفر

(٢)

* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٢]
* الدالة تناقصية فى [٠ ، ∞[

، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠]
* الدالة زوجية.
* معادلة محور التماثل هى : س = صفر

(٣)

* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٠]
* الدالة تناقصية فى]٣ ، ∞[

، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٣[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٣

(٤)

* المجال = ح
* المدى = [−٤ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، −٢[

، الدالة تزايدية فى]−٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −٢

(٥)

* المجال = ح
* المدى = [−$\frac{١}{٢}$ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، $\frac{-٣}{٢}$[

، الدالة تزايدية فى]$\frac{-٣}{٢}$ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −$\frac{٣}{٢}$

(٦)

* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٠]
* الدالة تناقصية فى]٠ ، ∞[

، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠]
* الدالة زوجية.
* معادلة محور التماثل هى : س = صفر

(٧)

ر (س) = (س + ٢)^{٢}
* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، −٢[

، الدالة تزايدية فى]−٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −٢

(٨)

ر (س) = (س + ٢)^{٢} − ٣
* المجال = ح
* المدى = [−٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، −٢[

، الدالة تزايدية فى]−٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −٢

٢

(١)

* المجال = ح * المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٠ ، ٤)

(٢)

* المجال = ح
* المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٣ ، ٠)

(٣)

ر (س) = − (س − ٢)^{٣}
* المجال = ح
* المدى = ح
* الدالة تناقصية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ٠)

(٤)
* المجال = ح * المدى = ح
* الدالة تناقصية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (١ ، ٢)

(٥)
د(س) = −(س − ٣)^{٣} + ١
* المجال = ح * المدى = ح
* الدالة تناقصية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٣ ، ١)

(٦)
* المجال = ح * المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٠ ، −١)

٣

(١)
* المجال = ح
* المدى = [−٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠]
، الدالة تزايدية فى [٠ ، ∞[
* الدالة زوجية * معادلة محور التماثل هى : س = ٠

(٢)
* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٢]
* الدالة تناقصية
فى [٠ ، ∞[
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠]
* الدالة زوجية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٠

(٣)
* المجال = ح
* المدى
=]−∞ ، ٠]
* الدالة تناقصية
فى [−٥ ، ∞[
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، −٥]
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −٥

(٤) د(س) = |س − ٢| + ١
* المجال = ح
* المدى = [١ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢]
، الدالة تزايدية فى [٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٢

(٥)
* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٤]
* الدالة تناقصية
فى [٢ ، ∞[
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢]
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٢

(٦)
* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠]
، الدالة تزايدية فى [٠ ، ∞[
* الدالة زوجية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٠

(٧)
* المجال = ح
* المدى = [٢ ، ∞[
* الدالة تناقصية
فى]−∞ ، ٧]
، الدالة تزايدية فى [٧ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٧

(٨)
* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٥]
* الدالة تناقصية
فى [−٢ ، ∞[
، الدالة تزايدية
فى]−∞ ، −٢]
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −٢

(٩) د(س) = ١ − $\frac{١}{٢}$|س − ٢|

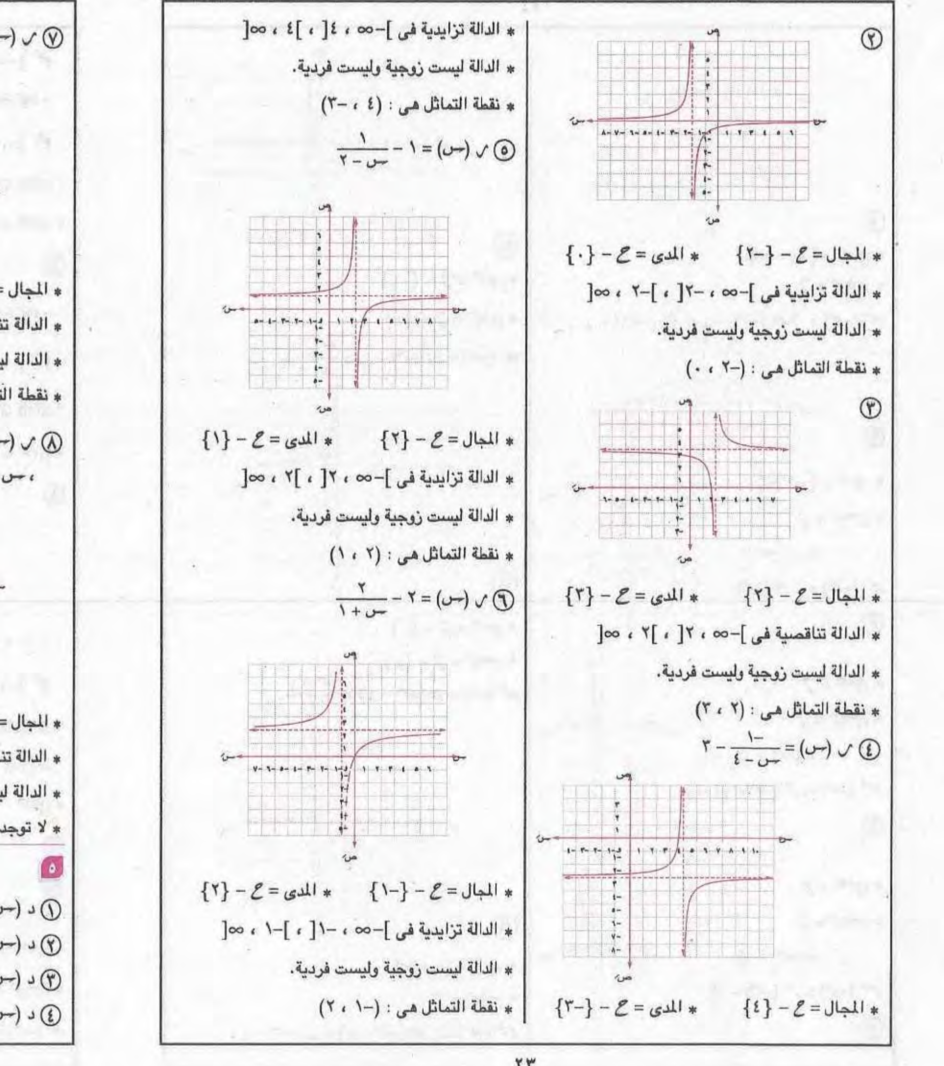
* المجال = ح * المدى =]−∞ ، ١]
* الدالة تناقصية فى [٢ ، ∞[
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢]
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٢

(١٠) ∵ د(س) = $\sqrt{س^{٢} - ٨س + ١٦}$ = $\sqrt{(س - ٤)^{٢}}$ = |س − ٤|

* المجال = ح * المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٤]
، الدالة تزايدية فى [٤ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٤

٤

(١)
* المجال = ح − {٠}
* المدى = ح − {٢}
* الدالة تناقصية
فى]٠ ، ∞[
،]−∞ ، ٠[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٠ ، ٢)



②

* المجال = ح − {−٢}   * المدى = ح − {٠}
* الدالة تزايدية فى]−∞ ، −٢[،]−٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (−٢ ، ٠)

③

* المجال = ح − {٢}   * المدى = ح − {٣}
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ٣)

④ $ر(س) = \frac{-١}{س - ٤} - ٣$

* المجال = ح − {٤}   * المدى = ح − {−٣}
* الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٤[،]٤ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٤ ، −٣)

⑤ $ر(س) = ١ - \frac{١}{س - ٢}$

* المجال = ح − {٢}   * المدى = ح − {١}
* الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ١)

⑥ $ر(س) = ٢ - \frac{٢}{س + ١}$

* المجال = ح − {−١}   * المدى = ح − {٢}
* الدالة تزايدية فى]−∞ ، −١[،]−١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (−١ ، ٢)

⑦ $ر(س) = ٣ + \frac{١}{س - ٢}$

* المجال = ح − {٢}   * المدى = ح − {٣}
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ٣)

⑧ $ر(س) = \frac{س - ١}{(س - ١)(س + ١)} = \frac{١}{س + ١}$ ، س ≠ ١

* المجال = ح − {−١ ، ١}   * المدى = ح − {٠ ، $\frac{١}{٢}$}
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، −١[،]−١ ، ١[،]١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* لا توجد نقطة تماثل.

٥

① $د(س) = س - ٢$

② $د(س) = (س + ٢)^٢ - ٣$

③ $د(س) = -(س - ١)^٢ + ٢$

④ $د(س) = (س - ٢)^٣$

⑤ $د(س) = (س + ١)^٣ - ٣$

⑥ $د(س) = |س - ٢| - ٣$

⑦ $د(س) = -|س - ١| + ٢$

⑧ $د(س) = \frac{١}{س} + ٢$

⑨ $د(س) = \frac{-١}{س + ٢} - ٢$

٦

①

$د_١(س) = د(س + ١)$

$= (س + ١)^٢$

* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[

②

$د_٢(س) = د(س) - ١$

$= س^٢ - ١$

* المجال = ح
* المدى = [−١ ، ∞[

③

$د_٣(س) = ٢ - د(س - ١)$

$= ٢ - (س - ١)^٢$

* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٢]

④

$ر_١(س) = ر(س - ١)$

$= (س - ١)^٣$

* المجال = ح
* المدى = ح

⑤

ر٢ (س) = ر (س) − $\frac{١}{٢}$

= $س^{٣}$ − $\frac{١}{٢}$

* المجال = ح
* المدى = ح

⑥

ر٣ (س) = ر (س − ١) + ٢

= $(س − ١)^{٣}$ + ٢

* المجال = ح
* المدى = ح

⑦

و١ (س) = ٢ و (س)

= ٢ |س|

* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[

⑧

و٣ (س) = $\frac{١}{٢}$ و (س) − ٣ = $\frac{١}{٢}$ |س| − ٣

* المجال = ح
* المدى = [−٣ ، ∞[

⑨

و٣ (س) = ٢ و (س − ١) = ٢ |س − ١|

* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[

⑩

ه٢ (س) = ه (س − ٢) = $\frac{١}{س − ٢}$

* المجال = ح − {٢}
* المدى = ح − {٠}

⑪

ه٣ (س) = ه (س) − ١ = $\frac{١}{س}$ − ١

* المجال = ح − {٠}
* المدى = ح − {−١}

⑫

ه٣ (س) = ٢ − ه (س + ١) = ٢ − $\frac{١}{س + ١}$

* المجال = ح − {−١}
* المدى = ح − {٢}

٧

①

* المدى

= [−١٧ ، ١٧] −]−١ ، ١[

* الدالة تناقصية

في]−٤ ، ٠[

،]٠ ، ٤[

②

* المدى = [−١ ، ∞[
* الدالة ثابتة

في]−∞ ، ٠]

، وتزايدية في]٠ ، ∞[

③

* المدى = ح
* الدالة تناقصية

في]−١ ، ∞[

، وتزايدية

في]−∞ ، −١[

٨

شكل (١) : د (س) = $|(س − ٣)^{٢} − ١|$

شكل (٢) : و (س) = $|س^{٣}|$

شكل (٣) : ر (س) = $\frac{١}{|س − ٢|}$

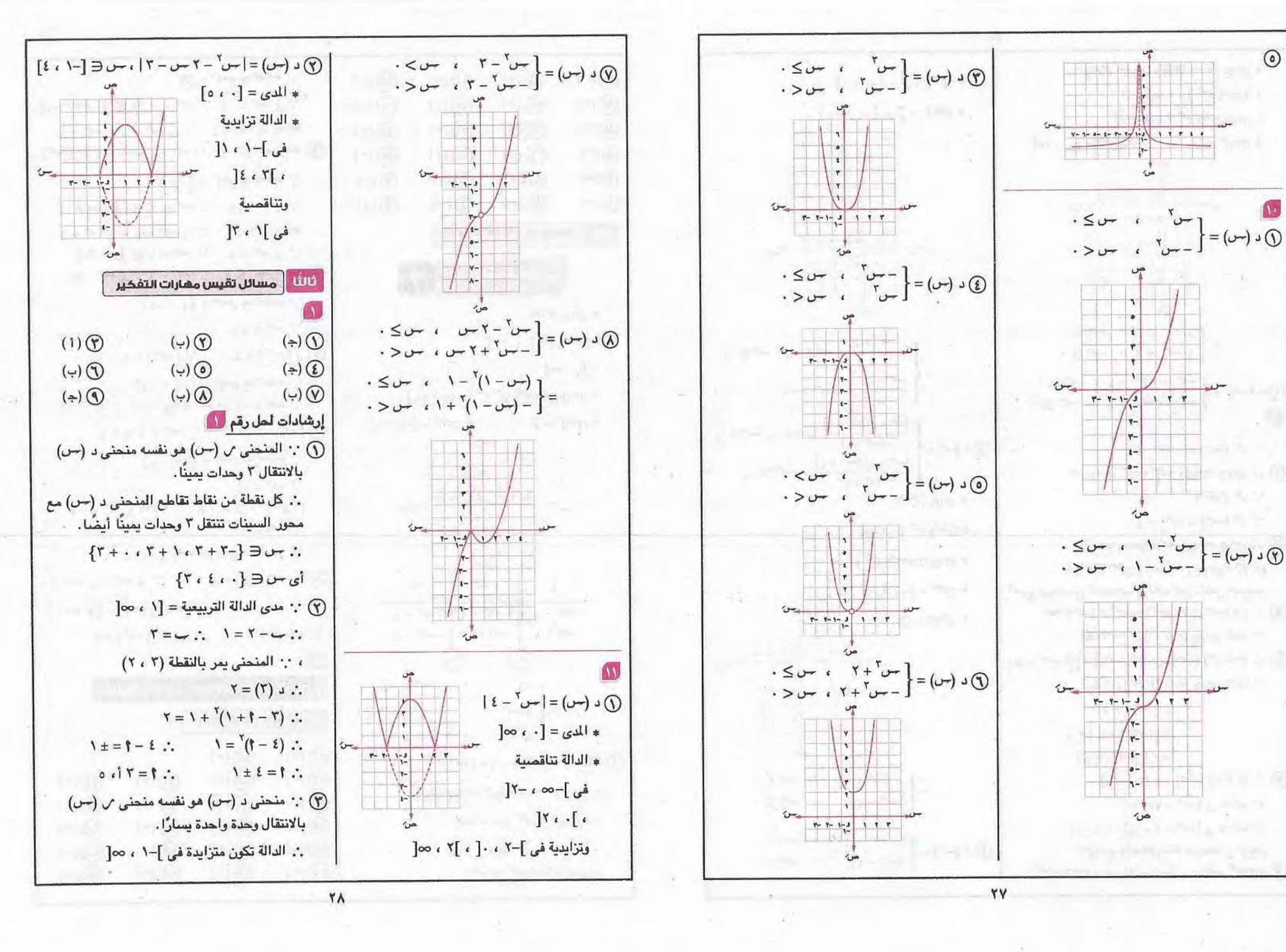
٩

①

②

③

④



⑤

١٠

① د (س) = $\begin{cases} س^{٢} & ،\ س \geq ٠ \\ -س^{٢} & ،\ س < ٠ \end{cases}$

② د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ١ & ،\ س \geq ٠ \\ -س^{٢} - ١ & ،\ س < ٠ \end{cases}$

③ د (س) = $\begin{cases} س^{٣} & ،\ س \geq ٠ \\ -س^{٣} & ،\ س < ٠ \end{cases}$

④ د (س) = $\begin{cases} -س^{٣} & ،\ س \geq ٠ \\ س^{٣} & ،\ س < ٠ \end{cases}$

⑤ د (س) = $\begin{cases} س^{٣} & ،\ س > ٠ \\ -س^{٣} & ،\ س < ٠ \end{cases}$

⑥ د (س) = $\begin{cases} س^{٣} + ٢ & ،\ س \geq ٠ \\ -س^{٣} + ٢ & ،\ س < ٠ \end{cases}$

⑦ د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٣ & ،\ س > ٠ \\ -س^{٢} - ٣ & ،\ س < ٠ \end{cases}$

⑧ د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٢س & ،\ س \geq ٠ \\ -س^{٢} + ٢س & ،\ س < ٠ \end{cases}$

= $\begin{cases} (س - ١)^{٢} - ١ & ،\ س \geq ٠ \\ -(س - ١)^{٢} + ١ & ،\ س < ٠ \end{cases}$

١١

① د (س) = $|س^{٢} - ٤|$

* المدى = [٠ ، ∞[

* الدالة تناقصية

في]-∞ ، -٢[

،]٠ ، ٢[

وتزايدية في]-٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[

② د (س) = $|س^{٢} - ٢س - ٣|$ ، س ∈ [-١ ، ٤]

* المدى = [٠ ، ٥]

* الدالة تزايدية

في]-١ ، ١[

،]٣ ، ٤[

وتناقصية

في]١ ، ٣[

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (جـ)	② (ب)	③ (أ)
④ (جـ)	⑤ (ب)	⑥ (ب)
⑦ (ب)	⑧ (ب)	⑨ (جـ)

إرشادات لحل رقم ١

① ∵ المنحنى ى (س) هو نفسه منحنى د (س) بالانتقال ٣ وحدات يمينًا.

∴ كل نقطة من نقاط تقاطع المنحنى د (س) مع محور السينات تنتقل ٣ وحدات يمينًا أيضًا.

∴ س ∈ {-٣ + ٣ ، ١ + ٣ ، ٠ + ٣}

أي س ∈ {٠ ، ٤ ، ٣}

② ∵ مدى الدالة التربيعية = [١ ، ∞[

∴ ب - ٢ = ١ ∴ ب = ٣

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ٢)

∴ د (٣) = ٢

∴ $(٣ - أ + ١)^{٢} + ١ = ٢$

∴ $(٤ - أ)^{٢} = ١$ ∴ ٤ - أ = ±١

∴ أ = ٤ ± ١ ∴ أ = ٣ أو ٥

③ ∵ منحنى د (س) هو نفسه منحنى ى (س) بالانتقال وحدة واحدة يسارًا.

∴ الدالة تكون متزايدة في]-١ ، ∞[

④ المنحنى ص = ٣ $(س - ٥)^{٢}$ + ٧ تحت تأثير انتقال ٣ وحدات يمينًا ووحدة لأسفل.

∴ ص = ٣ $(س - ٥ - ٣)^{٢}$ + ٧ − ١

∴ ص = ٣ $(س - ٨)^{٢}$ + ٦

⑤ ∵ (د ∘ د) (س) = د (د (س))

= د (|س| + ٢)

= ||س| + ٢| + ٢

= |س| + ٤

∴ مدى الدالة (د ∘ د) هو [٤ ، ∞[

⑥ ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = |$\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ − ٨|

∴ مدى الدالة (د ∘ ر) = [٠ ، ∞[

⑦ ∵ |د (س)| هو نفس منحنى د (س) بعد انعكاس الجزء المرسوم أسفل محور السينات لأعلى

أي أن : الدالة |د (س)| تكون زوجية.

⑧ ∵ الدالة متماثلة حول نقطة الأصل.

∴ ر (س) = $س^{٣}$ − ٢

∴ ر تزايدية.

⑨ ∵ الدالة متماثلة حول محور الصادات

∴ ر (س) = −$س^{٣}$ + ٢

٢

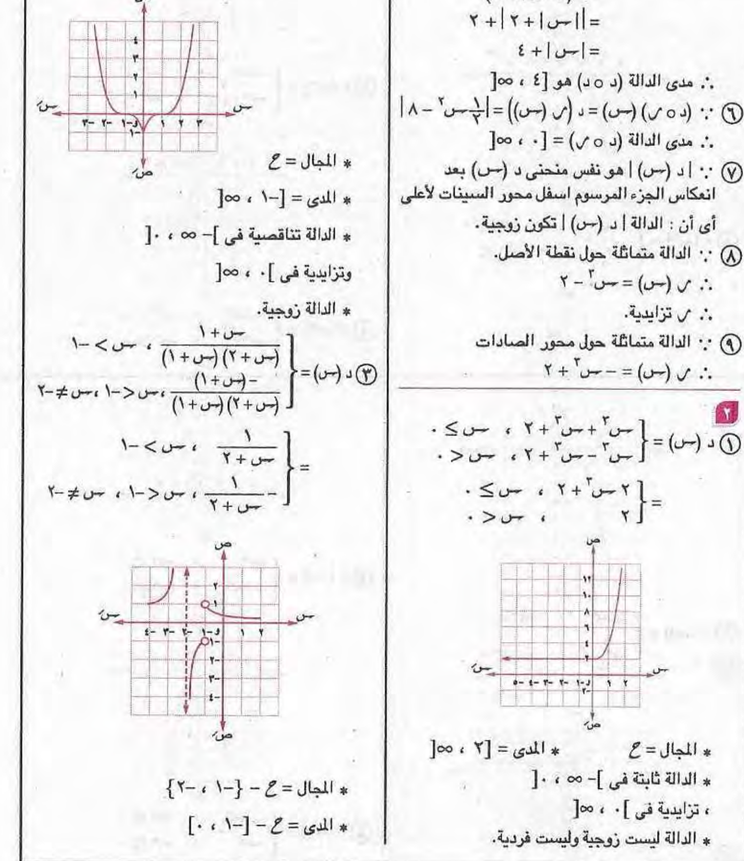
① د (س) = { $س^{٣}$ + $س^{٣}$ + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ $س^{٣}$ − $س^{٣}$ + ٢ ، س < ٠ }

= { ٢$س^{٣}$ + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ ٢ ، س < ٠ }

* المجال = ح * المدى = [٢ ، ∞[
* الدالة ثابتة في]− ∞ ، ٠]
، تزايدية في [٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

② د (س) = { $(س - ١)^{٣}$ ، س ≥ ٠ ؛ $(-س - ١)^{٣}$ ، س < ٠ }

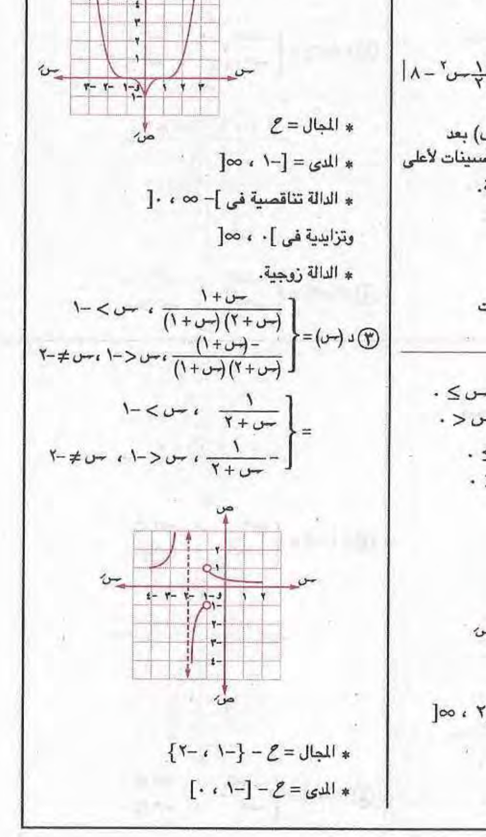
= { $(س - ١)^{٣}$ ، س ≥ ٠ ؛ −$(س + ١)^{٣}$ ، س < ٠ }



* المجال = ح
* المدى = [−١ ، ∞[
* الدالة تناقصية في]− ∞ ، ٠]
وتزايدية في [٠ ، ∞[
* الدالة زوجية.

③ د (س) = { $\frac{س + ١}{(س + ٢)(س + ١)}$ ، س > −١ ؛ $\frac{-(س + ١)}{(س + ٢)(س + ١)}$ ، س < −١ ، س ≠ −٢ }

= { $\frac{١}{س + ٢}$ ، س > −١ ؛ −$\frac{١}{س + ٢}$ ، س < −١ ، س ≠ −٢ }



* المجال = ح − {−١ ، −٢}
* المدى = ح − [−١ ، ٠]

* الدالة تزايدية في كل من :]− ∞ ، −٢[،]−٢ ، −١[
، وتناقصية في]−١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

④ د (س) = |س + ١| − |س − ١|

= { ٢ ، س > ١ ؛ ٢ س ، −١ ≤ س ≤ ١ ؛ −٢ ، س < −١ }

−س − ١	س + ١	س + ١
−س + ١	−س + ١	س − ١
−٢	٢ س	٢

(النقطتان: −١ ، ١)

* المجال = ح * المدى = [−٢ ، ٢]
* الدالة ثابتة في كل من]− ∞ ، −١[،]١ ، ∞[
وتزايدية في]−١ ، ١[
* الدالة فردية.

إجابات تمارين 6

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (أ)
⑤ (جـ) ⑥ (جـ) ⑦ (جـ) ⑧ (ب)
⑨ (ب) ⑩ (د) ⑪ (أ) ⑫ (ب)
⑬ (ب) ⑭ (جـ) ⑮ (ب) ⑯ (جـ)
⑰ (جـ) ⑱ (د) ⑲ (أ) ⑳ (ب)
㉑ (ب) ㉒ (جـ) ㉓ (جـ) ㉔ (د)
㉕ (د) ㉖ (د) ㉗ (ب) ㉘ (جـ)
㉙ (جـ) ㉚ (ب) ㉛ (د) ㉜ (د)
㉝ (د) ㉞ (ب) ㉟ (جـ) ㊱ (ب)
㊲ (جـ) ㊳ (ب) ㊴ (ب) ㊵ (أ)
㊶ (ب) ㊷ (جـ) ㊸ (جـ) ㊹ (د)
㊺ (جـ) ㊻ (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

تمارين على حل معادلات القيمة المطلقة

١

① ٤ |س| = ٢٠ ∴ |س| = ٥
∴ س = ± ٥ ∴ مجموعة الحل = {٥ ، −٥}

② |٢ س − ٣| = ٧ ∴ ٢ س − ٣ = ± ٧
∴ ٢ س − ٣ = ٧ ومنها ٢ س = ١٠
∴ س = ٥
أو ٢ س − ٣ = −٧ ومنها ٢ س = −٤
∴ س = −٢
∴ مجموعة الحل = {٥ ، −٢}

③ |س + ٢| = ١ ∴ س + ٢ = ± ١
∴ س = −١ أو س = −٣
∴ مجموعة الحل = {−١ ، −٣}

④ ٣ |س| = ٣ ∴ |س| = ١
∴ س = ± ١
∴ مجموعة الحل = {١ ، −١}

⑤ عندما س ≥ ٢ : ∴ س − ٢ = ٣ س − ٤
∴ ٢ س = ٢ ∴ س = ١ ∉ [٢ ، ∞[
عندما س < ٢ : ∴ −س + ٢ = ٣ س − ٤
∴ ٤ س = ٦ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$ ∈]− ∞ ، ٢[
∴ مجموعة الحل = {$\frac{٣}{٢}$}

⑥ عندما س ≥ −٢ : ∴ س + ٢ = س − ١ (مرفوض)
عندما س < −٢ : ∴ −س − ٢ = س − ١
∴ ٢ س = −١ ∴ س = −$\frac{١}{٢}$ ∉]− ∞ ، −٢[
∴ مجموعة الحل = ∅

⑦ عندما س ≥ −٢ : ∴ س + ٢ = − س + ٢

∴ ٢ س = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [−٢ ، ∞[

عندما س < −٢ :

∴ − س − ٢ = − س + ٢ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٠}

⑧ ∵ ٢ |س| = ٥ س − ٢١

عندما س ≥ ٠ : ∴ ٢ س = ٥ س − ٢١

∴ ٣ س = ٢١ ∴ س = ٧ ∈ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ −٢ س = ٥ س − ٢١

∴ ٧ س = ٢١ ∴ س = ٣ ∉]−∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {٧}

⑨ |س + ٥| = |س − ٣|

∴ س + ٥ = ± (س − ٣)

∴ س + ٥ = س − ٣ (مرفوض)

أ، س + ٥ = − س + ٣ ∴ ٢ س = −٢

∴ س = −١ (تحقق) ∴ مجموعة الحل = {−١}

⑩ ∵ |٢ (س − ٣)| = |س − ٣|

∴ ٢ |س − ٣| = |س − ٣|

∴ |س − ٣| = ٠ ∴ س − ٣ = ٠

∴ س = ٣ ∴ مجموعة الحل = {٣}

⑪ |س − ١| = ٢ |س − ٢|

∴ س − ١ = ± ٢ (س − ٢)

∴ س − ١ = ٢ س − ٤ ∴ س = ٣ (تحقق)

أ، س − ١ = −٢ س + ٤ ∴ ٣ س = ٥

∴ س = ٥/٣ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٣ ، ٥/٣}

⑫ عندما س ≥ ٠ : ∴ س² − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ ∈ [٠ ، ∞[أ، س = ٣ ∈ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ س² + ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س + ٢) (س + ٣) = ٠

∴ س = −٢ ∈]−∞ ، ٠[

أ، س = −٣ ∈]−∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {٢ ، ٣ ، −٢ ، −٣}

⑬ ∵ √س² − ٢ س = ٦

∴ |س| − ٢ س = ٦

عندما س ≥ ٠ : ∴ س − ٢ س = ٦

∴ س = −٦ ∉ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ − س − ٢ س = ٦

∴ −٣ س = ٦ ∴ س = −٢ ∈]−∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {−٢}

⑭ ∵ √(س² − ٤ س + ٤) = ٤

∴ √(س − ٢)² = ٤ ∴ |س − ٢| = ٤

∴ س − ٢ = ± ٤

∴ س − ٢ = ٤ ∴ س = ٦

أ، س − ٢ = −٤ ∴ س = −٢

∴ مجموعة الحل = {−٢ ، ٦}

⑮ |س| + س = ٠

عندما س ≥ ٠ : ∴ س + س = ٠

∴ ٢ س = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ − س + س = صفر

∴ صفر = صفر وذلك متحقق لجميع قيم س < ٠

∴ مجموعة الحل =]−∞ ، ٠]

⑯ عندما س ≥ −٣ : س + ٣ + ٢ س = ٠

∴ ٣ س = −٣ ∴ س = −١ ∈ [−٣ ، ∞[

عندما س < −٣ : ∴ − س − ٣ + ٢ س = ٠

∴ س = ٣ ∉]−∞ ، −٣[

∴ مجموعة الحل = {−١}

⑰ ∴ √(س² − ٦ س + ٩) + ٢ س = ٩

∴ √(س − ٣)² + ٢ س = ٩

∴ |س − ٣| + ٢ س = ٩

عندما س ≥ ٣ : ∴ س − ٣ + ٢ س = ٩

∴ ٣ س = ١٢ ∴ س = ٤ ∈ [٣ ، ∞[

عندما س < ٣ : ∴ − س + ٣ + ٢ س = ٩

∴ س = ٦ ∉]−∞ ، ٣[

∴ مجموعة الحل = {٤}

⑱ |س − ٣| (|س − ٣| − ١) = ٠

∴ |س − ٣| = ٠ ومنها س = ٣

أ، |س − ٣| − ١ = ٠ ∴ |س − ٣| = ١

∴ س − ٣ = ± ١ ومنها س = ٢ أ، س = ٤

∴ مجموعة الحل = {٣ ، ٢ ، ٤}

⑲ ∵ ٥ |س − ٣| − ٢ √(س − ٣)² = ١٢

∴ ٥ |س − ٣| − ٢ |س − ٣| = ١٢

∴ ٣ |س − ٣| = ١٢ ∴ |س − ٣| = ٤

∴ س − ٣ = ± ٤ ومنها س = ٧ أ، س = −١

∴ مجموعة الحل = {٧ ، −١}

⑳ |س − ١| |س + ١| = |س − ١|

∴ |س − ١| (|س + ١| − ١) = ٠

∴ |س − ١| = ٠ ومنها س = ١

أ، |س + ١| − ١ = ٠ ∴ |س + ١| = ١

∴ س + ١ = ± ١

ومنها س = ٠ أ، س = −٢

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٠ ، −٢}

㉑ |س² − ١| = ٢٦ ∴ س² − ١ = ± ٢٦

∴ س² = −٢٥ (مرفوض) أ، س² = ٢٧

ومنها س = ± ٣ √٣

∴ مجموعة الحل = {٣ √٣ ، −٣ √٣}

㉒ (|س + ١| + ٢) (|س + ١| − ٥) = ٠

∴ |س + ١| + ٢ = ٠

∴ |س + ١| = −٢ (مرفوض)

أ، |س + ١| − ٥ = ٠ ∴ |س + ١| = ٥

∴ س + ١ = ± ٥ ومنها س = ٤ أ، س = −٦

∴ مجموعة الحل = {٤ ، −٦}

㉓ |س − ٥|² = ٢ |س − ٥|

∴ |س − ٥| (|س − ٥| − ٢) = ٠

∴ |س − ٥| = ٠ ومنها س = ٥

أ، |س − ٥| − ٢ = ٠ ∴ |س − ٥| = ٢

ومنها س − ٥ = ± ٢

∴ س = ٧ أ، س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٥ ، ٧ ، ٣}

㉔ ∵ س |س| − س = ٠

∴ س (|س| − ١) = ٠

∴ س = ٠ أ، |س| − ١ = ٠

∴ |س| = ١ ∴ س = ± ١

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ١ ، −١}

㉕ س |س − ٥| − ٦ = ٠

عندما س ≥ ٥ : ∴ س² − ٥ س − ٦ = ٠

∴ (س − ٦) (س + ١) = ٠

∴ س = ٦ ∈ [٥ ، ∞[أ، س = −١ ∉ [٥ ، ∞[

عندما س < ٥ : − س^٢ + ٥ س − ٦ = ٠

∴ س^٢ − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ ∈]−∞ ، ٥[

أ، س = ٣ ∈]−∞ ، ٥[

∴ مجموعة الحل = {٦ ، ٢ ، ٣}

(٢٦) س^٢ + س − ١٠ = ± ١٠

∴ س^٢ + س − ١٠ = −١٠

∴ س^٢ + س = ٠ ∴ س (س + ١) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = −١

أ، س^٢ + س − ١٠ = ١٠

∴ س^٢ + س − ٢٠ = ٠

∴ (س + ٥) (س − ٤) = ٠

∴ س = −٥ أ، س = ٤

∴ مجموعة الحل = {٠ ، −١ ، −٥ ، ٤}

(٢٧) س |س − ٢| = ٤ س − ٨

عندما س > ٢ : ∴ س (س − ٢) = ٤ س − ٨

∴ س^٢ − ٢ س − ٤ س + ٨ = ٠

∴ س^٢ − ٦ س + ٨ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٤) = ٠

∴ س = ٢ ∉]٢ ، ∞[

أ، س = ٤ ∈]٢ ، ∞[

عندما س < ٢ : ∴ س (−س + ٢) = ٤ س − ٨

∴ − س^٢ + ٢ س = ٤ س − ٨

∴ س^٢ + ٢ س − ٨ = ٠

∴ (س + ٤) (س − ٢) = ٠

∴ س = −٤ ∈]−∞ ، ٢[

أ، س = ٢ ∉]−∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل = {٤ ، −٤}

(٢٨) س^٢ |س| = ٨ س

عندما س ≥ ٠ : ∴ س^٢ × س = ٨ س

∴ س^٤ − ٨ س = ٠

∴ س (س^٣ − ٨) = ٠

∴ س = ٠ ∈ [٠ ، ∞[

أ، س^٣ − ٨ = ٠ ∴ س^٣ = ٨

∴ س = ٢ ∈ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ س^٢ × −س = ٨ س

∴ س^٤ + ٨ س = ٠

∴ س (س^٣ + ٨) = ٠

∴ س = ٠ ∉]−∞ ، ٠[

أ، س^٣ + ٨ = ٠

∴ س^٣ = −٨

∴ س = −٢ ∈]−∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {−٢ ، ٠ ، ٢}

٢

* تم الحل بيانيًا وعليك التحقق جبريًا بنفسك.
* نرسم منحنيى الدالتين د (س) ، ر (س) فتكون الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين هى مجموعة حل المعادلة.

(١) ∵ |س| = ٤ ∴ د (س) = |س|

، ر (س) = ٤

من الرسم : مجموعة الحل = {٤ ، −٤}



(٢) ∵ |س| = −٢ ∴ د (س) = |س|

، ر (س) = −٢

من الرسم : مجموعة الحل = ∅

(٣) ∵ |س + ٢| = ٢ ∴ د (س) = |س + ٢|

، ر (س) = ٢

من الرسم : مجموعة الحل = {٠ ، −٤}

(٤) ∵ $\sqrt{(س - ٢)^٢}$ = ٣ ∴ |س − ٢| = ٣

∴ د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = ٣

من الرسم : مجموعة الحل = {٥ ، −١}

(٥) ∵ |س + ٣| = ٥ − س

∴ د (س) = |س + ٣| ، ر (س) = ٥ − س

من الرسم : مجموعة الحل = {١}

(٦) د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = ٣ س − ٤

من الرسم : مجموعة الحل = {$١\frac{١}{٢}$}

(٧) د (س) = ٢ |س + ٢|

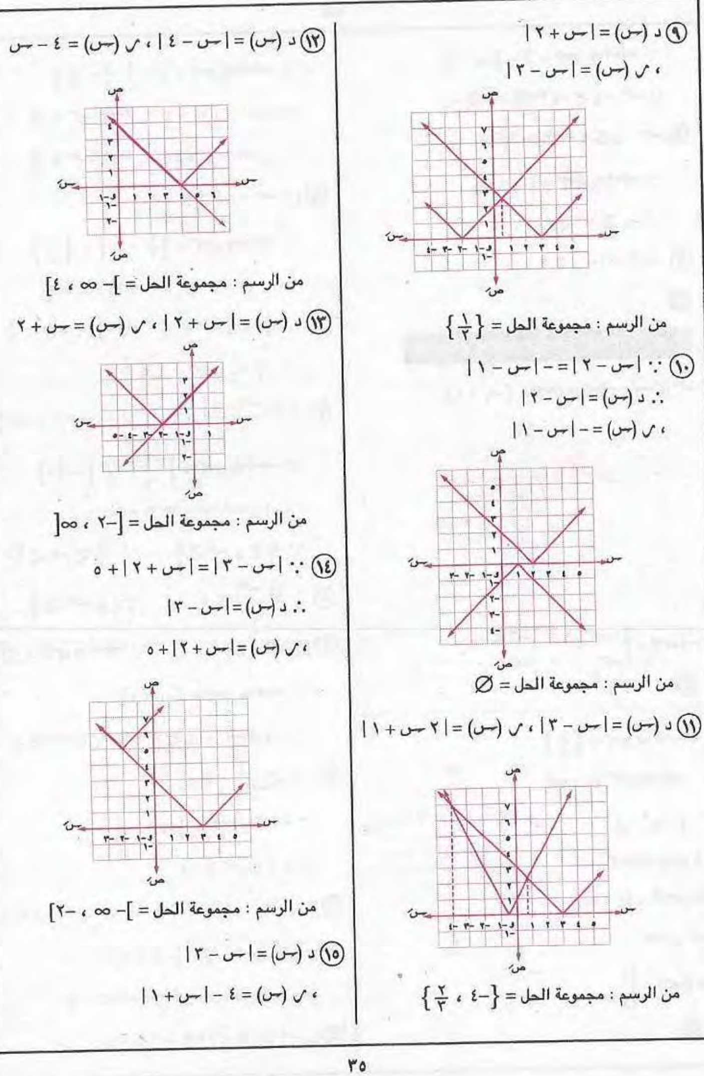
، ر (س) = ١ − س

من الرسم : مجموعة الحل = {−١ ، −٥}

(٨) د (س) = ٢ |س + $\frac{٥}{٢}$|

، ر (س) = س − ٤

من الرسم : مجموعة الحل = ∅



(٩) د (س) = |س + ٢| ، ر (س) = |س − ٢|

من الرسم : مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٢}\}$

(١٠) ∵ |س − ٢| = − |س − ١|

∴ د (س) = |س − ٢|

، ر (س) = − |س − ١|

من الرسم : مجموعة الحل = ∅

(١١) د (س) = |س − ٣| ، ر (س) = |٢ س + ١|

من الرسم : مجموعة الحل = $\{-٤ ، \frac{٢}{٣}\}$

(١٢) د (س) = |س − ٤| ، ر (س) = ٤ − س

من الرسم : مجموعة الحل =]− ∞ ، ٤]

(١٣) د (س) = |س + ٢| ، ر (س) = س + ٢

من الرسم : مجموعة الحل = [−٢ ، ∞[

(١٤) ∵ |س − ٣| = |س + ٢| + ٥

∴ د (س) = |س − ٣|

، ر (س) = |س + ٢| + ٥

من الرسم : مجموعة الحل =]− ∞ ، −٢]

(١٥) د (س) = |س − ٣|

، ر (س) = ٤ − |س + ١|

من الرسم : مجموعة الحل = [−١ ، ٣]

(١٦) د (س) = |س + ٢| ، ر (س) = $س^٢$ + ٢

من الرسم : مجموعة الحل = {٠ ، ١}

٣

د (− س) = $\frac{١٢}{|-س| + ٢}$ = $\frac{١٢}{|س| + ٢}$ = د (س)

∴ الدالة زوجية.

∵ د (س) = ٢ ∴ $\frac{١٢}{|س| + ٢}$ = ٢

∴ |س| + ٢ = ٦ ∴ |س| = ٤

∴ س = ± ٤ ∴ مجموعة الحل = {−٤ ، ٤}

٤

د (س) = ٢ $|س + \frac{٥}{٢}|$ − ٣

من الرسم :

* المدى = [−٣ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، − $\frac{٥}{٢}$]

، وتزايدية فى [− $\frac{٥}{٢}$ ، ∞[

* مجموعة الحل = {−١ ، −٤}

الحل الجبرى : ∵ |٢ س + ٥| = ٣

∴ ٢ س + ٥ = ± ٣

∴ ٢ س + ٥ = ٣ ومنها س = −١

أ ، ٢ س + ٥ = −٣ ومنها س = −٤

٥

من الرسم :

* المدى =]− ∞ ، ١]

* الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠]

، وتناقصية فى [٠ ، ∞[

* الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات.

* مجموعة الحل = {−٢ ، ٢} ويمكنك التحقق منها جبريًا.

٦

د (− س) = $\frac{١ - |-س|}{|-س|}$ = $\frac{١ - |س|}{|س|}$ = د (س)

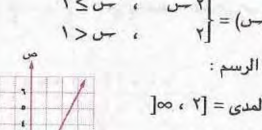
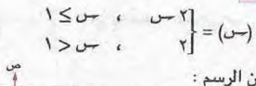
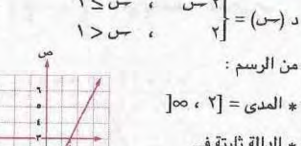
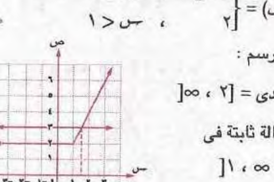
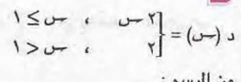
∴ الدالة زوجية.

∴ د (س) = $\frac{١ - |س|}{|س|}$ = $\frac{١}{|س|}$ − ١

من الرسم : مجموعة الحل = {−١ ، ١}

٧

د(س) = { ٢س ، س ≥ ١ ؛ ٢ ، س < ١

من الرسم :

* المدى = [٢ ، ∞[

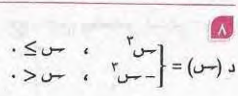
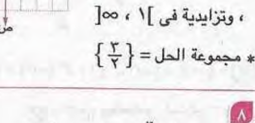
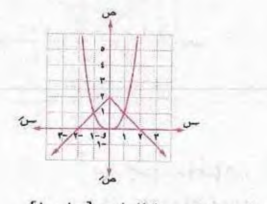
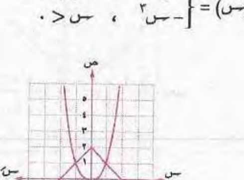
* الدالة ثابتة فى]-∞ ، ١[

، وتزايدية فى]١ ، ∞[

* مجموعة الحل = {٣/٢}

٨

د(س) = { س^٢ ، س ≥ ٠ ؛ -س^٢ ، س < ٠

من الرسم : مجموعة الحل = {-١ ، ١}

تمارين على حل متباينات القيمة المطلقة

٩

(١) -٥ ≤ س - ٣ ≤ ٥

∴ -٢ ≤ س ≤ ٨

∴ مجموعة الحل = [-٢ ، ٨]

(٢) س - ٣ ≥ ٥ ومنها س ≥ ٨

أ، س - ٣ ≤ -٥ ومنها س ≤ -٢

∴ مجموعة الحل = ح -]-٢ ، ٨[

(٣) ٢س + ٥ > ٣ ومنها س > -١

أ، ٢س + ٥ < -٣ ومنها س < -٤

مجموعة الحل = ح - [-٤ ، -١]

(٤) ∴ |س - ٣| < ٧ ∴ -٧ < س - ٣ < ٧

∴ -٤ < س < ١٠

∴ مجموعة الحل =]-٤ ، ١٠[

(٥) -١ ≤ (س - ٣)/٤ ≤ ١

∴ -٤ ≤ س - ٣ ≤ ٤ ∴ -١ ≤ س ≤ ٧

∴ مجموعة الحل = [-١ ، ٧]

(٦) |٢س + ٢| < -١ ∴ مجموعة الحل = ∅

(٧) ∵ ١/|٣س| ≥ ٥ ∴ |٣س| ≤ ١/٥

∴ -١/٥ ≤ ٣س ≤ ١/٥ ∴ -١/١٥ ≤ س ≤ ١/١٥

، ∵ |٣س| = ٠ عندما س = ٠

∴ مجموعة الحل = [-١/١٥ ، ١/١٥] - {٠}

(٨) ∵ ١/|٢س - ٣| > ٢ ∴ |٢س - ٣| < ١/٢

∴ -١/٢ < ٢س - ٣ < ١/٢

∴ ٥/٢ < ٢س < ٧/٢ ∴ ٥/٤ < س < ٧/٤

، ∵ |٢س - ٣| = ٠ عندما س = ٣/٢

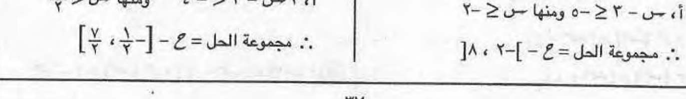
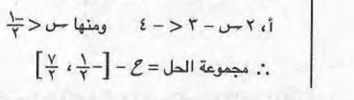
∴ مجموعة الحل =]٥/٤ ، ٧/٤[- {٣/٢}

(٩) |٢س - ٣| > ٤

∴ ٢س - ٣ > ٤ ومنها س > ٧/٢

أ، ٢س - ٣ < -٤ ومنها س < -١/٢

∴ مجموعة الحل = ح - [-١/٢ ، ٧/٢]

(١٠) ∵ √((س - ١)^٢) ≥ ٤ ∴ |س - ١| ≥ ٤

∴ س - ١ ≥ ٤ ومنها س ≥ ٥

أ، س - ١ ≤ -٤ ومنها س ≤ -٣

∴ مجموعة الحل = ح -]-٣ ، ٥[

(١١) ∵ √((٢س - ٣)^٢) ≤ ٩

∴ |٢س - ٣| ≤ ٩

∴ -٩ ≤ ٢س - ٣ ≤ ٩

∴ -٦ ≤ ٢س ≤ ١٢

∴ -٣ ≤ س ≤ ٦

∴ مجموعة الحل = [-٣ ، ٦]

(١٢) ٢|س - ٢| < ٦ ∴ |س - ٢| < ٣

∴ -٣ < س - ٢ < ٣

∴ -١ < س < ٥

∴ مجموعة الحل =]-١ ، ٥[

(١٣) |س + ٢| + |٢ + س| + |س + ٢| ≥ ٦

∴ ٣|س + ٢| ≥ ٦

∴ |س + ٢| ≥ ٢

∴ س + ٢ ≥ ٢ ومنها س ≥ ٠

أ، س + ٢ ≤ -٢ ومنها س ≤ -٤

∴ مجموعة الحل = ح -]-٤ ، ٠[

١٠

(١)]-٤ ، ٠[(٢) ح -]-١ ، ٥[

(٣)]-٥ ، -١[

١١

تم الحل بيانيًا وعليك التحقق جبريًا بنفسك

(١) د(س) = |س - ١| ، ر(س) = ٢

من الرسم : مجموعة الحل =]-١ ، ٣[

(٢) د(س) = ٢|س - ٥/٢| ، ر(س) = ٢

من الرسم : مجموعة الحل = ح -]٣/٢ ، ٧/٢[

(٣) ∵ √(٤س^٢ - ١٢س + ٩) = √((٢س - ٣)^٢)

= |٢س - ٣|

∴ د(س) = |٢س - ٣| = ٢|س - ٣/٢|

، ر(س) = ٥

من الرسم : مجموعة الحل = ح - [-١ ، ٤]

④ د (س) = |س + ٣| ، ر (س) = − س

من الرسم : مجموعة الحل =] −∞ ، − ٣/٢ [

⑤ د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = −١/٢ س + ٦

من الرسم : مجموعة الحل =]−٦ ، ٦[

⑥ ∵ |س − ٣| < ٥ − |س − ٤|

∴ د (س) = |س − ٣|

، ر (س) = ٥ − |س − ٤|

من الرسم : مجموعة الحل = ح − [١ ، ٦]

١٢

① ∵ − ٤ ≤ س ≤ ٤ ∴ |س| ≤ ٤

② ∵ ٠ < س < ٦ بإضافة (−٣) إلى أطراف المتباينة.

∴ −٣ < س − ٣ < ٣ ∴ |س − ٣| < ٣

③ ∵ س ≤ −٢ أ، س ≥ ٢ ∴ |س| ≥ ٢

④ ∵ س ∈ ح − [−٢ ، ٦]

∴ س > ٦ ، س < −٢

وبإضافة (−٢) إلى أطراف المتباينة

∴ س − ٢ > ٤ ، س − ٢ < −٤

∴ |س − ٢| > ٤

١٣

① نفرض أن درجة الطالب = س درجة

∴ ٦٠ < س < ١٠٠

وبإضافة (−٨٠) إلى أطراف المتباينة

∴ −٢٠ < س − ٨٠ < ٢٠

∴ |س − ٨٠| < ٢٠

② نفرض أن درجة الحرارة = س درجة

∴ ٣٥ < س < ٤٢

وبإضافة (−٣٨,٥) إلى أطراف المتباينة

∴ −٣,٥ < س − ٣٨,٥ < ٣,٥

∴ |س − ٣٨,٥| < ٣,٥

③ نفرض أن العمق الذي تعيش فيه الطحالب الخضراء = س مترًا

∴ ٠ ≤ س ≤ ٣٠

وبإضافة (−١٥) إلى أطراف المتباينة

∴ −١٥ ≤ س − ١٥ ≤ ١٥

∴ |س − ١٥| ≤ ١٥

تمارين متنوعة

١٤

① بوضع |س| − ١ = ٠ ∴ |س| = ١

∴ س = ±١

∴ المجال = ح − {١ ، −١}

② بوضع |س| + ١ = ٠ ∴ |س| = −١ (تعارض)

∴ المجال = ح

③ بوضع |س − ٢| − ٥ = ٠

∴ |س − ٢| = ٥

∴ س − ٢ = ٥ ومنها س = ٧

أ، س − ٢ = −٥ ومنها س = −٣

∴ المجال = ح − {٧ ، −٣}

④ بوضع ٥ − |س| ≥ ٠ ∴ |س| ≤ ٥

∴ −٥ ≤ س ≤ ٥ ∴ المجال = [−٥ ، ٥]

⑤ بوضع |س| − ٥ ≥ ٠ ∴ |س| ≥ ٥

∴ س ≥ ٥ أ، س ≤ −٥

∴ المجال = ح −]−٥ ، ٥[

⑥ بوضع ٥ − |س| > ٠ ∴ |س| < ٥

∴ −٥ < س < ٥ ∴ المجال =]−٥ ، ٥[

١٥

① د (−س) = −س |−س| = −س |س|

= − د (س) ∴ الدالة فردية.

② د (−س) = (−س)^{٢} |−س| − ١

= س^{٢} |س| − ١ = د (س) ∴ الدالة زوجية.

③ د (−س) = (|١ − س| + |١ + س|) / (|١ − س| − |١ + س|) = − د (س)

∴ الدالة فردية.

④ د (−س) = ((−س)^{٢} جتا (−٢س)) / (٥ + |−٢س|)

= (س^{٢} جتا ٢س) / (٥ + |٢س|) = د (س)

∴ الدالة زوجية.

⑤ د (−س)

= ٢ |−س| طا (−س) + ٢ (−س) | طا (−س) |

= ٢ |س| (− طاس) − ٢س | − طاس |

= −٢ |س| طاس − ٢س | طاس |

= − د (س) ∴ الدالة فردية.

⑥ د (−س) = √(|−س| + (−س)) = √(|س| − س)

≠ د (س) ≠ − د (س)

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

١٦

① د (س) = |س + ٣| + ٢ ، ر (س) = ٤

∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المثلث أ ب ح = ١/٢ × ٤ × ٢

= ٤ وحدة مربعة.

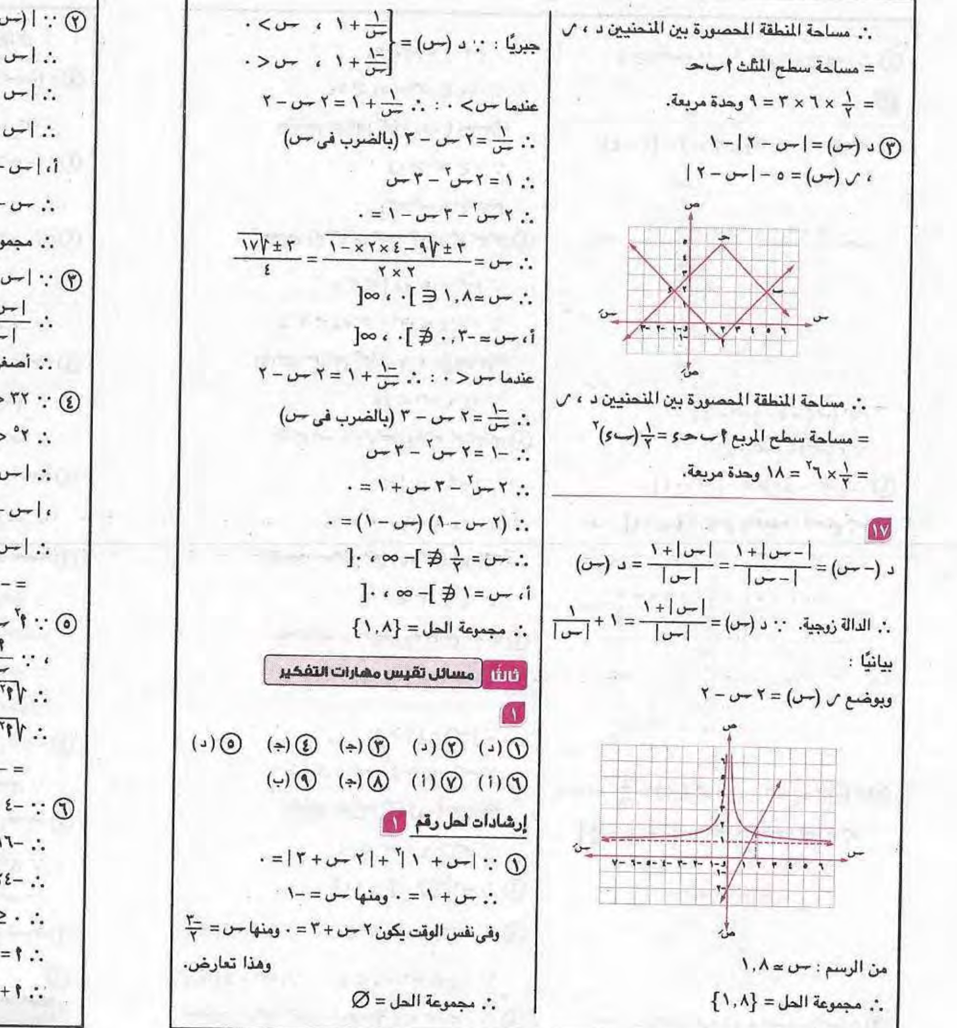
② د (س) = − |س − ٢| + ٣ ، ر (س) = صفر

∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المثلث أ ب حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٩ وحدة مربعة.

③ د (س) = |س − ٢| − ١ ، ر (س) = ٥ − |س − ٢|



∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المربع أ ب حـ ء = $\frac{١}{٢}$(ب ء)^{٢}

= $\frac{١}{٢}$ × ٦^{٢} = ١٨ وحدة مربعة.

17

د (−س) = $\frac{|-س| + ١}{|-س|}$ = $\frac{|س| + ١}{|س|}$ = د (س)

∴ الدالة زوجية. ∵ د (س) = $\frac{|س| + ١}{|س|}$ = ١ + $\frac{١}{|س|}$

بيانيًا :

وبوضع ر (س) = ٢ س − ٢

من الرسم : س ≃ ١,٨

∴ مجموعة الحل = {١,٨}

جبريًا : ∵ د (س) = $\begin{cases} \frac{١}{س} + ١ & ، س > ٠ \\ \frac{-١}{س} + ١ & ، س < ٠ \end{cases}$

عندما س > ٠ : ∴ $\frac{١}{س}$ + ١ = ٢ س − ٢

∴ $\frac{١}{س}$ = ٢ س − ٣ (بالضرب فى س)

∴ ١ = ٢ س^{٢} − ٣ س

∴ ٢ س^{٢} − ٣ س − ١ = ٠

∴ س = $\frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ × ٢ × -١}}{٢ × ٢}$ = $\frac{٣ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$

∴ س ≃ ١,٨ ∈]٠ ، ∞[

أ، س ≃ −٠,٣ ∉]٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ $\frac{-١}{س}$ + ١ = ٢ س − ٢

∴ $\frac{-١}{س}$ = ٢ س − ٣ (بالضرب فى س)

∴ −١ = ٢ س^{٢} − ٣ س

∴ ٢ س^{٢} − ٣ س + ١ = ٠

∴ (٢ س − ١) (س − ١) = ٠

∴ س = $\frac{١}{٢}$ ∉]−∞ ، ٠[

أ، س = ١ ∉]−∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {١,٨}

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1

① (د) ② (د) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (د)

⑥ (أ) ⑦ (أ) ⑧ (جـ) ⑨ (ب)

إرشادات لحل رقم 1

① ∵ |س + ١|^{٢} + |٢ س + ٣| = ٠

∴ س + ١ = ٠ ومنها س = −١

وفى نفس الوقت يكون ٢ س + ٣ = ٠ ومنها س = $\frac{-٣}{٢}$

وهذا تعارض.

∴ مجموعة الحل = ∅

② ∵ |(س − ١) (س − ٣)| = |س − ٣|

∴ |س − ٣| |س − ١| − |س − ٣| = ٠

∴ |س − ٣| (|س − ١| − ١) = ٠

∴ |س − ٣| = ٠ ومنها س = ٣

أ، |س − ١| = ١

∴ س − ١ = ± ١ ومنها س = ٠ ، أ، ٢

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٢ ، ٣}

③ ∵ |س| + |ص| ≥ |س + ص|

∴ $\frac{|س| + |ص|}{|س + ص|}$ ≥ ١

∴ أصغر قيمة للمقدار $\frac{|س| + |ص|}{|س + ص|}$ هى ١

④ ∵ ٣٢ < ٦١ < ٦٤

∴ ٢^{٥} < ٢^{س} < ٢^{٦} ∴ ٥ < س < ٦

∴ |س − ٦| = −س + ٦

، |س − ٥| = س − ٥

∴ |س − ٦| + |س − ٥|

= −س + ٦ + س − ٥ = ١

⑤ ∵ أ^{٢} ب > ٠ ∴ ب موجبة.

، ∵ $\frac{أ}{ب}$ < ٠ ∴ أ سالبة.

∴ $\sqrt{أ^{٢}}$ = |أ| = −أ ، $\sqrt{ب^{٢}}$ = |ب| = ب

∴ $\sqrt{أ^{٢}}$ + $\sqrt{ب^{٢}}$ − (ب − أ)

= −أ + ب − ب + أ = صفر

⑥ ∵ −٤ ≤ س ≤ ٦

∴ −١٦ ≤ ٤ س ≤ ٢٤

∴ −٢٤ ≤ ٤ س − ٨ ≤ ١٦

∴ ٠ ≤ |٤ س − ٨| ≤ ٢٤

∴ أ = صفر ، ب = ٢٤

∴ أ + ب = ٢٤

⑦ ∵ س^{٢} − ٣ |س| − ١٠ = ٠

∴ |س|^{٢} − ٣ |س| − ١٠ = ٠

∴ (|س| − ٥) (|س| + ٢) = ٠

∴ |س| = ٥ ومنها س = ± ٥

أ، |س| = −٢ (مرفوض)

∴ جذرا المعادلة هما ± ٥

∴ حاصل ضرب جذرى المعادلة يساوى −٢٥

⑧ ∵ ٣ < |س| < ٨ ∴ ٣ < س < ٨

∴ س = ٤ ، أ، ٥ ، أ، ٦ ، أ، ٧

أ، −٨ < س < −٣

∴ س = −٤ ، أ، −٥ ، أ، −٦ ، أ، −٧

∴ عدد قيم س الصحيحة هو ٨

⑨ ∵ (ر ∘ د) (س) = ٣

∴ ر (د (س)) = ٣

∴ ||٢ س − ٥| + ١| = ٣

∴ |٢ س − ٥| + ١ = ± ٣

∴ |٢ س − ٥| = ± ٣ − ١

∴ |٢ س − ٥| = −٤ (مرفوض)

أ، |٢ س − ٥| = ٢ ∴ ٢ س − ٥ = ± ٢

∴ ٢ س = ٥ ± ٢

∴ ٢ س = ٧ ومنها س = $\frac{٧}{٢}$

أ، ٢ س = ٣ ومنها س = $\frac{٣}{٢}$

∴ مجموعة الحل = {$\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$}

2

① (س + ١) (|س| − ١) + $\frac{١}{٢}$ = صفر

عندما س ≥ ٠ :

∴ (س + ١) (س − ١) + $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ س^{٢} − ١ + $\frac{١}{٢}$ = ٠ ∴ س^{٢} − $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∈]٠ ، ∞[



أ، س = $-\frac{١}{\sqrt{٢}} \notin]٠ ، \infty[$

، عندما س < ٠ :

∴ (س + ١)(−س − ١) + $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ −(س + ١)^{٢} + $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ (س + ١)^{٢} = $\frac{١}{٢}$ ∴ س + ١ = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ س = $(-١ + \frac{١}{\sqrt{٢}}) \in]-\infty ، ٠[$

∴ س = $(-١ - \frac{١}{\sqrt{٢}}) \in]-\infty ، ٠[$

∴ مجموعة الحل

= $\{\frac{١}{\sqrt{٢}} ، -١ - \frac{١}{\sqrt{٢}} ، -١ + \frac{١}{\sqrt{٢}}\}$

(٢) ∵ ||٢س + ٣| − ٨| = ٥

∴ |٢س + ٣| − ٨ = ± ٥

∴ |٢س + ٣| = ٨ ± ٥

∴ |٢س + ٣| = ١٣ أ، |٢س + ٣| = ٣

∴ ٢س + ٣ = ± ١٣	٢س + ٣ = ± ٣
∴ ٢س = −٣ ± ١٣	∴ ٢س = −٣ ± ٣
∴ س = −٨ ، ٥	∴ س = صفر أ، −٣

∴ مجموعة الحل = {−٨ ، ٥ ، صفر ، −٣}

(٣) |س|^{٢} − ٣|س| + ٢ = ٠

∴ (|س| − ٢)(|س| − ١) = ٠

∴ |س| = ٢ ومنها س = ± ٢

أ، |س| = ١ ومنها س = ± ١

∴ مجموعة الحل = {٢ ، −٢ ، ١ ، −١}

(٤) $\sqrt{(س - \frac{١}{س})^{٢} + ٤}$ = ٢

∴ $\sqrt{س^{٢} - ٢ + \frac{١}{س^{٢}} + ٤}$ = ٢

∴ $\sqrt{س^{٢} + ٢ + \frac{١}{س^{٢}}}$ = ٢

∴ $\sqrt{(س + \frac{١}{س})^{٢}}$ = ٢   ∴ |س + $\frac{١}{س}$| = ٢

∴ س + $\frac{١}{س}$ = ± ٢   ∴ س + $\frac{١}{س}$ = ٢

ومنها س^{٢} − ٢س + ١ = ٠ :

∴ (س − ١)^{٢} = ٠   ∴ س = ١

أ، س + $\frac{١}{س}$ = −٢

ومنها س^{٢} + ٢س + ١ = ٠

∴ (س + ١)^{٢} = ٠   ∴ س = −١

∴ مجموعة الحل = {١ ، −١}

(٥) ∵ |س^{٢} − ٣| + $\frac{٢}{|س^{٢} - ٣|}$ = ٣

∴ |س^{٢} − ٣|^{٢} − ٣|س^{٢} − ٣| + ٢ = ٠ :

∴ (|س^{٢} − ٣| − ١)(|س^{٢} − ٣| − ٢) = ٠

∴ |س^{٢} − ٣| − ١ = ٠ أ، |س^{٢} − ٣| − ٢ = ٠

∴ |س^{٢} − ٣| = ١	∴ |س^{٢} − ٣| = ٢
∴ س^{٢} − ٣ = ± ١	∴ س^{٢} − ٣ = ± ٢
∴ س^{٢} = ٣ ± ١	∴ س^{٢} = ٣ ± ٢
∴ س^{٢} = ٤	∴ س^{٢} = ٥
ومنها س = ± ٢	ومنها س = ± $\sqrt{٥}$
أ، س^{٢} = ٢	أ، س^{٢} = ١
ومنها س = ± $\sqrt{٢}$	ومنها س = ± ١

∴ مجموعة الحل = {± ٢ ، ± $\sqrt{٢}$ ، ± $\sqrt{٥}$ ، ± ١}

(٦) |س − ٤| + |س − ٢| = ١٠

(٤)   (٢)

س − ٤	٤ − س	٤ − س
س − ٢	س − ٢	٢ − س
٢س − ٦	٢	٦ − ٢س

∴ عندما س > ٤   ∴ ٢س − ٦ = ١٠

∴ س = ٨ (يحقق)

، عندما س < ٢   ∴ ٦ − ٢س = ١٠

∴ س = −٢ (يحقق)

عندما ٢ < س < ٤   ∴ ٢ = ١٠ تعارض

∴ مجموعة الحل = {٨ ، −٢}

(٧) ∵ (|٢س − ٣| − ٥)(|٢س − ٣| + ٥) > ١١

∴ |٢س − ٣|^{٢} − ٢٥ > ١١

∴ |٢س − ٣|^{٢} > ٣٦

∴ |٢س − ٣| > ٦

∴ ٢س − ٣ > ٦ ومنها س > $\frac{٩}{٢}$

أ، ٢س − ٣ < −٦ ومنها س < $\frac{-٣}{٢}$

∴ مجموعة الحل = ح − [$\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٢}$]

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الأولى

١

(١) ع(١٠) = ٨ × ١٠ = ٨٠ سم/ث

(٢) ع(١٥٠) = ٨٠ سم/ث

(٣) ع(٢١٠) = −٤ × ٢١٠ + ٨٨٠ = ٤٠ سم/ث

٢

ح(ل) = ٤ ل

(١) ح(٣) = ٤ × ٣ = ١٢ وحدة طول.

(٢) ح($\frac{١٥}{٤}$) = ٤ × $\frac{١٥}{٤}$ = ١٥ وحدة طول.

٣

م(نق) = π نق^{٢}

(١) م($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٤}$ π وحدة مربعة.

(٢) م(٥) = ٢٥ π وحدة مربعة.

٤

(١) د(س) = ٠,٣ س + ٨ × ٧

(٢) نعم دالة أحادية لأنه بفرض أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د(أ) = ٠,٣ أ + ٨ × ٧

، د(ب) = ٠,٣ ب + ٨ × ٧

وبفرض أن د(أ) = د(ب)

∴ ٠,٣ أ + ٨ × ٧ = ٠,٣ ب + ٨ × ٧

∴ ٠,٣ أ = ٠,٣ ب   ∴ أ = ب

٥

د(س) = ٥٠ س

٦

* ∵ ف = ع × ن

، ∵ ن = ٣ دقائق ، ع = ٣٠ مترًا/دقيقة

∴ ف = ٣ × ٣٠ = ٩٠   ∴ ع = $\frac{٩٠}{ن}$

∴ ع ∝ $\frac{١}{ن}$

∴ ع تتغير عكسيًا بتغير الزمن.

* ع = $\frac{٩٠}{ن}$ * عندما ع = ٤٥ مترًا/دقيقة.

∴ ٤٥ = $\frac{٩٠}{ن}$ ∴ ن = $\frac{٩٠}{٤٥}$ = ٢ دقيقة.

٧

① ∵ النقطة (٠ ، ٣) تنتمى لمنحنى الدالة

∴ (٠ ، ٣) تحقق معادلة الدالة.

د (س) = أ (س − ٢)^{٢} + ٤

∴ ٣ = أ (٠ − ٢)^{٢} + ٤

∴ ٣ = ٤ أ + ٤

∴ ٤ أ = −١

∴ أ = −$\frac{١}{٤}$

② ∵ نقطة رأس المنحنى هى : (٢ ، ٤)

∴ أقصى ارتفاع للبوابة = ٤ أمتار.

③ عرض البوابة = ٢ + ٢ = ٤ أمتار.

٨

①

من الرسم :

ل = ٤ وحدة طول.

، ع = ٤ وحدة طول.

∴ المساحة المطلوبة

= $\frac{٢}{٣}$ ل ع = $\frac{٢}{٣}$ × ٤ × ٤ = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

②

المساحة المطلوبة

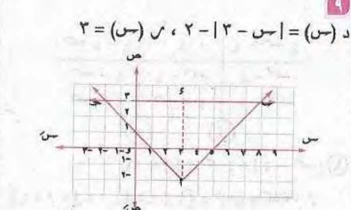
= $\frac{٣٢}{٣}$ − ($\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٢)

= $\frac{٣٢}{٣}$ − ٤

= $\frac{٢٠}{٣}$ وحدة مربعة.

٩

د (س) = |س − ٣| − ٢ ، ر (س) = ٣



∵ طول الوحدة = ٨ أمتار.

، ∵ ب حـ = ١٠ وحدات.

∴ طول القاعدة = ١٠ × ٨ = ٨٠ متر.

، ∵ أ ء = ٥ وحدات.

∴ الارتفاع = ٥ × ٨ = ٤٠ متر.

∴ مساحة الأرض = مساحة △ أ ب حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٨٠ × ٤٠ = ١٦٠٠ متر مربع.

١٠

يتقاطع الطريقان عندما د (س) = ر (س)

∴ |س − ٥| = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

عندما س ≥ ٥ : س − ٥ = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

∴ ١$\frac{٢}{٣}$ س = ١٠ ∴ س = ٦ ∈ [٥ ، ∞[

، عندما س < ٥ : ∴ −س + ٥ = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

∴ $\frac{١}{٣}$ س = ٠ ∴ س = ٠ ∈]−∞ ، ٥[

، ∵ د (٦) = |٦ − ٥| = ١

∴ أ (٦ ، ١) نقطة تقاطع المنحنيين.

، د (٠) = |٠ − ٥| = ٥

∴ ب (٠ ، ٥) نقطة تقاطع المنحنيين.

∴ أ ب = $\sqrt{(٦ - ٠)^{٢} + (١ - ٥)^{٢}}$ = ٢ $\sqrt{١٣}$

، ∵ وحدة الأطوال تمثل ٥ كيلو مترات

∴ أ ب = ٥ × ٢ $\sqrt{١٣}$ = ١٠ $\sqrt{١٣}$ ≃ ٣٦ كم

١١

بفرض أن طول المتقدم لشغل الوظيفة = س سم

∴ ١٧٨ ≤ س ≤ ١٩٢ وبإضافة (− ١٨٥)

إلى أطراف المتباينة.

∴ −٧ ≤ س − ١٨٥ ≤ ٧

∴ |س − ١٨٥| ≤ ٧

١٢

① بعد ثانيتين : ف = ٨ |٥ − ٢| = ٢٤ سم.

[فى اتجاه الحركة من أ إلى ب]

، بعد ٨ ثوان : ف = ٨ |٥ − ٨| = ٢٤ سم.

[فى اتجاه الحركة من ب إلى حـ]

② ∵ ٨ |٥ − ن| = ١٦ ∴ |ن − ٥| = ٢

∴ ن − ٥ = −٢ ومنها ن = ٣

[فى اتجاه الحركة من أ إلى ب]

أ، ن − ٥ = ٢ ومنها ن = ٧

[فى اتجاه الحركة من ب إلى حـ]

③ ∵ ٨ |ن − ٥| < ٨ ∴ |ن − ٥| < ١

∴ −١ < ن − ٥ < ١ ∴ ٤ < ن < ٦

∴ ن ∈]٤ ، ٦[

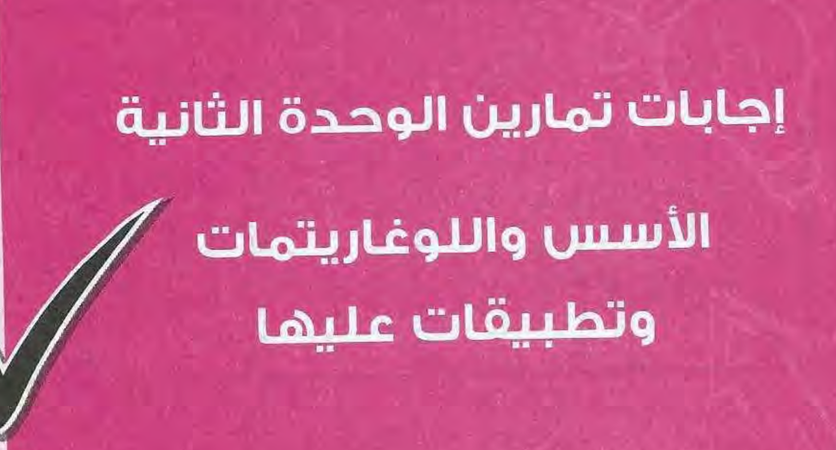
١٣

∵ ب = (٨ ، ٤)

، ∵ د (٨) = $\frac{٤}{٣}$ |٨ − ٥| = ٤

∴ ب تقع على منحنى الدالة د

∴ الكرة السوداء سوف تسقط فى الجيب ب



إجابات تمارين الوحدة الثانية

الأسس واللوغاريتمات
وتطبيقات عليها

إجابات الوحدة الثانية

إجابات تمارين 7

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (د)	③ (ب)	④ (جـ)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (ب)	⑧ (جـ)
⑨ (ب)	⑩ (أ)	⑪ (جـ)	⑫ (د)
⑬ (ب)	⑭ (د)	⑮ (جـ)	⑯ (جـ)
⑰ (جـ)	⑱ (ب)	⑲ (ب)	⑳ (ب)
(٢١) (د)	(٢٢) (جـ)	(٢٣) (أ)	(٢٤) (أ)
(٢٥) (جـ)	(٢٦) (أ)	(٢٧) (ب)	(٢٨) (جـ)
(٢٩) (أ)	(٣٠) (د)	(٣١) (ب)	(٣٢) (أ)
(٣٣) (ب)	(٣٤) (ب)	(٣٥) (ب)	(٣٦) (د)
(٣٧) (جـ)	(٣٨) (د)	(٣٩) (أ)	(٤٠) (أ)
(٤١) (أ)	(٤٢) (د)	(٤٣) (جـ)	(٤٤) (د)
(٤٥) (أ)	(٤٦) (جـ)		

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① $\frac{(27)^{-3} \times (12)^{2}}{16 \times (81)^{-2}} = \frac{(3^3)^{-3} \times (3)^{2} \times (2^2)^{2}}{2^4 \times (3^4)^{-2}}$

$= \frac{3^{-9} \times 3^{2} \times 2^{4}}{2^{4} \times 3^{-8}} = 3^{-9+2+8} = 3$

② $\frac{9^{4\text{ن}+1} \times 4^{2-2\text{ن}}}{3^{9\text{ن}+1} \times 48^{1-\text{ن}}}$

$= \frac{(3^2)^{4\text{ن}+1} \times (2^2)^{2-2\text{ن}}}{3^{9\text{ن}+1} \times 3^{1-\text{ن}} \times (2^4)^{1-\text{ن}}}$

$= \frac{3^{8\text{ن}+2} \times 2^{4-4\text{ن}}}{3^{9\text{ن}+1} \times 3^{1-\text{ن}} \times 2^{4-4\text{ن}}}$

$= 3^{8\text{ن}+2-9\text{ن}-1-1+\text{ن}} \times 2^{4-4\text{ن}-4+4\text{ن}}$

$= 3^{0} \times 2^{0} = 1 \times 1 = 1$

③ $\frac{125 \times (15)^{\text{ن}-3} \times (25)^{\text{م}+\text{ن}}}{(75)^{\text{ن}} \times (5)^{\text{ن}+2\text{م}}}$

$= \frac{5^3 \times 5^{\text{ن}-3} \times 3^{\text{ن}-3} \times (5^2)^{\text{م}+\text{ن}}}{3^{\text{ن}} \times (5^2)^{\text{ن}} \times 5^{\text{ن}+2\text{م}}}$

$= \frac{5^3 \times 5^{\text{ن}-3} \times 3^{\text{ن}-3} \times 5^{2\text{م}+2\text{ن}}}{3^{\text{ن}} \times 5^{2\text{ن}} \times 5^{\text{ن}+2\text{م}}}$

$= 5^{3+\text{ن}-3+2\text{م}+2\text{ن}-2\text{ن}-\text{ن}-2\text{م}} \times 3^{\text{ن}-3-\text{ن}}$

$= 5^{0} \times 3^{-3} = \frac{1}{27}$

④ $(18)^{\frac{1}{2}} \times (12)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{(24)^{\frac{1}{2}}}$

$= 2^{\frac{1}{2}} \times (3^2)^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} \times (2^2)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{(2^3)^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}}$

$= 2^{\frac{1}{2}} \times 3 \times 3^{\frac{3}{2}} \times 2^{3} \times 2^{-\frac{3}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{1}{2}+3-\frac{3}{2}} \times 3^{1+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}$

$= 2^2 \times 3^2 = 36$

٢

① الطرف الأيمن

$= \frac{(3^2)^{\text{ص}-\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{\text{ص}(\text{ص}+3)}{\text{ص}}}}{(3^4)^{\text{ص}-1} \times 3^{5-\text{ص}} \times 7^{5-\text{ص}} \times (7^2)^{\text{ص}-1}}$

$= \frac{3^{2\text{ص}-1} \times 7^{\text{ص}+3}}{3^{4\text{ص}-4} \times 3^{5-\text{ص}} \times 7^{5-\text{ص}} \times 7^{2\text{ص}-2}}$

$= 3^{2\text{ص}-1-4\text{ص}+4-5+\text{ص}}$

$\times\, 7^{\text{ص}+3-5+\text{ص}-2\text{ص}+2}$

$= 3^{-2} \times 7^{\text{صفر}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

② الطرف الأيمن $= \frac{(7^2)^{3\text{س}-\frac{1}{2}} \times (2^2)^{3\text{س}+1}}{(2^2)^{3\text{س}} \times (7^2)^{3\text{س}} \times 2^2}$

$= \frac{7^{6\text{س}-1} \times 2^{6\text{س}+2}}{2^{6\text{س}} \times 7^{6\text{س}} \times 2^2}$

$= 2^{6\text{س}+2-6\text{س}-2}$

$\times\, 7^{6\text{س}-1-6\text{س}}$

$= 2^{\text{صفر}} \times 7^{-1} = \frac{1}{7}$

③ الطرف الأيمن

$= \frac{5^3 \times (2^2)^{\frac{3}{8}} \times 2^{-\frac{1}{4}} \times 5^{-\frac{1}{4}}}{(2^2)^{\frac{5}{8}} \times 2^{-\frac{3}{4}} \times 3^{-\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{3}{4}}}$

$= \frac{5^3 \times 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{-\frac{1}{4}} \times 5^{-\frac{1}{4}}}{2^{\frac{5}{4}} \times 2^{-\frac{3}{4}} \times 3^{-\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{3}{4}}}$

$= 5^{3-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}$

$= 5^2 \times 2^{0} \times 3^{0} = 25 \times 1 \times 1 = 25$

④ الطرف الأيمن

$= \frac{3 \times 2^{\text{س}+2} + 2^{\text{س}+2}}{2^{\text{س}+3} - 2 \times 3 \times 2^{\text{س}}}$

$= \frac{2^{\text{س}+2}(3+1)}{2^{\text{س}+1}(2^2-3)} = \frac{2^{\text{س}+2} \times 2^2}{2^{\text{س}+1} \times 1} = 2^3 = 8$

٣

① $\because \text{س}^{\frac{7}{2}} = 2^7 \quad \therefore \text{س} = (2^7)^{\frac{2}{7}} = 4$

$\therefore$ م.ح $= \{4\}$

② $\because \text{س}^{-\frac{5}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} \quad \therefore \text{س} = (2^{\frac{5}{2}})^{-\frac{2}{5}}$

$\therefore \text{س} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad \therefore$ م.ح $= \{\frac{1}{2}\}$

③ $(\text{س} - 1)^{\frac{5}{3}} = 2^5$

$\therefore \text{س} - 1 = (2^5)^{\frac{3}{5}} = 2^3 = 8$

$\therefore \text{س} = 9 \quad \therefore$ م.ح $= \{9\}$

④ $2\text{س} + 3 = \pm(3^4)^{\frac{3}{4}} \quad \therefore 2\text{س} + 3 = \pm 27$

$\therefore 2\text{س} = 24$ أ، $2\text{س} = -30$

$\therefore \text{س} = 12$ أ، $\text{س} = -15$

$\therefore$ م.ح $= \{12 ، -15\}$

⑤ $\text{س} + 1 = (32^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{5}} = 32^{\frac{1}{5}} = (2^5)^{\frac{1}{5}}$

$\therefore \text{س} + 1 = 2 \quad \therefore \text{س} = 1$

$\therefore$ م.ح $= \{1\}$

⑥ $\text{س}^2 - 5\text{س} + 9 = (3^5)^{\frac{2}{5}}$

$\therefore \text{س}^2 - 5\text{س} + 9 = 9$

$\therefore \text{س}^2 - 5\text{س} = 0 \quad \therefore \text{س}(\text{س} - 5) = 0$

$\therefore \text{س} = 0$ أ، $\text{س} = 5 \quad \therefore$ م.ح $= \{0 ، 5\}$

⑦ $\because \sqrt{\text{س}} + 2 = 9 \quad \therefore \sqrt{\text{س}} = 7$

$\therefore \text{س} = 49 \quad \therefore$ م.ح $= \{49\}$

⑧ $(\text{س}^{\frac{2}{5}} - 1)(\text{س}^{\frac{2}{5}} - 4) = 0$

$\therefore \text{س}^{\frac{2}{5}} = 1$ ومنها $\text{س} = \pm 1$

أ، $\text{س}^{\frac{2}{5}} = 4$ ومنها $\text{س} = \pm(2^2)^{\frac{5}{2}} = \pm 32$

$\therefore$ م.ح $= \{1 ، -1 ، 32 ، -32\}$

⑨ $(\text{س}^{\frac{2}{3}} - 1)(\text{س}^{\frac{2}{3}} - 9) = 0$

$\therefore \text{س}^{\frac{2}{3}} = 1 \quad \therefore \text{س} = \pm 1$

أ، $\text{س}^{\frac{2}{3}} = 9 \quad \therefore \text{س} = \pm(3^2)^{\frac{3}{2}} = \pm 27$

$\therefore$ م.ح $= \{1 ، -1 ، 27 ، -27\}$

⑩ $(\text{س}^{\frac{1}{2}} - 1)(\text{س}^{\frac{1}{2}} - 2) = 0$

$\therefore \text{س}^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \therefore \text{س} = 1$

أ، $\text{س}^{\frac{1}{2}} = 2 \quad \therefore \text{س} = (2)^2 = 4$

$\therefore$ م.ح $= \{1 ، 4\}$

⑪ $\text{س} - 8\sqrt{\text{س}} + 15 = 0$

$\therefore (\sqrt{\text{س}} - 3)(\sqrt{\text{س}} - 5) = 0$

$\therefore \sqrt{\text{س}} = 3$ ومنها $\text{س} = 9$

أ، $\sqrt{\text{س}} = 5$ ومنها $\text{س} = 25$

$\therefore$ م.ح $= \{9 ، 25\}$

⑫ $\text{س}^{\frac{5}{3}} - \text{س}^{\frac{5}{6}} - 6 = 0$

$\therefore (\text{س}^{\frac{5}{6}} - 3)(\text{س}^{\frac{5}{6}} + 2) = 0$

∴ $\text{س}^{\frac{٥}{٦}} = ٣$ ∴ $\text{س} = ٣^{\frac{٦}{٥}} = ٣,٧$

أ، $\text{س}^{\frac{٥}{٦}} = -٢$ (مرفوض)

∴ م.ح = $\{٣,٧\}$

(١٣) $\text{س}^{\frac{٤}{٥}} - ٣\text{س}^{\frac{٢}{٥}} - ٤ = ٠$

∴ $(\text{س}^{\frac{٢}{٥}} + ١)(\text{س}^{\frac{٢}{٥}} - ٤) = ٠$

∴ $\text{س}^{\frac{٢}{٥}} = -١$ (مرفوض)

أ، $\text{س}^{\frac{٢}{٥}} = ٤$

∴ $\text{س} = \pm(٢^{٢})^{\frac{٥}{٢}} = \pm ٢^{٥} = \pm ٣٢$

∴ م.ح = $\{-٣٢ ، ٣٢\}$

(١٤) بالضرب × $\sqrt[٥]{\text{س}}$

∴ $(\sqrt[٥]{\text{س}})^{٢} - ٣\sqrt[٥]{\text{س}} + ٢ = ٠$

∴ $\text{س}^{\frac{٢}{٥}} - ٣\text{س}^{\frac{١}{٥}} + ٢ = ٠$

∴ $(\text{س}^{\frac{١}{٥}} - ١)(\text{س}^{\frac{١}{٥}} - ٢) = ٠$

∴ $\text{س}^{\frac{١}{٥}} = ١$ ومنها $\text{س} = ١$

أ، $\text{س}^{\frac{١}{٥}} = ٢$ ومنها $\text{س} = ٣٢$

∴ مجموعة الحل = $\{١ ، ٣٢\}$

٤

(١) $٥^{٢\text{س}-١} = \frac{١}{١٢٥}$ ∴ $٥^{٢\text{س}-١} = \frac{١}{٥^{٣}}$

∴ $٥^{٢\text{س}-١} = ٥^{-٣}$ ∴ $٢\text{س} - ١ = -٣$

∴ $٢\text{س} = -٢$ ∴ $\text{س} = -١$

∴ م.ح = $\{-١\}$

(٢) $٥^{\text{س}+٢} = \text{س}^{\text{س}+٢}$ ∴ إما $\text{س} = ٥$

أ، $\text{س} + ٢ = ٠$ ∴ $\text{س} = -٢$

∴ م.ح = $\{-٢ ، ٥\}$

(٣) $٢^{\text{س}^{٢}-٩} = ١$ ∴ $\text{س}^{٢} - ٩ = ٠$

∴ $\text{س}^{٢} = ٩$ ∴ $\text{س} = \pm ٣$

∴ م.ح = $\{٣ ، -٣\}$

(٤) $(٣\sqrt{٣})^{|\text{س}|} = ٢٧$

∴ $(٣\sqrt{٣})^{|\text{س}|} = (٣\sqrt{٣})^{٢}$

∴ $|\text{س}| = ٢$ ∴ $\text{س} = \pm ٢$

∴ م.ح = $\{٢ ، -٢\}$

(٥) ∵ $٣^{|٣\text{س}-٤|} = ٣^{٤\text{س}-٤}$

∴ $|٣\text{س} - ٤| = ٤\text{س} - ٤$

عند $\text{س} \geq \frac{٤}{٣}$

∴ $٣\text{س} - ٤ = ٤\text{س} - ٤$

∴ $\text{س} = ٠$ (لا يحقق) ، عند $\text{س} < \frac{٤}{٣}$

∴ $-٣\text{س} + ٤ = ٤\text{س} - ٤$

∴ $٧\text{س} = ٨$ ∴ $\text{س} = \frac{٨}{٧}$ (يحقق)

∴ م.ح = $\{\frac{٨}{٧}\}$

(٦) $(\frac{٣}{٥})^{٢\text{س}-١} = \frac{٢٧}{١٢٥}$

∴ $(\frac{٣}{٥})^{٢\text{س}-١} = (\frac{٣}{٥})^{٣}$

∴ $٢\text{س} - ١ = ٣$ ∴ $٢\text{س} = ٤$

∴ $\text{س} = ٢$ ∴ م.ح = $\{٢\}$

(٧) $٥^{\text{س}-١} \times ٧^{-(\text{س}-١)} = \frac{٢٥}{٤٩}$

∴ $٥^{\text{س}-١} \times ٧^{-(\text{س}-١)} = (\frac{٥}{٧})^{٢}$

∴ $(\frac{٥}{٧})^{\text{س}-١} = (\frac{٥}{٧})^{٢}$

∴ $\text{س} - ١ = ٢$ ∴ $\text{س} = ٣$

∴ م.ح = $\{٣\}$

(٨) ∵ $\frac{٩^{\text{س}+١} \times ٤^{\text{س}-١}}{٣٦^{\text{س}}} = \frac{٣^{٢\text{س}+٢} \times ٢^{٢\text{س}-٢}}{٣^{٢\text{س}} \times ٢^{٢\text{س}}}$

$= ٣^{٢\text{س}+٢-٢\text{س}} \times ٢^{٢\text{س}-٢-٢\text{س}}$

$= ٣^{٢} \times ٢^{-٢} = (\frac{٣}{٢})^{٢}$

∴ $(\frac{٣}{٢})^{٢} = (\frac{٣}{٢})^{\text{س}}$ ∴ $\text{س} = ٢$

∴ م.ح = $\{٢\}$

(٩) $\frac{١٢^{٣\text{س}-٢} \times ٩^{\text{س}+١}}{١٨^{٢\text{س}} \times ٤^{٢\text{س}-٢}} = ٩$

∴ $\frac{(٣ \times ٢^{٢})^{٣\text{س}-٢} \times (٣^{٢})^{\text{س}+١}}{(٢ \times ٣^{٢})^{٢\text{س}} \times (٢^{٢})^{٢\text{س}-٢}} = ٩$

∴ $\frac{٣^{٣\text{س}-٢} \times ٢^{٦\text{س}-٤} \times ٣^{٢\text{س}+٢}}{٢^{٢\text{س}} \times ٣^{٤\text{س}} \times ٢^{٤\text{س}-٤}} = ٩$

∴ $٣^{٣\text{س}-٢+٢\text{س}+٢-٤\text{س}}$

$\times ٢^{٦\text{س}-٤-٢\text{س}-٤\text{س}+٤} = ٩$

∴ $٣^{\text{س}} \times ٢^{٠} = ٣^{٢}$ ∴ $٣^{\text{س}} = ٣^{٢}$

∴ $\text{س} = ٢$ ∴ م.ح = $\{٢\}$

(١٠) $\frac{١}{٢٧}(\sqrt{٣})^{\text{س}+٢} = ١$

∴ $\frac{١}{(\sqrt{٣})^{٦}} \times (\sqrt{٣})^{\text{س}+٢} = ١$

∴ $(\sqrt{٣})^{\text{س}+٢} = (\sqrt{٣})^{٦}$

∴ $\text{س} + ٢ = ٦$ ∴ $\text{س} = ٤$

∴ م.ح = $\{٤\}$

(١١) $(\sqrt{٣})^{\text{س}^{٢}-٥\text{س}} = ١$ ∴ $\text{س}^{٢} - ٥\text{س} = ٠$

∴ $\text{س}(\text{س} - ٥) = ٠$ ∴ $\text{س} = ٠$ أ، $\text{س} = ٥$

∴ م.ح = $\{٠ ، ٥\}$

(١٢) ∵ $٥^{\text{س}^{٢}-٥\text{س}} = \frac{١٦}{١٠٠٠٠} = \frac{١}{٦٢٥}$

∴ $٥^{\text{س}^{٢}-٥\text{س}} = ٥^{-٤}$ ∴ $\text{س}^{٢} - ٥\text{س} = -٤$

∵ $\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٤ = ٠$

∴ $(\text{س} - ١)(\text{س} - ٤) = ٠$

∴ $\text{س} = ١$ أ، $\text{س} = ٤$ ∴ م.ح = $\{١ ، ٤\}$

(١٣) $٥^{\text{س}^{٢}} = ٢٥^{\text{س}+٤}$ ∴ $٥^{\text{س}^{٢}} = ٥^{٢\text{س}+٨}$

∴ $\text{س}^{٢} = ٢\text{س} + ٨$ ∴ $\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٨ = ٠$

∴ $(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٤) = ٠$

∴ $\text{س} = -٢$ أ، $\text{س} = ٤$

∴ م.ح = $\{-٢ ، ٤\}$

(١٤) $٣^{\text{س}^{٢}-٤٢} = (\frac{١}{٣})^{\text{س}}$ ∴ $٣^{\text{س}^{٢}-٤٢} = ٣^{-\text{س}}$

∴ $\text{س}^{٢} - ٤٢ = -\text{س}$

∴ $\text{س}^{٢} + \text{س} - ٤٢ = ٠$

∴ $(\text{س} - ٦)(\text{س} + ٧) = ٠$

∴ $\text{س} - ٦ = ٠$ ومنها $\text{س} = ٦$

أ، $\text{س} + ٧ = ٠$ ومنها $\text{س} = -٧$

∴ م.ح = $\{٦ ، -٧\}$

(١٥) $(\sqrt{٧})^{|\text{س}+٢|} = ٤٩$

∴ $(\sqrt{٧})^{|\text{س}+٢|} = (\sqrt{٧})^{٤}$

∴ $|\text{س} + ٢| = ٤$ ∴ $\text{س} + ٢ = \pm ٤$

∴ إما $\text{س} + ٢ = ٤$ ومنها $\text{س} = ٢$

أ، $\text{س} + ٢ = -٤$ ومنها $\text{س} = -٦$

∴ م.ح = $\{٢ ، -٦\}$

(١٦) $٣^{٢\text{س}-٣} \times ٧^{٦-٤\text{س}} = ١$

∴ $٣^{٢\text{س}-٣} \times ٧^{-٢(٢\text{س}-٣)} = ١$

∴ $٣^{٢\text{س}-٣} \times \frac{١}{(٧^{٢})^{٢\text{س}-٣}} = ١$

∴ $٣^{٢\text{س}-٣} = (٤٩)^{٢\text{س}-٣}$

∴ $٢\text{س} - ٣ = ٠$ ∴ $\text{س} = \frac{٣}{٢}$

∴ م.ح = $\{\frac{٣}{٢}\}$

(١٧) $\sqrt{٩^{\text{س}} - ٢ \times ٣^{\text{س}+١} + ٩} = ٢٤$

∴ $\sqrt{٣^{٢\text{س}} - ٢ \times ٣ \times ٣^{\text{س}} + ٩} = ٢٤$

∴ $\sqrt{(٣^{\text{س}} - ٣)^{٢}} = ٢٤$ ∴ $|٣^{\text{س}} - ٣| = ٢٤$

∴ $٣^{\text{س}} = ٢٧$ ∴ $٣^{\text{س}} = ٣^{٣}$

∴ $\text{س} = ٣$ أ، $٣^{\text{س}} - ٣ = -٢٤$

∴ $٣^{\text{س}} = -٢١$ (مرفوض)

∴ م.ح = $\{٣\}$

٥

① $5^{س+1} + 5^{س-1} = 26$

∴ $5^{س}(5 + 5^{-1}) = 26$

∴ $5^{س} \times \frac{26}{5} = 26$

∴ $5^{س} = 5$ ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {١}

② $3^{س+3} - 3^{س+2} = 162$

∴ $3^{س}(3^3 - 3^2) = 162$

∴ $3^{س} \times 18 = 162$

∴ $3^{س} = 9$ ∴ $3^{س} = 3^2$

∴ س = ٢ ∴ م.ح = {٢}

③ $7^{2-س} + 7^{-س} = 50$

∴ $7^{-س}(7^2 + 1) = 50$

∴ $7^{-س} \times 50 = 50$ ∴ $7^{-س} = 1$

∴ س = ٠ ∴ م.ح = {٠}

④ $5^{2س} + 25 = 26 \times 5^{س}$

∴ $5^{2س} - 26 \times 5^{س} + 25 = 0$

∴ $(5^{س} - 25)(5^{س} - 1) = 0$

∴ $5^{س} = 25$ ومنها س = ٢

، $5^{س} = 1$ ومنها س = ٠

∴ م.ح = {٢ ، ٠}

⑤ $2^{س} + 2^{5-س} = 12$

∴ $2^{س} + \frac{2^5}{2^{س}} = 12$ بالضرب × $2^{س}$

∴ $2^{2س} + 32 = 12 \times 2^{س}$

∴ $2^{2س} - 12 \times 2^{س} + 32 = 0$

∴ $(2^{س} - 4)(2^{س} - 8) = 0$

∴ $2^{س} = 4$ ومنها س = ٢

أ، $2^{س} = 8$ ومنها س = ٣

∴ م.ح = {٢ ، ٣}

⑥ $(\frac{1}{2})^{س+1} + (\frac{1}{2})^{س+2} + (\frac{1}{2})^{س+5} = 84$

∴ $(\frac{1}{2})^{س}\left((\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^5\right) = 84$

∴ $(\frac{1}{2})^{س} \times \frac{21}{32} = 84$ ∴ $(\frac{1}{2})^{س} = 84 \times \frac{32}{21}$

∴ $(\frac{1}{2})^{س} = 128$ ∴ $(\frac{1}{2})^{س} = (\frac{1}{2})^{-7}$

∴ س = −٧ ∴ م.ح = {−٧}

⑦ $2^{2س+1} - 33(2)^{س} + 16 = 0$

∴ $2(2)^{2س} - 33(2)^{س} + 16 = 0$

∴ $[2(2)^{س} - 1][2^{س} - 16] = 0$

∴ إما $2(2)^{س} = 1$ ∴ $2^{س+1} = 1$

∴ س + ١ = ٠ ∴ س = −١

أ، $2^{س} = 16$ ∴ $2^{س} = 2^4$ ∴ س = ٤

∴ مجموعة الحل = {−١ ، ٤}

⑧ $5^{2س-2} - 6(5)^{س-1} + 5 = 0$

∴ $5^{2(س-1)} - 6(5)^{س-1} + 5 = 0$

∴ $(5^{س-1} - 1)(5^{س-1} - 5) = 0$

∴ إما $5^{س-1} = 1$ ومنها س − ١ = ٠

∴ س = ١ أ، $5^{س-1} = 5$

∴ س − ١ = ١ ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}

⑨ $9^{س^2-1} - 36(3)^{س^2-2} + 3 = 0$

∴ $(3)^{2(س^2-1)} - \frac{36}{9}(3)^{س^2-1} + 3 = 0$

∴ $(3)^{2(س^2-1)} - 4(3)^{س^2-1} + 3 = 0$

∴ $(3^{س^2-1} - 1)(3^{س^2-1} - 3) = 0$

∴ إما $3^{س^2-1} = 1$

∴ $س^2 - 1 = 0$ ∴ $س^2 = 1$

∴ س = ±١ أ، $3^{س^2-1} = 3$

∴ $س^2 - 1 = 1$ ∴ $س^2 = 2$

∴ $س = \pm\sqrt{2}$

∴ مجموعة الحل = {١ ، −١ ، $\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{2}$}

⑩ $10^{س} - 5^{س-1} \times 2^{س-2} = 950$

∴ $10^{س} - \frac{5^{س}}{5} \times \frac{2^{س}}{4} = 950$

∴ $10^{س} - \frac{1}{20}(10)^{س} = 950$

وبالضرب × ٢٠

∴ $20(10)^{س} - (10)^{س} = 20 \times 950$

∴ $19(10)^{س} = 20 \times 950$

∴ $10^{س} = 1000$ ∴ $10^{س} = 10^3$

∴ س = ٣ ∴ مجموعة الحل = {٣}

٦

① $س^{\frac{3}{2}} = 27$ ∴ $س = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

، $3ص^{\frac{2}{3}} = 27$ ∴ $ص^{\frac{2}{3}} = 9$

∴ $ص = \pm(3^2)^{\frac{3}{2}} = \pm 27$

∴ س + ص = ٩ + ٢٧ = ٣٦

أ، س + ص = ٩ − ٢٧ = −١٨

② ∵ $س^{\frac{4}{3}} = 3^4$

∴ $س = \pm(3^4)^{\frac{3}{4}} = \pm 27$

، ∵ $9ص^{\frac{-2}{3}} = 81$ ∴ $ص^{\frac{-2}{3}} = 9 = 3^2$

∴ $ص^{\frac{2}{3}} = 3^{-2}$

∴ $ص = \pm(3^{-2})^{\frac{3}{2}} = \pm(3)^{-3} = \pm\frac{1}{27}$

∴ $|2سص| = |2 \times (\pm 27) \times (\pm\frac{1}{27})| = 2$

٧

① خطأ لأن $(-9)^{\frac{2}{2}} \neq \sqrt{(-9)^2}$ لوجود عامل مشترك بين البسط والمقام للأس.

② خطأ لأن س = ± ٣ لأن الأس زوجى.

٨

① ∵ $2^{2س+2ص} = 2^7$

∴ ٢ س + ٢ ص = ٧ (١)

، ∵ $5^{س-2ص-3} = 1$

∴ س − ٢ ص = ٣ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٣ س = ١٠ ∴ $س = \frac{10}{3}$

، بالتعويض فى (١) : ∴ $ص = \frac{1}{6}$

∴ مجموعة الحل = $\{(\frac{10}{3} ، \frac{1}{6})\}$

② $3^{س} \times 5^{ص} = 75$ (١) ، $3^{ص} \times 5^{س} = 45$ (٢)

وبقسمة (١) على (٢) :

∴ $(\frac{3}{5})^{س} \times (\frac{5}{3})^{ص} = \frac{75}{45}$

∴ $(\frac{5}{3})^{-س} \times (\frac{5}{3})^{ص} = \frac{5}{3}$

∴ $(\frac{5}{3})^{ص-س} = \frac{5}{3}$ ∴ ص − س = ١ (٣)

وبضرب (١) × (٢) :

∴ $(15)^{س} \times (15)^{ص} = 75 \times 45$

∴ $(15)^{س+ص} = 15^3$ ∴ س + ص = ٣ (٤)

بجمع (٣) ، (٤) نجد أن : ٢ ص = ٤

∴ ص = ٢ وبالتعويض فى (٣) : ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٢)}

③ $3^{س} \times 3^{ص} = 3^3$ ∴ $3^{س+ص} = 3^3$

∴ س + ص = ٣ ∴ ص = ٣ − س

، ∵ $3^{س} + 3^{ص} = 12$

∴ $3^{س} + 3^{3-س} = 12$ وبالضرب × $3^{س}$

∴ $3^{2س} + 27 = 12(3)^{س}$

∴ $3^{2س} - 12(3)^{س} + 27 = 0$

∴ $(3^{س} - 3)(3^{س} - 9) = 0$

∴ إما $3^{س} = 3$ ∴ س = ١ ومنها ص = ٢

أ، $3^{س} = 9$ ∴ $3^{س} = 3^2$

∴ س = ٢ ومنها ص = ١

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ١)}

٩

∵ $٩^{س+١} - (٣^{س+٣} + ٣^{س}) + ٣ = ٠$

∴ $٩^{س} \times ٩ - ٣^{س}(٣^{٣} + ١) + ٣ = ٠$

∴ $٩ \times ٣^{٢س} - ٢٨ \times ٣^{س} + ٣ = ٠$

∴ $(٩ \times ٣^{س} - ١)(٣^{س} - ٣) = ٠$

∴ $٩ \times ٣^{س} - ١ = ٠$ ومنها $٣^{س} = \frac{١}{٩}$

∴ $٣^{س} = ٣^{-٢}$ ∴ س = −٢

أو $٣^{س} - ٣ = ٠$ ومنها $٣^{س} = ٣$ ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {−٢ ، ١}

١٠

∵ $س^{ن+١} = ص^{ن-١}$

∴ $(س^{ن+١})^{٣} = (ص^{ن-١})^{٣}$

∴ $(س^{٣})^{ن+١} = ص^{٣ن-٣}$

، ∵ $س^{٣} = ص^{٢}$ ∴ $(ص^{٢})^{ن+١} = ص^{٣ن-٣}$

∴ $ص^{٢ن+٢} = ص^{٣ن-٣}$

∴ ٢ن + ٢ = ٣ن − ٣ ∴ ن = ٥

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (ب)	② (د)	③ (جـ)	④ (جـ)
⑤ (جـ)	⑥ (د)	⑦ (د)	

إرشادات لحل رقم ١

① ∵ $\sqrt{س^{٢}} = |س| = -س$ لأن (س < ٠)

، $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$

، $\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} = \sqrt{(س - ١)^{٢}}$

$= |س - ١| = ١ - س$

(لأن س < ٠)

∴ $\sqrt{س^{٢}} - \sqrt[٣]{س^{٣}} - \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} + ١$

$= -س - س - (١ - س) + ١ = -س$

② ∵ $أ = \sqrt[٤]{\frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt{٧}}}$ ∴ $أ^{٤} = \frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt{٧}}$

∴ $(أ^{٤})^{٦} = \frac{٤}{٣٤٣}$ عدد نسبى.

∴ $أ^{٢٤}$ عدد نسبى.

③ ∵ $س^{\frac{٢}{٣}} = س^{\frac{٣}{٢}}$ ∴ $س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{٣}{٢}} = ٠$

∴ $س^{\frac{٢}{٣}}(١ - س^{\frac{٥}{٦}}) = ٠$

∴ $س^{\frac{٢}{٣}} = ٠$

ومنها س = ٠ أ، $١ - س^{\frac{٥}{٦}} = ٠$

ومنها $س^{\frac{٥}{٦}} = ١$ ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ١}

④ $\sqrt[٥]{\frac{٢}{٢٧}} = \sqrt[٥]{\frac{٢ \times ٣ \times ٣}{٢٧ \times ٣ \times ٣}} = \sqrt[٥]{\frac{١٨}{٢٤٣}} = \frac{\sqrt[٥]{١٨}}{٣}$

⑤ $\sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م}$ صحيحة لكل $\sqrt[ن]{أ} \in ح$

، ن ∈ ص$^{+}$ − {١}

⑥ ∵ $س^{\frac{٢}{٣}} = أ$ ∴ $س = أ^{\frac{٣}{٢}} = (\sqrt{أ})^{٣}$

∴ لابد وأن تكون أ ≥ ٠

أى أن : أ ∈ ح$^{+}$ ∪ {٠}

⑦ $\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[م]{أ} = أ^{\frac{١}{ن}} \times أ^{\frac{١}{م}} = أ^{\frac{١}{ن} + \frac{١}{م}}$

$= أ^{\frac{م+ن}{من}}$

$= \sqrt[من]{أ^{م+ن}}$

٢

① $\frac{٥^{س-١} \times س^{٢-س}}{٥} = ١$

∴ $٥^{س-٢} \times س^{٢-س} = ١$

∴ $٥^{س-٢} = س^{س-٢}$

∴ س = ٥ أ، س = ٢

∴ مجموعة الحل = {٥ ، ٢}

② ∵ $(س - ٣)^{س-٥} = ١$

∴ إما س − ٥ = ٠ ومنها س = ٥

أ، س − ٣ = ١ ومنها س = ٤

أ، س − ٣ = −١ (إذا كان الأس زوجيًا)

ومنها س = ٢ (مرفوض) لأن الأس (٢ − ٥) فردى.

∴ مجموعة الحل = {٥ ، ٤}

③ ∵ $(س - ٣)^{(س-٦)} = ١$

∴ إما س − ٦ = ٠ ومنها س = ٦

أ، س − ٣ = ١ ومنها س = ٤

أ، س − ٣ = −١ (إذا كان الأس زوجيًا)

ومنها س = ٢ (يتحقق) (لأن الأس (٢ − ٦) زوجى)

∴ مجموعة الحل = {٦ ، ٤ ، ٢}

إجابات تمارين 8

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (د)	③ (أ)	④ (ب)
⑤ (جـ)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (أ)	⑩ (جـ)	⑪ (أ)	⑫ (جـ)
⑬ (ب)	⑭ (جـ)	⑮ (جـ)	⑯ (أ)
⑰ (د)	⑱ (جـ)	⑲ (د)	⑳ (جـ)
㉑ (جـ)	㉒ (أ)	㉓ (أ)	㉔ (ب)
㉕ (ب)	㉖ (جـ)	㉗ (جـ)	㉘ (ب)
㉙ (د)	㉚ (ب)	㉛ (ب)	㉜ (جـ)
㉝ (د)	㉞ (جـ)	㉟ (أ)	㊱ (د)
㊲ (ب)	㊳ (ب)	㊴ (ب)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

① ليست أسية

② دالة أسية ، أساسها = ٥ ، أسها = س

③ ليست أسية ④ ليست أسية

⑤ دالة أسية ، أساسها = $\frac{٢}{٣}$ ، أسها = س − ١

⑥ ليست أسية

٢

$\frac{د(س+٤) - د(س+٣)}{د(س+٥) - د(س+٤)} = \frac{٥^{س+٤} - ٥^{س+٣}}{٥^{س+٥} - ٥^{س+٤}}$

$= \frac{٥^{س+٣}(٥ - ١)}{٥^{س+٤}(٥ - ١)} = \frac{١}{٥}$

٣

∵ د(٢س − ١) + د(س − ٢) = ٥٠

∴ $٧^{(٢س-١)+١} + ٧^{(س-٢)+١} = ٥٠$

∴ $٧^{٢س} + ٧^{س-١} = ٥٠$

∴ $٧^{٢س} + ٧^{-١} \times ٧^{س} = ٥٠$

∴ $٧^{٢س} + \frac{١}{٧} \times ٧^{س} = ٥٠$ (بالضرب × ٧)

∴ $٧ \times ٧^{٢س} + ٧^{س} - ٣٥٠ = ٠$

∴ $(٧ \times ٧^{س} + ٥٠)(٧^{س} - ٧) = ٠$

∴ $٧ \times ٧^{س} + ٥٠ = ٠$ ومنها $٧^{س} = \frac{-٥٠}{٧}$ (مرفوض)

أ، $٧^{س} - ٧ = ٠$ ∴ $٧^{س} = ٧$ ∴ س = ١

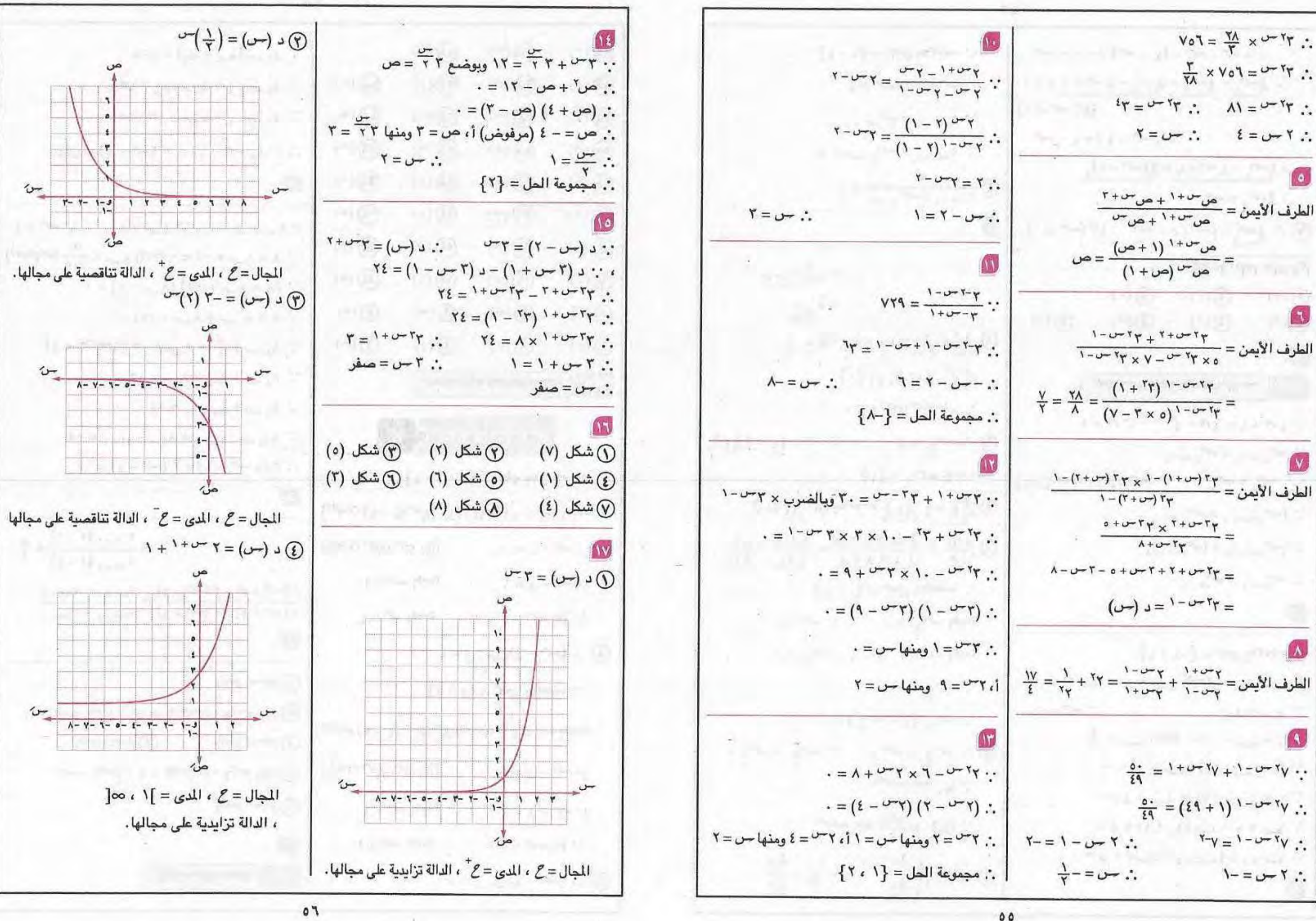
٤

∵ $د_{١}(٢س - ١) + د_{٢}(س + ١) = ٧٥٦$

∴ $٣^{٢س-١} + ٩^{س+١} = ٧٥٦$

∴ $٣^{٢س-١} + ٣^{٢س+٢} = ٧٥٦$

∴ $٣^{٢س}(٣^{-١} + ٣^{٢}) = ٧٥٦$



$\therefore 3^{2س} \times \frac{28}{3} = 756$

$\therefore 3^{2س} = 756 \times \frac{3}{28}$

$\therefore 3^{2س} = 81 \quad \therefore 3^{2س} = 3^{4}$

$\therefore 2س = 4 \quad \therefore س = 2$

5

الطرف الأيمن $= \frac{ص^{س+1} + ص^{س+2}}{ص^{س+1} + ص^{س}}$

$= \frac{ص^{س+1}(1 + ص)}{ص^{س}(ص + 1)} = ص$

6

الطرف الأيمن $= \frac{3^{2س+2} + 3^{2س-1}}{5 \times 3^{2س} - 7 \times 3^{2س-1}}$

$= \frac{3^{2س-1}(3^{3} + 1)}{3^{2س-1}(5 \times 3 - 7)} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$

7

الطرف الأيمن $= \frac{3^{3(س+1)-1} \times 3^{3(س+2)-1}}{3^{3(س+3)-1}}$

$= \frac{3^{3س+2} \times 3^{3س+5}}{3^{3س+8}}$

$= 3^{3س+2+3س+5-3س-8}$

$= 3^{3س-1} = د(س)$

8

الطرف الأيمن $= \frac{2^{س+1}}{2^{س-1}} + \frac{2^{س-1}}{2^{س+1}} = 2^{2} + \frac{1}{2^{2}} = \frac{17}{4}$

9

$\therefore 7^{2س-1} + 7^{2س+1} = \frac{50}{49}$

$\therefore 7^{2س-1}(1 + 49) = \frac{50}{49}$

$\therefore 7^{2س-1} = 7^{-2} \quad \therefore 2س - 1 = -2$

$\therefore 2س = -1 \quad \therefore س = -\frac{1}{2}$

10

$\therefore \frac{2^{س+1} - 2^{س}}{2^{س} - 2^{س-1}} = 2^{س-2}$

$\therefore \frac{2^{س}(2 - 1)}{2^{س-1}(2 - 1)} = 2^{س-2}$

$\therefore 2 = 2^{س-2}$

$\therefore س - 2 = 1 \quad \therefore س = 3$

11

$\therefore \frac{3^{-2س-1}}{3^{-س+1}} = 729$

$\therefore 3^{-2س-1+س-1} = 3^{6}$

$\therefore -س - 2 = 6 \quad \therefore س = -8$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{-8\}$

12

$\therefore 3^{س+1} + 3^{2-س} = 30$ وبالضرب $\times 3^{س-1}$

$\therefore 3^{2س} + 3^{2} - 10 \times 3 \times 3^{س-1} = 0$

$\therefore 3^{2س} - 10 \times 3^{س} + 9 = 0$

$\therefore (3^{س} - 1)(3^{س} - 9) = 0$

$\therefore 3^{س} = 1$ ومنها $س = 0$

أ، $3^{س} = 9$ ومنها $س = 2$

13

$\therefore 2^{2س} - 6 \times 2^{س} + 8 = 0$

$\therefore (2^{س} - 2)(2^{س} - 4) = 0$

$\therefore 2^{س} = 2$ ومنها $س = 1$ أ، $2^{س} = 4$ ومنها $س = 2$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{1 ، 2\}$

14

$\therefore 3^{س} + 3^{\frac{س}{2}} = 12$ وبوضع $3^{\frac{س}{2}} =$ ص

$\therefore$ ص^{2} + ص $- 12 = 0$

$\therefore$ (ص + 4) (ص − 3) = 0

$\therefore$ ص = − 4 (مرفوض) أ، ص = 3 ومنها $3^{\frac{س}{2}} = 3$

$\therefore \frac{س}{2} = 1 \quad \therefore س = 2$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{2\}$

15

$\because د(س - 2) = 3^{س} \quad \therefore د(س) = 3^{س+2}$

، $\because د(3س + 1) - د(3س - 1) = 24$

$\therefore 3^{3س+3} - 3^{3س+1} = 24$

$\therefore 3^{3س+1}(3^{2} - 1) = 24$

$\therefore 3^{3س+1} \times 8 = 24 \quad \therefore 3^{3س+1} = 3$

$\therefore 3س + 1 = 1 \quad \therefore 3س =$ صفر

$\therefore س =$ صفر

16

① شكل (٧) ② شكل (٢) ③ شكل (٥)

④ شكل (١) ⑤ شكل (٦) ⑥ شكل (٣)

⑦ شكل (٤) ⑧ شكل (٨)

17

① $د(س) = 3^{س}$

المجال = ح ، المدى = $ح^{+}$ ، الدالة تزايدية على مجالها.

② $د(س) = \left(\frac{1}{2}\right)^{س}$

المجال = ح ، المدى = $ح^{+}$ ، الدالة تناقصية على مجالها.

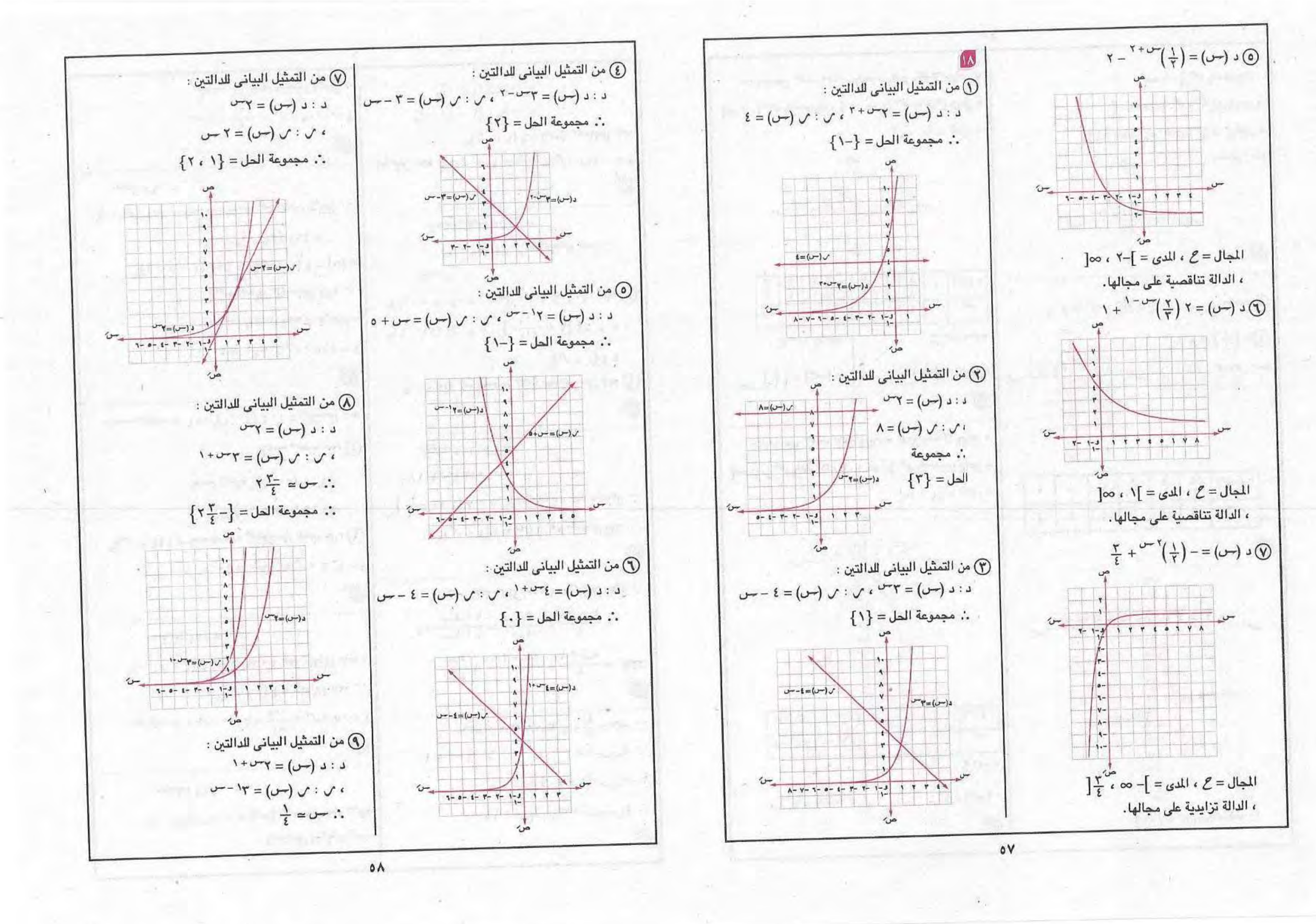
③ $د(س) = -3(2)^{س}$

المجال = ح ، المدى = $ح^{-}$ ، الدالة تناقصية على مجالها

④ $د(س) = 2^{س+1} + 1$

المجال = ح ، المدى = $]1 ، \infty[$

، الدالة تزايدية على مجالها.



⑤ $د(س) = \left(\frac{1}{2}\right)^{س+2} - 2$

المجال = ح ، المدى = $]-2 ، \infty[$

، الدالة تناقصية على مجالها.

⑥ $د(س) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{س-1} + 1$

المجال = ح ، المدى = $]1 ، \infty[$

، الدالة تناقصية على مجالها.

⑦ $د(س) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{س-2} + \frac{3}{4}$

المجال = ح ، المدى = $]-\infty ، \frac{3}{4}[$

، الدالة تزايدية على مجالها.

18

① من التمثيل البيانى للدالتين :

د : $د(س) = 2^{س+3}$ ، ر : $ر(س) = 4$

∴ مجموعة الحل = {−1}

② من التمثيل البيانى للدالتين :

د : $د(س) = 2^{س}$

، ر : $ر(س) = 8$

∴ مجموعة الحل = {3}

③ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : $د(س) = 3^{س}$ ، ر : $ر(س) = 4 - س$

∴ مجموعة الحل = {1}

④ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : $د(س) = 3^{س-2}$ ، ر : $ر(س) = 3 - س$

∴ مجموعة الحل = {2}

⑤ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : $د(س) = 2^{1-س}$ ، ر : $ر(س) = س + 5$

∴ مجموعة الحل = {−1}

⑥ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : $د(س) = 4^{س+1}$ ، ر : $ر(س) = 4 - س$

∴ مجموعة الحل = {0}

⑦ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : $د(س) = 2^{س}$

، ر : $ر(س) = 2س$

∴ مجموعة الحل = {1 ، 2}

⑧ من التمثيل البيانى للدالتين :

د : $د(س) = 2^{س}$

، ر : $ر(س) = 3س + 1$

∴ $س \simeq -\frac{3}{4} ، 2$

∴ مجموعة الحل = $\{-\frac{3}{4} ، 2\}$

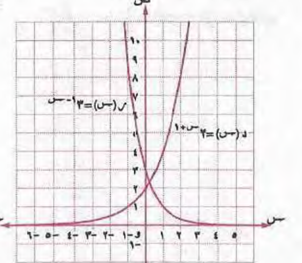
⑨ من التمثيل البيانى للدالتين :

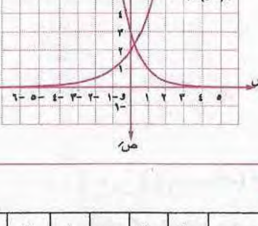
د : $د(س) = 2^{س+1}$

، ر : $ر(س) = 13 - س$

∴ $س \simeq \frac{1}{4}$

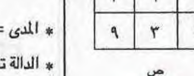
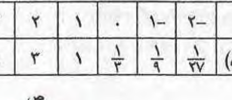
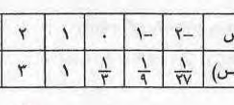
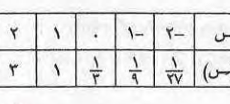
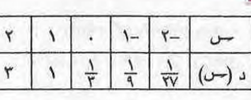
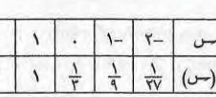
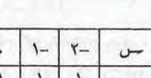
∴ مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٤}\}$





١٩

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣
د (س)	$\frac{١}{٢٧}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩

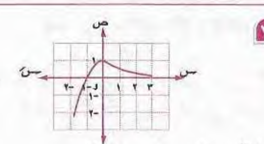








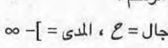
ومن الرسم :

① د $(\frac{٣}{٢}) \simeq ١,٧$

② عندما $٣^{س-١} = ٧\frac{١}{٢}$ فإن : س ≃ ٢,٨

٢٠





ومن الرسم :

* المجال = ح ، المدى =]- ∞ ، ١]

* الدالة تزايدية فى]- ∞ ، ٠]

، وتناقصية فى [٠ ، ∞[

٢١

د (س) = $٢^{س}$ ، س ≥ ٠ | د (س) = $٢^{-س}$ ، س < ٠

س	٠	١	٢	٣	(٠)	-١	-٢	-٣
د (س)	١	٢	٤	٨	(١)	٢	٤	٨

* المدى = [١ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٠] ، وتزايدية فى [٠ ، ∞[

* الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات.

٢٢

د (س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ عندما س ≥ ٠ | د (س) = $(\frac{١}{٢})^{-س}$ عندما س < ٠

س	٠	١	٢	٣	(٠)	-١	-٢	-٣
د (س)	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$	(١)	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

* المدى =]٠ ، ١]

* الدالة تزايدية فى]- ∞ ، ٠] ، وتناقصية فى [٠ ، ∞[

* الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات.

٢٣

∵ $٥^{١+ظاس} + ٥^{ظاس-١} = ٢٦$

∴ $٥^{ظاس} (٥ + ٥^{-١}) = ٢٦$

∴ $٥^{ظاس} = ٥$ ∴ ظاس = ١

∴ س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ ن π حيث ن ∈ ص

٢٤

المقدار = $\frac{١}{٢^{س}+١} + \frac{١}{٢^{-س}+١} \times \frac{٢^{س}}{٢^{س}}$

$= \frac{١}{٢^{س}+١} + \frac{٢^{س}}{١+٢^{س}} = \frac{١+٢^{س}}{١+٢^{س}} = ١$

∴ قيمة المقدار = ١ مهما كانت قيمة س

٢٥

∵ دالة الرصيد هى د (ن) = أ $(١ + ر)^{ن}$

∴ الرصيد بعد ١٠ سنوات = ٨٠٠٠ $(١ + \frac{١٠,٥}{١٠٠})^{١٠}$

= ٨٠٠٠ $(١,١٠٥)^{١٠}$

≃ ٢١٧١٢٦ جنيهًا.

٢٦

① عدد السكان بعد مرور ن سنة من عام ٢٠٠٠

= أ $(١ + ر)^{ن}$

= ٤٣,٣ $(١ + \frac{١,٥}{١٠٠})^{ن}$ = ٤٣,٣ $(١,٠١٥)^{ن}$

② عام ٢٠٢٠ يكون عدد السنين = ٢٠٢٠ - ٢٠٠٠

= ٢٠ سنة.

∴ عدد السكان = ٤٣,٣ $(١,٠١٥)^{٢٠}$

≃ ٥٨,٣ مليون نسمة.

٢٧

أ = ٣٦٤٠٠ ، ر = $\frac{٤}{١٠٠}$ = ٠,٠٤ ، ن = عدد المباريات

عدد الحضور (ص) = أ $(١ - ر)^{ن}$

= ٣٦٤٠٠ $(١ - ٠,٠٤)^{ن}$

= ٣٦٤٠٠ $(٠,٩٦)^{ن}$

، فى المباراة العاشرة :

يكون عدد الحضور (ص) = ٣٦٤٠٠ $(٠,٩٦)^{١٠}$

≃ ٢٤٢٠٠ مُشجع

٢٨

أ = ٨٠ ، ر = $\frac{١٨}{١٠٠}$ = ٠,١٨ ، ن = ٤ سنوات.

∴ عدد الأبقار = أ $(١ + ر)^{ن}$

، عدد الأبقار بعد ٤ سنوات = ٨٠ $(١ + ٠,١٨)^{٤}$

≃ ١٥٥ بقرة.

٢٩

أ = ٤,٦ ، ر = $\frac{٤}{١٠٠}$ = ٠,٠٤

① دالة النمو المستقبلى بعد ن سنة = أ $(١ + ر)^{ن}$

= ٤,٦ $(١ + ٠,٠٤)^{ن}$

= ٤,٦ $(١,٠٤)^{ن}$ مليون نسمة.

② بعد خمس سنوات :

عدد السكان = ٤,٦ $(١,٠٤)^{٥}$ ≃ ٥,٦ مليون نسمة.

٣٠

أ = ٢٥٤ ، ر = $\frac{٥}{١٠٠}$ = ٠,٠٥

، الفترة الزمنية ن = ٩ سنوات.

∴ دالة التضاؤل الأسى هى :

د (ن) = أ $(١ - ر)^{ن}$ = ٢٥٤ $(١ - ٠,٠٥)^{ن}$

= ٢٥٤ $(٠,٩٥)^{ن}$

∴ إنتاج المنجم فى السنة التاسعة = ٢٥٤ $(٠,٩٥)^{٩}$

≃ ١٦٠ كجم.

٣١

أ = ٢٠٠٠ ، ر = $\frac{٧}{١٠٠}$ = ٠,٠٧

، الفترة الزمنية ن = ١١ ساعة.

∴ دالة النمو الأسى هى د (ن) = أ $(١ + ر)^{ن}$

= ٢٠٠٠ $(١ + ٠,٠٧)^{ن}$

= ٢٠٠٠ $(١,٠٧)^{ن}$

∴ كمية البكتريا بعد ١١ ساعة = ٢٠٠٠ $(١,٠٧)^{١١}$

≃ ٤٢١٠ بكتريا.

٣٢

باستخدام العلاقة جـ = أ $(١ + \frac{ر}{س})^{ن س}$

① العائد السنوى. ∴ س = ١

جـ = ٥٠٠٠ $(١ + ٠,٠٨)^{١٠}$ ≃ ١٠٧٩٤,٦٢ جنيه.

② العائد الربع سنوى. ∴ س = ٤

جـ = ٥٠٠٠ $(١ + \frac{٠,٠٨}{٤})^{١٠ × ٤}$ ≃ ١١٠٤٠,٢ جنيه.

③ العائد الشهرى. ∴ س = ١٢

جـ = ٥٠٠٠ $(١ + \frac{٠,٠٨}{١٢})^{١٠ × ١٢}$ ≃ ١١٠٩٨,٢ جنيه.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (د) ② (جـ) ③ (د) ④ (جـ)

⑤ (د) ⑥ (أ) ⑦ (د) ⑧ (أ)

إرشادات الحل :

① ∵ الدالة متناقصة إذا كان : ٠ < ٢أ < ١

∴ ٠ < أ < $\frac{١}{٢}$ ∴ أ ∈]٠ ، $\frac{١}{٢}$[

② ∵ الدالة تزايدية ∴ $\frac{أ}{٣}$ > ١ ∴ أ > ٣

③ ∵ د (س) = $(أ - ٢)^{س}$ دالة اسية.

∴ أ − ٢ > ٠ ، أ − ٢ ≠ ١

∴ أ > ٢ ، أ ≠ ٣

∴ أ ∈]٢ ، ∞[− {٣}

④ المنحنى يقطع محور السينات عندما ص = ٠

وبالتعويض عن د (س) = ٠ فى الدوال المعطاة لا نحصل على أى قيمة للمتغير س الا فى الحالة رقم (جـ)

$٢^{س}$ − ١ = ٠ ∴ $٢^{س}$ = ١ ∴ س = ٠

أى المنحنى يقطع محور السينات فى النقطة (٠ ، ٠)

⑤ بحل المعادلتين ص = ٨ ، ص = $٢^{س}$ معًا

∴ س = ٣

وبحل المعادلتين ص = ٨ ، ص = $(\frac{١}{٢})^{س}$ معًا

∴ س = −٣

∴ أ (٣ ، ٨) ، ب (−٣ ، ٨)

∴ طول $\overline{أب}$ = ٦ وحدات.

⑥ نعلم أن انعكاس منحنى الدالة د (س) = $٣^{س}$ حول محور الصادات يعطى منحنى الدالة د (س) = $٣^{-س}$ ثم ازاحته ٥ وحدات لأعلى يعطى المنحنى د (س) = ٥ + $٣^{-س}$

⑦ ∵ د (س) = $\frac{٩^{س}}{٩^{س} + ٣}$

∴ د (١ − س) = $\frac{٩^{١-س}}{٩^{١-س} + ٣}$

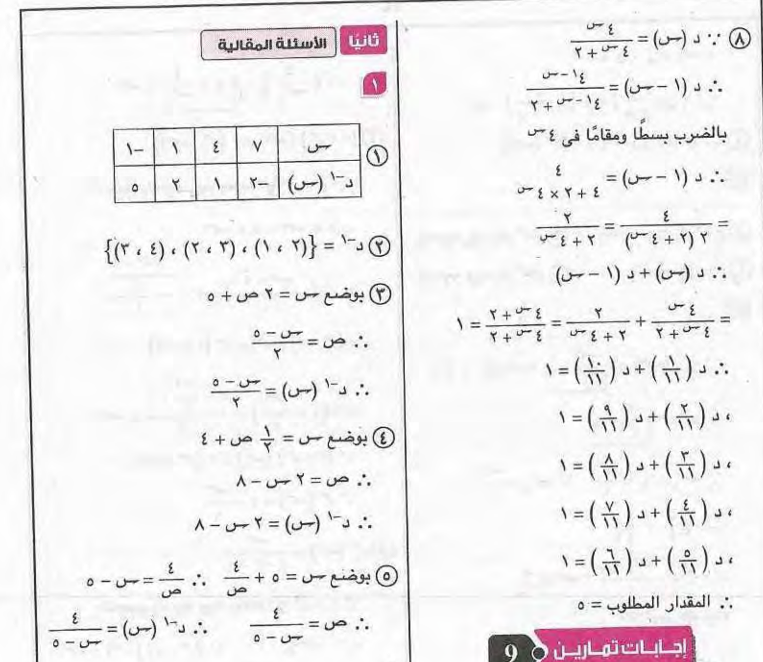
بالضرب بسطًا ومقامًا فى $٩^{س}$

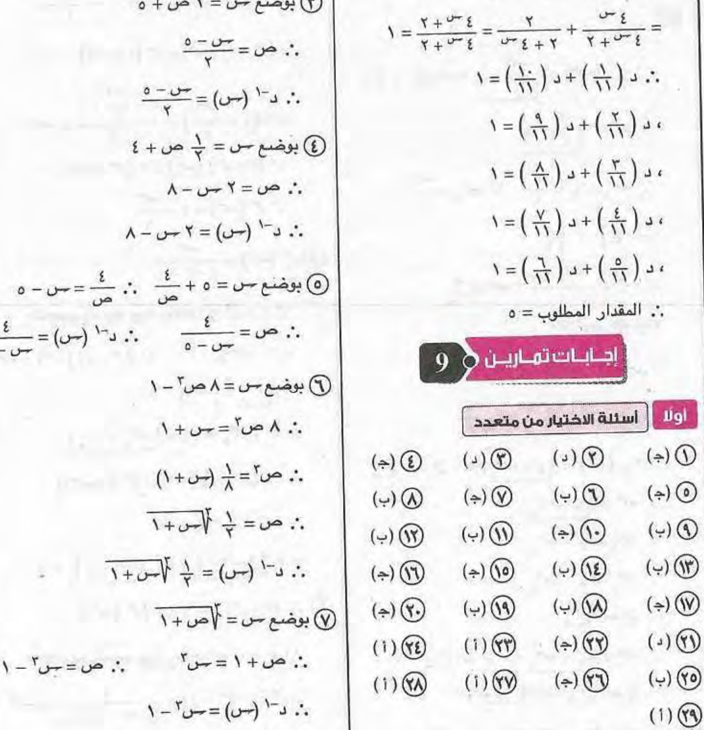
∴ د (١ − س) = $\frac{٩}{٩ + ٣ × ٩^{س}}$

= $\frac{٩}{٣(٣ + ٩^{س})}$ = $\frac{٣}{٣ + ٩^{س}}$

∴ د (س) + د (١ − س)

= $\frac{٩^{س}}{٩^{س} + ٣}$ + $\frac{٣}{٣ + ٩^{س}}$ = $\frac{٩^{س} + ٣}{٩^{س} + ٣}$ = ١





⑧ ∵ د (س) = $\frac{٤^{س}}{٤^{س} + ٢}$

∴ د (١ − س) = $\frac{٤^{١-س}}{٤^{١-س} + ٢}$

بالضرب بسطًا ومقامًا فى $٤^{س}$

∴ د (١ − س) = $\frac{٤}{٤ + ٢ × ٤^{س}}$

= $\frac{٤}{٢(٢ + ٤^{س})}$ = $\frac{٢}{٢ + ٤^{س}}$

∴ د (س) + د (١ − س)

= $\frac{٤^{س}}{٤^{س} + ٢}$ + $\frac{٢}{٢ + ٤^{س}}$ = $\frac{٤^{س} + ٢}{٤^{س} + ٢}$ = ١

∴ د ($\frac{١}{١١}$) + د ($\frac{١٠}{١١}$) = ١

، د ($\frac{٢}{١١}$) + د ($\frac{٩}{١١}$) = ١

، د ($\frac{٣}{١١}$) + د ($\frac{٨}{١١}$) = ١

، د ($\frac{٤}{١١}$) + د ($\frac{٧}{١١}$) = ١

، د ($\frac{٥}{١١}$) + د ($\frac{٦}{١١}$) = ١

∴ المقدار المطلوب = ٥

إجابات تمارين 9

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (د) ③ (د) ④ (جـ)

⑤ (جـ) ⑥ (ب) ⑦ (جـ) ⑧ (ب)

⑨ (ب) ⑩ (جـ) ⑪ (ب) ⑫ (ب)

⑬ (ب) ⑭ (ب) ⑮ (جـ) ⑯ (جـ)

⑰ (جـ) ⑱ (ب) ⑲ (ب) ⑳ (جـ)

㉑ (د) ㉒ (جـ) ㉓ (أ) ㉔ (أ)

㉕ (ب) ㉖ (جـ) ㉗ (أ) ㉘ (أ)

㉙ (أ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

①

س	٧	٤	١	−١
$د^{-١}$ (س)	−٢	١	٢	٥

② $د^{-١}$ = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤)}

③ بوضع س = ٢ ص + ٥

∴ ص = $\frac{س - ٥}{٢}$

∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{س - ٥}{٢}$

④ بوضع س = $\frac{١}{٢}$ ص + ٤

∴ ص = ٢ س − ٨

∴ $د^{-١}$ (س) = ٢ س − ٨

⑤ بوضع س = ٥ + $\frac{٤}{ص}$ ∴ $\frac{٤}{ص}$ = س − ٥

∴ ص = $\frac{٤}{س - ٥}$ ∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{٤}{س - ٥}$

⑥ بوضع س = ٨ $ص^{٣}$ − ١

∴ ٨ $ص^{٣}$ = س + ١

∴ $ص^{٣}$ = $\frac{١}{٨}$ (س + ١)

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ $\sqrt[٣]{س + ١}$

∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٢}$ $\sqrt[٣]{س + ١}$

⑦ بوضع س = $\sqrt[٣]{ص + ١}$

∴ $س^{٣}$ = ص + ١ ∴ ص = $س^{٣}$ − ١

∴ $د^{-١}$ (س) = $س^{٣}$ − ١

⑧ بوضع س = ∛(٤ − ص) ∴ ٤ − ص = س^{٣}

∴ ص = ٤ − س^{٣}

∴ د$^{-١}$(س) = ٤ − س^{٣}

⑨ ∵ ص = ٢ + √(٣ − س) حيث س ≤ ٣ ، ص ≥ ٢

وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ + √(٣ − ص)

حيث ص ≤ ٣ ، س ≥ ٢

∴ √(٣ − ص) = س − ٢

∴ ٣ − ص = (س − ٢)^{٢}

∴ ص = ٣ − (س − ٢)^{٢}

∴ د$^{-١}$(س) = ٣ − (س − ٢)^{٢} لكل س ≥ ٢

⑩ ∵ ص = س^{٢} حيث س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

وبتبديل المتغيرين

∴ س = ص^{٢} حيث ص ≥ ٠ ، س ≥ ٠

∴ ص = √س

∴ د$^{-١}$(س) = √س لكل س ≥ ٠

⑪ ∵ ص = (س + ٢)^{٢} حيث س ≥ −٢، ص ≥ ٠

وبتبديل المتغيرين

∴ س = (ص + ٢)^{٢} حيث ص ≥ −٢ ، س ≥ ٠

∴ ص + ٢ = −√س

∴ ص = −√س − ٢

∴ د$^{-١}$(س) = −√س − ٢ لكل س ≥ ٠

⑫ ∵ ص = (س − ١)^{٢} + ٢ حيث س ≥ ١

، ص ≥ ٢ وبتبديل المتغيرين

∴ س = (ص − ١)^{٢} + ٢ حيث ص ≥ ١ ، س ≥ ٢

∴ (ص − ١)^{٢} = س − ٢

∴ ص − ١ = √(س − ٢)

∴ ص = √(س − ٢) + ١

∴ د$^{-١}$(س) = √(س − ٢) + ١ لكل س ≥ ٢

⑬ ∵ ص = س^{٢} + ٨ س + ٧ = (س + ٤)^{٢} − ٩

حيث س ≥ −٤ ، ص ≥ −٩ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ص^{٢} + ٨ ص + ٧ حيث ص ≥ −٤

، س ≥ −٩

∴ س = ص^{٢} + ٨ ص + ١٦ − ٩

∴ س = (ص + ٤)^{٢} − ٩

∴ (ص + ٤)^{٢} = س + ٩

∴ ص + ٤ = √(س + ٩)

∴ ص = √(س + ٩) − ٤

∴ د$^{-١}$(س) = √(س + ٩) − ٤ لكل س ≥ −٩

⑭ ∵ ص = √(٩ − س^{٢}) حيث −٣ ≤ س ≤ ٠

، ٠ ≤ ص ≤ ٣ وبتبديل المتغيرين

∴ س = √(٩ − ص^{٢}) ، −٣ ≤ ص ≤ ٠

، ٠ ≤ س ≤ ٣

∴ س^{٢} = ٩ − ص^{٢}

∴ ص^{٢} = ٩ − س^{٢}

∴ ص = −√(٩ − س^{٢})

∴ د$^{-١}$(س) = −√(٩ − س^{٢})

لكل ٠ ≤ س ≤ ٣

⑮ ∵ ص = √(٩ − س^{٢}) حيث ٠ ≤ س ≤ ٣

، ٠ ≤ ص ≤ ٣ وبتبديل المتغيرين

∴ س = √(٩ − ص^{٢}) ، ٠ ≤ ص ≤ ٣

، ٠ ≤ س ≤ ٣

∴ س^{٢} = ٩ − ص^{٢}

∴ ص^{٢} = ٩ − س^{٢}

∴ ص = √(٩ − س^{٢})

∴ د$^{-١}$(س) = √(٩ − س^{٢}) لكل ٠ ≤ س ≤ ٣

⑯ ∵ ص = ١ / (س^{٢} + ٢) ، س ∈ ح$^{+}$

، ص ∈]٠ ، ½[

وبتبديل المتغيرين

∴ س = ١ / (ص^{٢} + ٢) ، ص ∈ ح$^{+}$

، س ∈]٠ ، ½[

∴ ص^{٢} + ٢ = ١/س ∴ ص^{٢} = ١/س − ٢

∴ ص = √(١/س − ٢)

∴ د$^{-١}$(س) = √(١/س − ٢) ، س ∈]٠ ، ½[

٢

① لها دالة عكسية ② ليس لها دالة عكسية

③ ليس لها دالة عكسية ④ ليس لها دالة عكسية

٣

① ∵ (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

= د((س + ٣)/٢) = ٢((س + ٣)/٢) − ٣

= س + ٣ − ٣ = س

، (ر ∘ د)(س) = ر(د(س))

= ر(٢ س − ٣) = ((٢ س − ٣) + ٣)/٢ = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

② ∵ (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

= د(√(س − ٤)) = (√(س − ٤))^{٢} + ٤

= س − ٤ + ٤ = س

، ∵ (ر ∘ د)(س) = ر(د(س))

= ر(س^{٢} + ٤) = √(س^{٢} + ٤ − ٤)

= √(س^{٢}) = |س|

، ∵ س ≥ ٠ ∴ (ر ∘ د)(س) = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

③ ر(س) = (٥ س − ٢)/س

∴ ر(س) = ٥ − ٢/س

∴ (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

= د(٥ − ٢/س) = −٢ / (٥ − ٢/س − ٥) = س

، (ر ∘ د)(س) = ر(د(س))

= ر(−٢/(س − ٥)) = ٥ − ٢ / (−٢/(س − ٥))

= ٥ + س − ٥ = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

④ (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

= د(س^{٣}/٤) = ∛(٤ × س^{٣}/٤) = س

، (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر ($\sqrt[3]{٤ س}$)

= $\frac{(\sqrt[3]{٤ س})^{3}}{٤}$

= $\frac{٤ س}{٤}$ = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

٤

① ∵ ص = ٥ س بتبديل المتغيرين.

∴ س = ٥ ص

∴ ص = $\frac{1}{5}$ س

∴ د$^{-1}$ (س) = $\frac{1}{5}$ س

② د$^{-1}$ (ب) + ٢ د$^{-1}$ (حـ) = ٣ + ٢ × ٤ = ١١

٥

①

②

③

④

٦

① ∵ د (س) = ٢ س

∴ ص = ٢ س

بتبديل المتغيرين ∴ س = ٢ ص

∴ ص = $\frac{1}{2}$ س

∴ د$^{-1}$ (س) = $\frac{1}{2}$ س ≠ د (س)

∴ د معكوسها ليس نفسها.

② ∵ د (س) = − س ∴ ص = − س

بتبديل المتغيرين

∴ س = − ص

∴ ص = − س

∴ د$^{-1}$ (س) = − س = د (س)

∴ د معكوسها هو نفسها.

③ ∵ د (س) = $\frac{٢}{س}$ ∴ ص = $\frac{٢}{س}$

بتبديل المتغيرين ∴ س = $\frac{٢}{ص}$

∴ ص = $\frac{٢}{س}$

∴ د$^{-1}$ (س) = $\frac{٢}{س}$ = د (س)

∴ د معكوسها هو نفسها.

④ ∵ د (س) = ٧ − س ∴ ص = ٧ − س

بتبديل المتغيرين

∴ س = ٧ − ص

∴ ص = ٧ − س

∴ د$^{-1}$ (س) = ٧ − س = د (س)

∴ د معكوسها هو نفسها.

⑤ ∵ د (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٥

∴ ص = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٥ بتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{١}{ص - ٣}$ + ٥

∴ س − ٥ = $\frac{١}{ص - ٣}$

∴ ص − ٣ = $\frac{١}{س - ٥}$

∴ ص = $\frac{١}{س - ٥}$ + ٣

∴ د$^{-1}$ (س) = $\frac{١}{س - ٥}$ + ٣ ≠ د (س)

∴ د معكوسها ليس نفسها.

⑥ ∵ د (س) = $\frac{١}{س - ك}$ + ك

∴ ص = $\frac{١}{س - ك}$ + ك

بتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{١}{ص - ك}$ + ك

∴ س − ك = $\frac{١}{ص - ك}$

∴ ص − ك = $\frac{١}{س - ك}$

∴ ص = $\frac{١}{س - ك}$ + ك

∴ د$^{-1}$ (س) = $\frac{١}{س - ك}$ + ك = د (س)

∴ د معكوسها هو نفسها.

٧

إجابة رنا هى الصواب لأن :

د$^{-1}$ (س) ≠ $\frac{١}{د (س)}$ كما فى إجابة وائل

٨

① ∵ د (س) = س^{2}

∴ د ليست أحادية على مجالها = ح

وتكون أحادية إذا كانت س ∈ [٠ ، ∞[

أو س ∈]−∞ ، ٠]

∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية

= [٠ ، ∞[أو]−∞ ، ٠]

② ∵ د (س) = س^{3}

∴ د دالة أحادية على مجالها ح

∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية = ح

③ ∵ د (س) = $\frac{1}{2}$ س

∴ د دالة أحادية على مجالها ح

∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية = ح

٩

∵ $ص = \frac{س - ١}{س + ٥}$ بتبديل المتغيرين

∴ $س = \frac{ص - ١}{ص + ٥}$

∴ $س ص + ٥ س = ص - ١$

∴ $س ص - ص = -٥ س - ١$

∴ $ص (س - ١) = -٥ س - ١$

∴ $ص = \frac{-٥ س - ١}{س - ١}$

∴ $د^{-١}(س) = \frac{-٥ س - ١}{س - ١}$

١٠

∵ $د(س) = ٢ س + أ$ ∴ $ص = ٢ س + أ$

وبتبديل المتغيرين ∴ $س = ٢ ص + أ$

∴ $ص = \frac{س - أ}{٢} = \frac{١}{٢} س - \frac{أ}{٢}$

∴ $د^{-١}(س) = \frac{١}{٢} س - \frac{أ}{٢}$

∵ $د^{-١}(س) = ر(س)$

∴ $\frac{١}{٢} س - \frac{أ}{٢} = ب س + ٣$

∴ $ب = \frac{١}{٢}$ ، $-\frac{أ}{٢} = ٣$ ∴ $أ = -٦$

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (أ)	② (ج)	③ (أ)	④ (أ)
⑤ (ج)	⑥ (د)	⑦ (ب)	⑧ (أ)

إرشادات الحل :

① ∵ $د^{-١}(٩) = ٣$

∴ النقطة (٣ ، ٩) ∈ منحنى الدالة.

، ∵ $د^{-١}(٥) = ٢$

∴ النقطة (٢ ، ٥) ∈ منحنى الدالة

، ∵ $د(س) = أ س + ب$

∴ $٣ أ + ب = ٩$ (١)

، $٢ أ + ب = ٥$ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ $أ = ٤$ ، $ب = -٣$

∴ $أ × ب = ٤ × -٣ = -١٢$

② ∵ $ر(س) = س - ٣$

∴ $ر^{-١}(س) = س + ٣$

، ∵ $ر(د(س)) = ر(س^٢) = س^٢ - ٣$

، ∵ $ر(د(س)) = ر^{-١}(س)$

∴ $س^٢ - ٣ = س + ٣$

∴ $س^٢ - س - ٦ = ٠$

∴ $(س + ٢)(س - ٣) = ٠$

∴ $س = -٢$ أ، $س = ٣$

∴ م.ح = {٣ ، −٢}

③ نضع $د(س) = ٣$ ونوجد قيمة س

∴ $س = \frac{د(س) + ١}{٢ - د(س)} = \frac{٣ + ١}{٢ - ٣} = -٤$

∴ $د(-٤) = ٣$ ∴ $د^{-١}(٣) = -٤$

④ ∵ المجال ح − {١} ∴ $ب = ١$

∴ $د(س) = \frac{أ س + ٣}{س - ١} = أ + \frac{٣ + أ}{س - ١}$

من قاعدة الدالة نجد أن نقطة تماثل المنحنى هي (١ ، أ)

ومن المجال والمجال المقابل نجد أن نقطة تماثل المنحنى هي (١ ، ٣)

∴ $أ = ٣$

∴ $د(س) = \frac{٣ س + ٣}{س - ١}$ وبتبديل المتغيرين

∴ $س = \frac{٣ ص + ٣}{ص - ١}$

∴ $س ص - س = ٣ ص + ٣$

$(س - ٣) ص = س + ٣$ ∴ $ص = \frac{س + ٣}{س - ٣}$

∴ $د^{-١}(س) = \frac{س + ٣}{س - ٣}$

∴ $د^{-١}(١) = -٢$

⑤ ∵ $د(س) = \sqrt[٣]{س - ٥}$ وبتبديل المتغيرين

∴ $س = \sqrt[٣]{ص - ٥}$

∴ $ص = س^٣ + ٥$

∴ $د^{-١}(س) = س^٣ + ٥$

∴ $(ر ∘ د^{-١})(س) = ر(د^{-١}(س))$

$= ر(س^٣ + ٥)$

$= ٢(س^٣ + ٥) - ٧$

$= ٢ س^٣ + ٣$

⑥ ∵ $د(س) = ٣ س - ٤$ وبتبديل المتغيرين

∴ $س = ٣ ص - ٤$

∴ $ص = \frac{س + ٤}{٣}$

∴ $د^{-١}(س) = \frac{س + ٤}{٣}$

∴ $د^{-١}(س + ٢) = \frac{س + ٢ + ٤}{٣} = \frac{س + ٦}{٣}$

⑦ ∵ $د(س) = س^٣ + ٣ س^٢ + ٣ س + ١$

$= (س^٣ + ١) + (٣ س^٢ + ٣ س)$

$= (س + ١)(س^٢ - س + ١) + ٣ س (س + ١)$

$= (س + ١)(س^٢ - س + ١ + ٣ س)$

$= (س + ١)(س^٢ + ٢ س + ١)$

$= (س + ١)(س + ١)^٢ = (س + ١)^٣$

وبتبديل المتغيرين

∴ $س = (ص + ١)^٣$

∴ $ص = \sqrt[٣]{س} - ١$

∴ $د^{-١}(س) = \sqrt[٣]{س} - ١$

⑧ ∵ منحنى $د^{-١}$ يمر بالنقطتين (−٢ ، ٠) ، (−٣ ، −٢)

∴ $د^{-١}(-٢) = ٠$ ∴ $د(٠) = -٢$

، $د^{-١}(-٣) = -٢$ ∴ $د(-٢) = -٣$

∴ $(د ∘ د)(صفر) = د(د(صفر)) = د(-٢) = -٣$

إجابات تمارين 10

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (ب)	③ (ج)	④ (ب)
⑤ (د)	⑥ (د)	⑦ (د)	⑧ (أ)
⑨ (أ)	⑩ (ج)	⑪ (أ)	⑫ (ب)
⑬ (د)	⑭ (ج)	⑮ (أ)	⑯ (ج)
⑰ (ج)	⑱ (ب)	⑲ (ب)	⑳ (ب)
㉑ (ب)	㉒ (د)	㉓ (ب)	㉔ (ب)
㉕ (ب)	㉖ (د)	㉗ (أ)	㉘ (ج)
㉙ (أ)	㉚ (ب)	㉛ (ج)	㉜ (ج)
㉝ (ب)	㉞ (ج)	㉟ (أ)	㊱ (ب)
㊲ (أ)	㊳ (ج)	㊴ (أ)	㊵ (أ)
㊶ (د)	㊷ (ب)	㊸ (أ)	㊹ (ج)
㊺ (د)			

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① $٢^٧ = ١٢٨$ ② $\left(\frac{٢}{٥}\right)^٢ = \frac{٤}{٢٥}$

③ $(٢)^{\frac{٥}{٢}} = ٤\sqrt{٢}$

٢

① $لو_٥ ١ = صفر$ ② $لو_{١٠} ٠,٠٠٠١ = -٤$

③ $لو_٥ \frac{١}{١٢٥} = -٣$

٣

① بفرض : $لو_٢ ١٦ = س$

∴ $٢^س = ١٦$ ∴ $٢^س = ٢^٤$

∴ $س = ٤$ ∴ $لو_٢ ١٦ = ٤$

② بفرض : $لو_٨ ١ = س$

∴ $٨^س = ١ = ٨^٠$ ∴ $س = صفر$

∴ $لو_٨ ١ = صفر$

③ بفرض: لو ٠,٠٠٠٠١ = س

∴ ١٠^{س} = ٠,٠٠٠٠١ ∴ ١٠^{س} = $\frac{١}{١٠٠٠٠٠}$

∴ ١٠^{س} = ١٠$^{-٥}$ ∴ س = −٥

∴ لو ٠,٠٠٠٠١ = −٥

④ بفرض: لو$_{\frac{١}{٢}}$ ١٢٨ = س

∴ $(\frac{١}{٢})^{س}$ = ١٢٨ = ٢^{٧}

∴ $(\frac{١}{٢})^{س}$ = $(\frac{١}{٢})^{-٧}$ ∴ س = −٧

∴ لو$_{\frac{١}{٢}}$ ١٢٨ = −٧

⑤ بفرض: لو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ = س ∴ ٢^{س} = $\frac{١}{٨}$

∴ ٢^{س} = ٢$^{-٣}$ ∴ س = −٣

∴ لو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ = −٣

⑥ بفرض: لو$_{\sqrt{٢}}$ ٨$\sqrt{٢}$ = س

∴ $(\sqrt{٢})^{س}$ = ٨$\sqrt{٢}$ = $(\sqrt{٢})^{٧}$

∴ س = ٧ ∴ لو$_{\sqrt{٢}}$ ٨$\sqrt{٢}$ = ٧

⑦ بفرض: لو$_{٣}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$ = س

∴ ٣^{س} = $\sqrt[٤]{٢٧}$ ∴ ٣^{س} = (٣)$^{\frac{٣}{٤}}$

∴ س = $\frac{٣}{٤}$ ∴ لو$_{٣}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$ = $\frac{٣}{٤}$

⑧ بفرض: لو$_{٢}$ جا ٤٥° = لو$_{٢}$ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = س

∴ ٢^{س} = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ ٢^{س} = ٢$^{-\frac{١}{٢}}$

∴ س = −$\frac{١}{٢}$ ∴ لو$_{٢}$ جا ٤٥° = −$\frac{١}{٢}$

٤

① ٢^{٧} = س ∴ س = ١٢٨

② ٥$^{-٢}$ = س ∴ س = $\frac{١}{٢٥}$

③ ٣^{٤} = س^{٢} ∴ ٨١ = س^{٢} ∴ س = ± ٩

④ (٨١)$^{\frac{٣}{٤}}$ = س ∴ س = ٢٧

⑤ ٢$^{-٥}$ = س$^{-١}$ ∴ $\frac{١}{٢^{٥}}$ = $\frac{١}{س}$ ∴ س = ٣٢

⑥ ٢ = لو$_{٣}$ س ∴ س = ٣^{٢} = ٩

⑦ (٢)^{٠} = ٢ س − ٥ ∴ ١ = ٢ س − ٥

∴ س = ٣

⑧ ٨$^{\frac{٢}{٣}}$ = $\sqrt[٣]{س^{٢} + ٤٨}$ ∴ ٨^{٢} = س^{٢} + ٤٨

∴ س^{٢} = ١٦ ∴ س = ± ٤

⑨ لو$_{٢}$ (س^{٢} − ٢ س) = ٣

∴ ٢^{٣} = س^{٢} − ٢ س

∴ س^{٢} − ٢ س − ٨ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = −٢

⑩ ٥ = | ٢ س + ١ |

∴ ٢ س + ١ = ٥ أ، ٢ س + ١ = −٥

∴ س = ٢ أ، س = −٣

⑪ ٢^{٤} = س (س + ٦)

∴ س^{٢} + ٦ س − ١٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س + ٨) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = −٨

⑫ ٣ = س^{٢} − ٢ س

∴ س^{٢} − ٢ س − ٣ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ١) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = −١

⑬ (لو$_{٣}$ س − ٤) (لو$_{٣}$ س − ٥) = ٠

∴ لو$_{٣}$ س = ٤ ومنها س = ٣^{٤} = ٨١

أ، لو$_{٣}$ س = ٥ ومنها س = ٣^{٥} = ٢٤٣

⑭ ٣^{س} − ٣$^{س-٢}$ = ٢^{٣}

∴ ٣$^{س-٢}$ (٣^{٢} − ١) = ٨ ∴ ٣$^{س-٢}$ = ١

∴ س − ٢ = ٠ ∴ س = ٢

⑮ ٣$^{لو_{٤}(س + ١,٢٥)}$ = ٣$^{-١}$

∴ لو$_{٤}$ (س + ١,٢٥) = −١

∴ ٤$^{-١}$ = س + ١,٢٥ ∴ س = −١

⑯ لو$_{١٠}$ س − ٢ = ± ٢

∴ لو$_{١٠}$ س − ٢ = ٢ ومنها لو$_{١٠}$ س = ٤

∴ س = ١٠^{٤} أ، لو$_{١٠}$ س − ٢ = −٢

ومنها لو$_{١٠}$ س = ٠ ∴ س = ١

٥

① س^{٣} = ١٢٥ = ٥^{٣} ∴ س = ٥

∴ مجموعة الحل = {٥}

② س^{٥} = ٢ ∴ س = $\sqrt[٥]{٢}$

∴ مجموعة الحل = {$\sqrt[٥]{٢}$}

③ س$^{-٢}$ = ٣ ∴ س^{٢} = $\frac{١}{٣}$

∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ويرفض الحل السالب)

∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{\sqrt{٣}}$}

④ س$^{-\frac{٣}{٤}}$ = $\frac{١}{١٠٠٠}$

∴ س = (١٠$^{-٣}$)$^{-\frac{٤}{٣}}$ = ١٠٠٠٠

∴ مجموعة الحل = {١٠٠٠٠}

⑤ (−س)^{٤} = ٨١ = ٣^{٤}

∴ س = −٣ (ويرفض الحل الموجب)

∴ مجموعة الحل = {−٣}

⑥ (س − ١)^{٣} = ٢٧ = ٣^{٣} ∴ س − ١ = ٣

∴ س = ٤ ∴ مجموعة الحل = {٤}

⑦ (س − ١)^{٢} = ٧ − س

∴ س^{٢} − ٢ س + ١ = ٧ − س

∴ س^{٢} − س − ٦ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٢ (مرفوض) أ، س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

⑧ $(\frac{٢}{س})^{-٣}$ = ٦٤ ∴ $(\frac{س}{٢})^{٣}$ = ٤^{٣}

∴ $\frac{س}{٢}$ = ٤ ∴ س = ٨

∴ مجموعة الحل = {٨}

⑨ س^{٢} = ٥ س ∴ س^{٢} − ٥ س = ٠

∴ س (س − ٥) = ٠ ∴ س = ٠ (مرفوض)

أ، س = ٥

∴ مجموعة الحل = {٥}

⑩ س$^{٥ س}$ = س^{٦} ∴ ٥ س = ٦

∴ س = $\frac{٦}{٥}$ مع ملاحظة أن س ∈ ح$^{+}$ − {١}

∴ مجموعة الحل = {$\frac{٦}{٥}$}

⑪ لو$_{٣}$ لو$_{س}$ ٢٧ = ٩^{٠} = ١ ∴ لو$_{س}$ ٢٧ = ٣

∴ س^{٣} = ٢٧ = ٣^{٣} ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٢}

⑫ س = س^{٢} − ١٢

∴ س^{٢} − س − ١٢ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ٣) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = −٣ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٤}

⑬ س = $\sqrt{س - ٢}$ + ٢

∴ $\sqrt{س - ٢}$ = س − ٢ وبتربيع الطرفين

∴ س − ٢ = س^{٢} − ٤ س + ٤

∴ س^{٢} − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٢ ، ٣}

(١٤) $($لو$_{٣}$ س$)^{٢}$ − ٨ لو$_{٣}$ س + ١٥ = ٠

∴ (لو$_{٣}$ س − ٥) (لو$_{٣}$ س − ٣) = ٠

∴ لو$_{٣}$ س = ٥ أ، لو$_{٣}$ س = ٣

∴ س = $٣^{٥}$ = ٢٤٣ أ، س = $٣^{٣}$ = ٢٧

∴ مجموعة الحل = {٢٤٣ ، ٢٧}

٦

(١) $٤^{س}$ = ٨$\sqrt{٢}$ ∴ $٢^{٢س} = ٢^{\frac{٧}{٢}}$

∴ ٢س = $\frac{٧}{٢}$ ∴ س = $\frac{٧}{٤}$

(٢) $(\sqrt{٥})^{س^{٢}}$ = ٦٢٥$\sqrt{٥}$ = $(\sqrt{٥})^{٩}$

∴ $س^{٢}$ = ٩ ∴ س = ± ٣

(٣) $(٠,٣)^{س^{-٢}}$ = ٠,٠٩ = $(٠,٣)^{٢}$

∴ $س^{-٢}$ = ٢ ∴ $س^{٢} = \frac{١}{٢}$

∴ س = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(٤) لو$_{٢}$ $(٢^{س} − ٤)$ = ٥ − س

∴ $٢^{٥ − س} = ٢^{س}$ − ٤ بالضرب × $٢^{س}$

∴ $٢^{٥} = ٢^{٢س}$ − ٤ × $٢^{س}$

∴ $٢^{٢س}$ − ٤ × $٢^{س}$ − ٣٢ = ٠

∴ $(٢^{س} − ٨) (٢^{س} + ٤)$ = ٠

∴ $٢^{س}$ = ٨ أ، $٢^{س}$ = −٤ (مرفوض)

∴ $٢^{س} = ٢^{٣}$ ∴ س = ٣

(٥) $٤^{٢}$ = ١٣ + لو$_{٢}$ (س − ١)

∴ لو$_{٢}$ (س − ١) = ٣ ∴ $٢^{٣}$ = س − ١

∴ س = ٩

(٦) ٣ = $\frac{س^{٢}}{٢س − ٣}$ ∴ $س^{٢}$ − ٦ س + ٩ = ٠

∴ $(س − ٣)^{٢}$ = ٠ ∴ س = ٣

٧

(١) ٠,٤٩٨٣ (٢) ٤,٧٥٤٩ (٣) −٢,١٨٩٣

٨

(١) ١,٧١٥٩ (٢) ٢٥,٨٢٢٦ (٣) ٠,٠٥٠١٢

٩

(١) ∵ لو$_{س}$ ١٦ = ص ∴ $س^{ص}$ = ١٦

وبالتعويض فى المعادلة الأولى

∴ ١٦ = ٥ س − ٤ ∴ س = ٤

∴ لو$_{٤}$ ١٦ = ص ∴ $٤^{ص} = ١٦ = ٤^{٢}$

∴ ص = ٢

∴ مجموعة الحل = {(٤ ، ٢)}

(٢) ∵ لو$_{ص}$ ٩ = ١ ∴ ص = ٩

∴ لو$_{س}$ لو$_{٢}$ لو$_{س}$ ٩ = ٠

∴ لو$_{٢}$ لو$_{س}$ ٩ = $س^{٠}$ = ١ ∴ لو$_{س}$ ٩ = ٢

∴ $س^{٢}$ = ٩ ∴ س = ٣ (ويرفض الحل السالب)

∴ مجموعة الحل = {(٣ ، ٩)}

١٠

∵ لو$_{١٦}$ ٤٩ = أ ∴ $(١٦)^{أ}$ = ٤٩

∴ $(٤^{٢})^{أ} = ٧^{٢}$ ∴ $(٤^{أ})^{٢} = ٧^{٢}$

∴ $٤^{أ}$ = ٧

، ∵ لو$_{٧}$ ٢,٥ = ب ∴ $٧^{ب}$ = ٢,٥

∴ $٤^{أب + ١} = ٤^{أب} × ٤ = (٤^{أ})^{ب} × ٤ = ٧^{ب} × ٤$

= ٢,٥ × ٤ = ١٠

١١

(١) ٢ س + ١ > ٠ ∴ س > $-\frac{١}{٢}$

∴ مجال الدالة =]$-\frac{١}{٢}$ ، ∞[

(٢) س > ٠ ∴ مجال الدالة =]٠ ، ∞[

(٣) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن {س > ٠ ، س ≠ ١}

أى أن : مجال الدالة =]٠ ، ∞[− {١}

(٤) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

{س > ٠ ، س − ٢ > ٠ ، س − ٢ ≠ ١} أى أن : {س > ٠ ، س > ٢ ، س ≠ ٣}

أى أن : مجال الدالة =]٢ ، ∞[− {٣}

(٥) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

{س > ٠ ، ٢ − س > ٠ ، ٢ − س ≠ ١} أى أن : {س > ٠ ، س < ٢ ، س ≠ ١}

أى أن : مجال الدالة =]٠ ، ٢[− {١}

(٦) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق

{س − ٣ > ٠ ، ٥ − س > ٠ ، ٥ − س ≠ ١} أى أن : {س > ٣ ، س < ٥ ، س ≠ ٤}

أى أن : مجال الدالة =]٣ ، ٥[− {٤}

(٧) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق

{$س^{٢}$ > ٠ ، س − ٣ > ٠ ، س − ٣ ≠ ١} أى أن : {$س^{٢}$ > ٠ ، س > ٣ ، س ≠ ٤}

أى أن : مجال الدالة =]٣ ، ∞[− {٤}

(٨) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق

{٢ س + ١ > ٠ ، س + ٢ > ٠ ، س + ٢ ≠ ١} أى أن : {س > $-\frac{١}{٢}$ ، س > −٢ ، س ≠ −١}

أى أن : مجال الدالة =]$-\frac{١}{٢}$ ، ∞[

(٩) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق

(٣ − س) (س + ١) > ٠

(٣ − س)(س + ١) : − − − صفر + + + + + + صفر − − −

أى أن : مجال الدالة =]−١ ، ٣[

(١٠) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق

{(٣ − س) (س + ١) > ٠ ، س > ٠ ، س ≠ ١}

(٣ − س)(س + ١) : − − − صفر + + + + + + صفر − − −

أى أن : مجال الدالة =]٠ ، ٣[− {١}

١٢

∵ منحنى الدالة يمر بالنقطة (٨١ ، ٤)

∴ ٤ = لو$_{أ}$ ٨١ ∴ $أ^{٤}$ = ٨١

∴ أ = ٣ (ويرفض الحل السالب)

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
د(س)	−٢	−١	٠	١	٢

من الرسم :

المجال = $ح^{+}$ ، المدى = ح

والدالة تزايدية على مجالها

، نقطة التقاطع مع محور السينات (١ ، ٠)

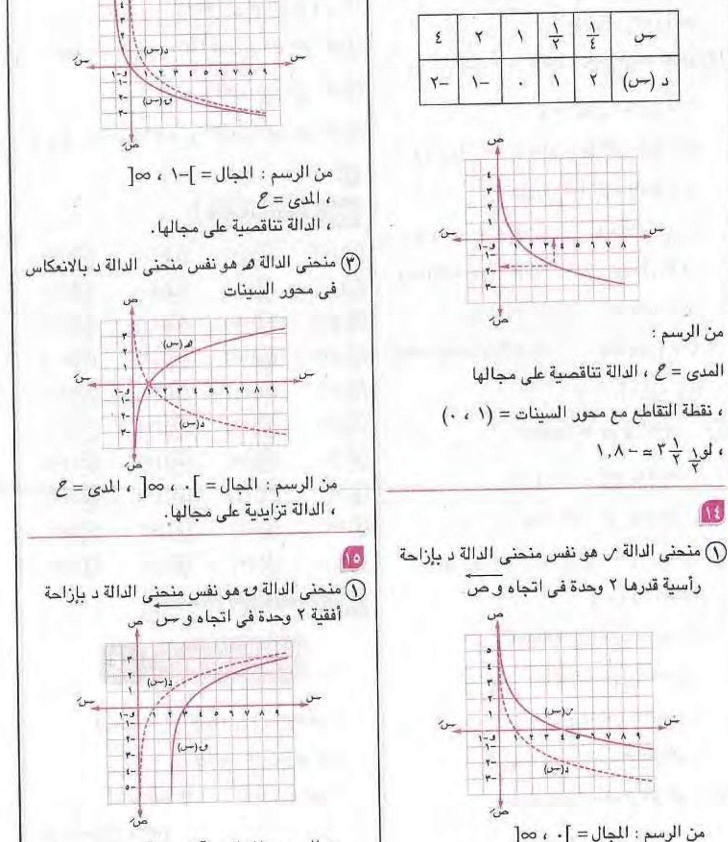
، لو$_{٣}$ ٥ ≃ ١,٥

١٣

$\because$ منحنى الدالة يمر بالنقطة $\left(\frac{1}{8} \text{ ، } 3\right)$

$\therefore 3 = \text{لو}_{\text{ٍ}} \frac{1}{8}$ $\qquad \therefore \text{ٍ}^3 = \frac{1}{8}$ $\qquad \therefore \text{ٍ} = \frac{1}{2}$

س	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤
د (س)	٢	١	٠	١-	٢-



من الرسم :

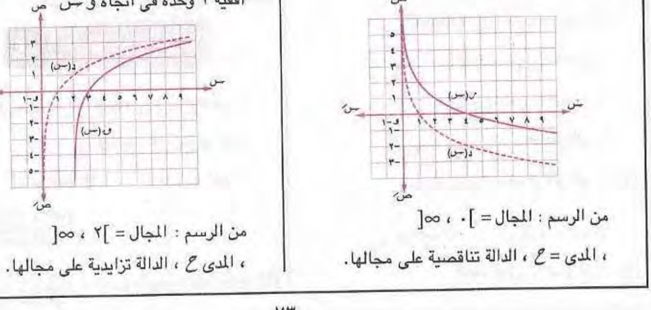
المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها

، نقطة التقاطع مع محور السينات = (١ ، ٠)

، $\text{لو}_{\frac{1}{2}} 3 \simeq -1{,}8$

١٤

(١) منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$



من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها.

(٢) منحنى الدالة ى هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها وحدة واحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

من الرسم : المجال =]-١ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تناقصية على مجالها.

(٣) منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د بالانعكاس فى محور السينات

من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[، المدى = ح

، الدالة تزايدية على مجالها.

١٥

(١) منحنى الدالة ى هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

من الرسم : المجال =]٢ ، ∞[

، المدى ح ، الدالة تزايدية على مجالها.

(٢) منحنى الدالة ت هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة وحدة واحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح ، الدالة تزايدية على مجالها.

(٣) منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د بانعكاس حول محور السينات

من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها.

(٤) منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بانعكاس حول محور الصادات

من الرسم :

، المجال =]-∞ ، ٠[

، المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها.

١٦

من الرسم نجد أن مجموعة الحل = {٤}

١٧

من الرسم نجد أن مجموعة الحل = {٣}

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (ب) (٢) (د) (٣) (أ) (٤) (ب)

(٥) (جـ) (٦) (أ) (٧) (ب) (٨) (د)

إرشادات الحل :

(١) $\because$ $\text{د}^{-1}(5) = 14$ $\qquad \therefore$ د (١٤) = ٥

$\therefore \text{لو}_{\text{ٍ}} (2 \times 14 + 4) = 5$

$\therefore \text{ٍ}^5 = 32$ $\qquad \therefore \text{ٍ} = 2$

(٢) $\because$ $\text{د}^{-1}(\text{ٍ} + 3) = 32$

$\therefore$ د (٣٢) = ٍ + ٣ $\qquad \therefore \text{لو}_4 32 = \text{ٍ} + 3$

$\therefore 4^{\text{ٍ}+3} = 32$ $\qquad \therefore 2^{2\text{ٍ}+6} = 2^5$

$\therefore 2\text{ٍ} + 6 = 5$ $\qquad \therefore \text{ٍ} = -\frac{1}{2}$

(٣) (د ∘ ر) (١٠) = د (ر (١٠))

= د (٧) = $\text{لو}_2 8 = 3$

④ ∵ لو (س − ٥) > صفر

∴ س − ٥ > ١ ∴ س > ٦

⑤ ∵ لو$_{٣}$ لو$_{٢}$ ||س − ١| + ٥| = ١

∴ لو$_{٢}$ ||س − ١| + ٥| = ٣

∴ ||س − ١| + ٥| = ٨

∴ |س − ١| + ٥ = ± ٨

∴ |س − ١| = −١٣ (مرفوض)

أ، |س − ١| = ٣

∴ س − ١ = ± ٣ ∴ س = ١ ± ٣

∴ س = ٤ أ، س = −٢

∴ مجموعة الحل = {−٢ ، ٤}

⑥ ∵ منحنى الدالة يمر بالنقطتين

(١١ ، ٣) ، (٤ ، ٠)

∴ د (٤) = صفر ∴ لو$_{م}$ (٤ + ب) = صفر

∴ ٤ + ب = ١ ∴ ب = −٣

، د (١١) = ٣ ∴ لو$_{م}$ (١١ + ب) = ٣

∴ ١١ + ب = م^{٣} ∴ م^{٣} = ٨ ∴ م = ٢

∴ د (س) = لو$_{٢}$ (س − ٣)

∴ د (٧) = لو$_{٢}$ (٧ − ٣) = ٢ ، د$^{-١}$ (٢) = ٧

∴ د (٧) + د$^{-١}$ (٢) = ٩

⑦ لإيجاد مجال الدالة د (س) = لو |س^{٢} − ٩|

نضع |س^{٢} − ٩| > ٠

أي أن : |(س − ٣) (س + ٣)| > ٠

س ∈ ح − {٣ ، −٣}

∴ مجال الدالة د = ح − {٣ ، −٣}

⑧ لإيجاد مجال الدالة د (س) = $\frac{\text{لو}_{٣} (س + ٣)}{س^{٢} + ٣س + ٢}$

= $\frac{\text{لو}_{٣} (س + ٣)}{(س + ١)(س + ٢)}$

∴ س + ٣ > ٠ ∴ س > −٣

، س ≠ −١ ، س ≠ −٢

∴ المجال =]−٣ ، ∞[− {−١ ، −٢}

إجابات تمارين 11

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (جـ)	③ (ب)	④ (أ)
⑤ (جـ)	⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)
⑨ (جـ)	⑩ (أ)	⑪ (ب)	⑫ (جـ)
⑬ (جـ)	⑭ (جـ)	⑮ (جـ)	⑯ (جـ)
⑰ (ب)	⑱ (ب)	⑲ (د)	⑳ (ب)
㉑ (جـ)	㉒ (أ)	㉓ (ب)	㉔ (ب)
㉕ (جـ)	㉖ (ب)	㉗ (جـ)	㉘ (أ)
㉙ (د)	㉚ (جـ)	㉛ (أ)	㉜ (د)
㉝ (أ)	㉞ (أ)	㉟ (د)	㊱ (أ)
㊲ (جـ)	㊳ (د)	㊴ (د)	㊵ (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① لو$_{٣}$ ٨١ × لو$_{٩}$ ٣ = لو$_{٣}$ ٣^{٤} × لو$_{٩}$ ٩$^{\frac{١}{٢}}$ = ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٢

② لو$_{٢}$ $\frac{١٤ × ١٥}{١٠٥}$ = لو$_{٢}$ ٢ = ١

③ لو$_{٤}$ لو$_{٢}$ لو$_{٣}$ ٣^{٢} = لو$_{٤}$ لو$_{٢}$ ٢ = لو$_{٤}$ ١ = صفر

④ ١ + لو ٣ − لو ٢ − لو ١٥

= ١ + لو $\left(\frac{٣}{١٥ × ٢}\right)$ = ١ + لو $\frac{١}{١٠}$

= ١ + لو (١٠)$^{-١}$ = ١ − ١ = صفر

⑤ ٢ لو ٢٥ + لو $\left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٥}\right)$ + ٢ لو ٣ − لو ٣٠

= لو ٦٢٥ + لو $\frac{٨}{١٥}$ + لو ٩ − لو ٣٠

= لو $\left(٦٢٥ × \frac{٨}{١٥} × ٩ × \frac{١}{٣٠}\right)$ = لو ١٠٠ = ٢

⑥ لو ٢٥ + $\frac{\text{لو} ٨ × \text{لو} ١٦}{\text{لو} ٦٤}$ = لو ٢٥ + $\frac{٣ \text{ لو } ٢ × ٤ \text{ لو } ٢}{٦ \text{ لو } ٢}$

= لو ٢٥ + ٢ لو ٢

= لو ٢٥ + لو ٤

= لو (٢٥ × ٤)

= لو ١٠٠ = ٢

⑦ $\frac{\text{لو}_{٢} ٢٥ + \text{لو}_{٢} ٤}{\text{لو}_{٢} ٣٠ − \text{لو}_{٢} ٣}$ = $\frac{\text{لو}_{٢} (٢٥ × ٤)}{\text{لو}_{٢} \frac{٣٠}{٣}}$

= $\frac{\text{لو}_{٢} ١٠٠}{\text{لو}_{٢} ١٠}$ = $\frac{٢ \text{ لو}_{٢} ١٠}{\text{لو}_{٢} ١٠}$ = ٢

⑧ $\frac{(\text{لو} ٣)^{٢} − \text{لو} ٣^{٢}}{\text{لو} ٣ − \text{لو} ١٠٠}$ = $\frac{(\text{لو} ٣)^{٢} − ٢ \text{ لو } ٣}{\text{لو} ٣ − ٢ \text{ لو } ١٠}$

= $\frac{\text{لو} ٣ (\text{لو} ٣ − ٢)}{(\text{لو} ٣ − ٢)}$ = لو ٣

⑨ لو$_{٥}$ $\frac{\text{لو}_{٢} ٣ − \text{لو}_{٢} ٢}{\text{لو}_{٢} \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٥}}$ = لو$_{٥}$ $\frac{\text{لو}_{٢} \frac{٣}{٢}}{٥ \text{ لو}_{٢} \frac{٣}{٢}}$ = لو$_{٥}$ $\frac{١}{٥}$ = −١

⑩ لو$_{٣}$ $\frac{\text{لو} س^{١٨}}{\text{لو} س^{٢}}$ = لو$_{٣}$ $\frac{١٨ \text{ لو } س}{٢ \text{ لو } س}$ = لو$_{٣}$ ٩ = ٢

⑪ لو$_{أ ب حـ}$ أ + لو$_{أ ب حـ}$ ب + لو$_{أ ب حـ}$ حـ

= لو$_{أ ب حـ}$ أ ب حـ = ١

⑫ $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ أ + $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ ب + ٢ لو$_{٣}$ حـ

− لو$_{٣}$ $\sqrt{أ ب}$ − لو$_{٣}$ ٣ حـ^{٢}

= لو$_{٣}$ أ$^{\frac{١}{٢}}$ + لو$_{٣}$ ب$^{\frac{١}{٢}}$ + لو$_{٣}$ حـ^{٢} − لو$_{٣}$ $\sqrt{أ ب}$

− (لو$_{٣}$ ٣ + لو$_{٣}$ حـ^{٢})

= لو$_{٣}$ $\sqrt{أ}$ + لو$_{٣}$ $\sqrt{ب}$ + لو$_{٣}$ حـ^{٢} − لو$_{٣}$ $\sqrt{أ ب}$

− لو$_{٣}$ ٣ − لو$_{٣}$ حـ^{٢}

= لو$_{٣}$ $\sqrt{أ ب}$ − لو$_{٣}$ $\sqrt{أ ب}$ − ١ = −١

⑬ $\frac{١}{\text{لو}_{٢} ١٢}$ + $\frac{١}{\text{لو}_{٨} ١٢}$ + $\frac{١}{\text{لو}_{٩} ١٢}$

= لو$_{١٢}$ ٢ + لو$_{١٢}$ ٨ + لو$_{١٢}$ ٩

= لو$_{١٢}$ (٢ × ٨ × ٩) = لو$_{١٢}$ ١٤٤ = لو$_{١٢}$ (١٢)^{٢}

= ٢ لو$_{١٢}$ (١٢) = ٢

٢

① الطرف الأيمن = لو$_{٣}$ $\frac{(١٥)^{٢} × ٧}{٣ × ١٧٥}$ = لو$_{٣}$ ٣

= لو$_{٣}$ $\left(\sqrt{٣}\right)^{٢}$ = ٢ لو$_{٣}$ $\sqrt{٣}$

② الطرف الأيمن = لو$_{٣}$ $\frac{٣ × ٢٩٧}{١١ × ٩٨}$ − ٢ لو$_{٣}$ $\frac{٩}{٧}$

= لو$_{٣}$ $\frac{٣ × ٢٩٧ × ٧^{٢}}{١١ × ٩٨ × ٩^{٢}}$ = لو$_{٣}$ $\frac{١}{٣}$ = −١

③ الطرف الأيمن = (لو ١٠ − لو ٥) (لو ١٠٠ − لو ٢٥)

= $\left(\text{لو } \frac{١٠}{٥}\right) \left(\text{لو } \frac{١٠٠}{٢٥}\right)$ = (لو ٢) (لو ٤)

= (لو ٢) (٢ لو ٢) = ٢ (لو ٢)^{٢}

④ الطرف الأيمن = $\frac{\text{لو} ٣^{٦} − \text{لو} ٢^{٦}}{\text{لو} ٣^{٢} − \text{لو} ٢^{٢}}$ = $\frac{٦ \text{ لو } ٣ − ٦ \text{ لو } ٢}{٢ \text{ لو } ٣ − ٢ \text{ لو } ٢}$

= $\frac{٦ (\text{لو} ٣ − \text{لو} ٢)}{٢ (\text{لو} ٣ − \text{لو} ٢)}$ = ٣

⑤ الطرف الأيمن = $\frac{(\text{لو} ٥)^{٢} − ٢ \text{ لو } ٥}{\text{لو} ٥ − ٢}$

= $\frac{(\text{لو} ٥)(\text{لو} ٥ − ٢)}{\text{لو} ٥ − ٢}$ = لو ٥

، الطرف الأيسر = لو ١٠ − لو ٢ = لو $\frac{١٠}{٢}$ = لو ٥

∴ الطرفان متساويان.

⑥ الطرف الأيمن = $\frac{\text{لو}_{٣} \text{لو}_{٥} \text{لو}_{٣} ٣^{٥}}{\text{لو}_{٧} \text{لو}_{٣} \text{لو}_{٣} ٩^{٢}}$ = $\frac{\text{لو}_{٣} \text{لو}_{٥} ٥}{\text{لو}_{٧} \text{لو}_{٣} ٩}$

= $\frac{\text{لو}_{٣} ١}{\text{لو}_{٧} ٢}$ = صفر





البحتة

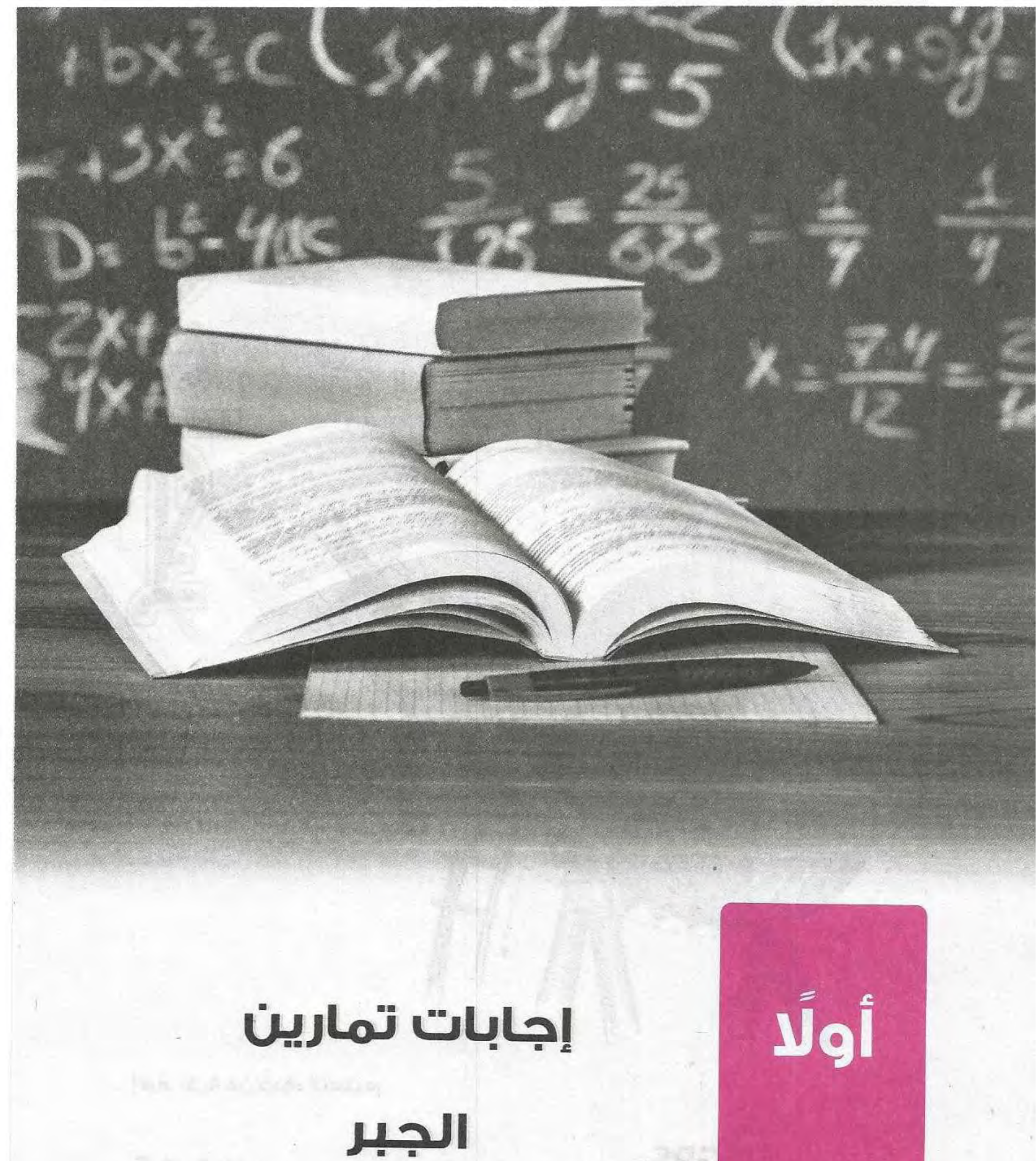


إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثاني الثانوي

القسم العلمي

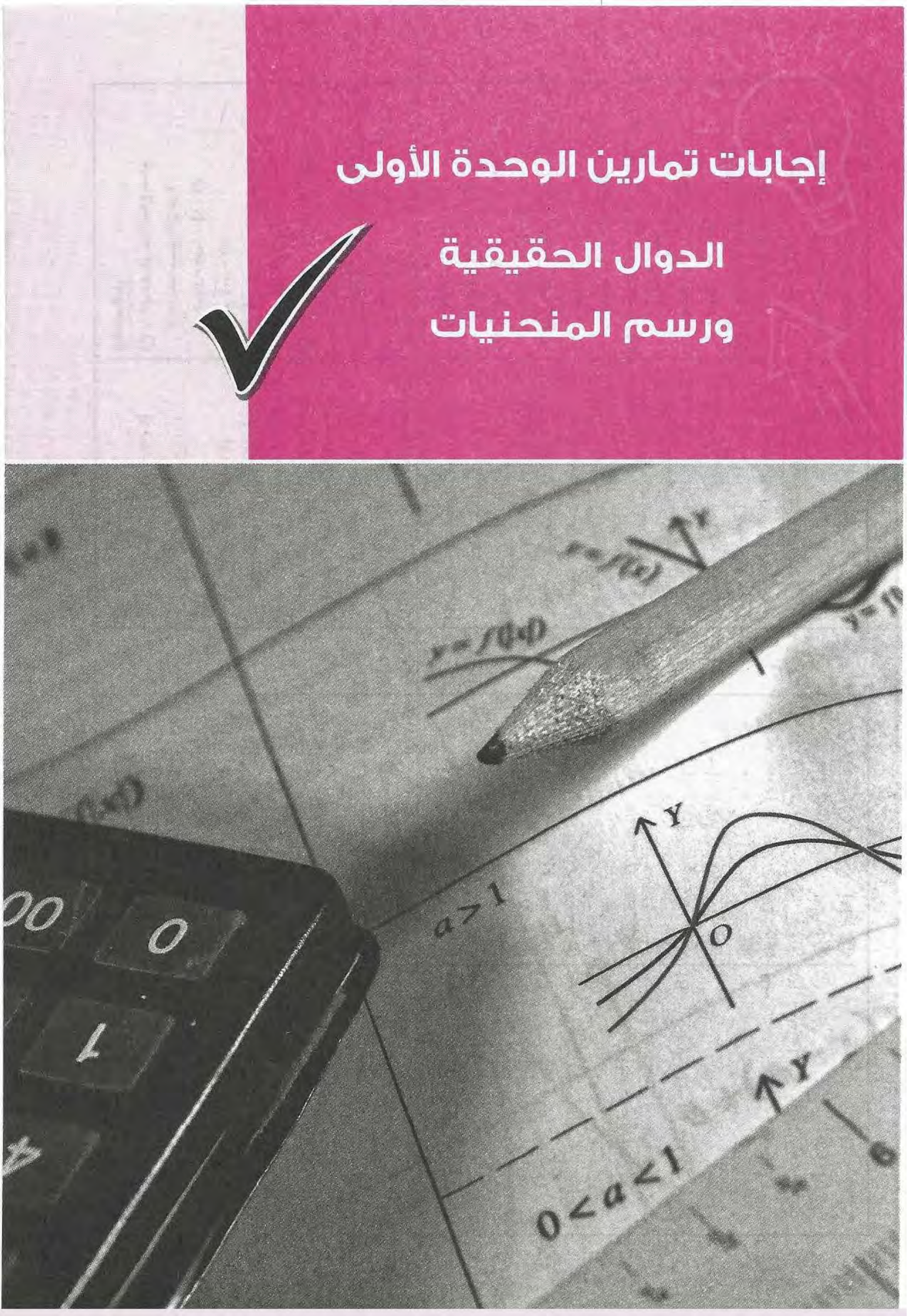
الفصل الدراسي الأول



أولًا

إجابات تمارين

الجبر


إجابات تمارين الوحدة الأولى
الدوال الحقيقية
ورسم المنحنيات
Y
O
a>1
0<a<1

إجابات الوحدة الأولى

إجابات تمارين المتطلبات القبلية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (ب)	③ (د)	④ (جـ)
⑤ (جـ)	⑥ (أ)	⑦ (جـ)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

∵ د (س) = أ² س² + ١٠ أ س + ٢٥

، ر (س) = ٩ س² + ٣٠ س + حـ − ٤

، د (س) = ر (س)

∴ ١٠ أ = ٣٠   ∴ أ = ٣

، حـ − ٤ = ٢٥   ∴ حـ = ٢٩

٢

① ∵ أ + ب = ٥   (١) ، أ + حـ = ٣   (٢)

، ب = −٢ وبالتعويض عن قيمة ب فى (١)

∴ أ − ٢ = ٥

∴ أ = ٧ وبالتعويض عن قيمة أ فى (٢)

∴ ٧ + حـ = ٣   ∴ حـ = −٤

② ∵ أ + ب = ١   (١) ، أ + حـ = ٠   (٢)

، ب = −٢   ∴ أ − ٢ = ١   ∴ أ = ٣

، ٣ + حـ = ٠   ∴ حـ = −٣

③ ∵ أ + ٢ ب = ٧   (١)

، −حـ = ٥   ∴ حـ = −٥ ، أ − ب = ٤   (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ب = ١ ، أ = ٥

إجابات تمارين 1

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)	② (د)	③ (د)	④ (جـ)
⑤ (أ)	⑥ (د)	⑦ (ب)	⑧ (أ)
⑨ (د)	⑩ (جـ)	⑪ (ب)	⑫ (جـ)
⑬ (د)	⑭ (جـ)	⑮ (ب)	⑯ (ب)
⑰ (د)	⑱ (أ)	⑲ (د)	⑳ (د)
(٢١) (ب)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (جـ)
(٢٥) (د)	(٢٦) (ب)	(٢٧) (جـ)	(٢٨) (د)
(٢٩) (جـ)	(٣٠) (د)	(٣١) (جـ)	(٣٢) (د)
(٣٣) (د)	(٣٤) (ب)	(٣٥) (جـ)	
(٣٦) أولًا : (ب)		ثانيًا : (جـ)	(٣٧) (ب)
(٣٨) (د)	(٣٩) (جـ)		

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① دالة   ② ليست دالة   ③ دالة

④ ليست دالة   ⑤ دالة   ⑥ دالة

⑦ ليست دالة   ⑧ دالة   ⑨ دالة

٢

① ليست دالة   ② ليست دالة   ③ دالة

٣

① ح − {١ ، ٢}   ② ح − {٣}

③ ح − {١ ، $\frac{-٢}{٣}$}   ④ ح − {−١}

٤

① ح − {$\frac{٥}{٢}$}   ②]٣ ، ∞[

③]−∞ ، ١[④ ح −]−٤ ، ٤[

⑤]−٣ ، ٣[⑥ ح

⑦ ح − {٢}   ⑧ [٠ ، ∞[− {١}

٥

① ح   ②]−∞ ، ٤[

③ [٠ ، ٦]

٦

① المجال = ح ، المدى = {−٢ ، ٣}

، الدالة ثابتة فى]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

② المجال = ح − {٠} ، المدى = ح − [−٢ ، ٢]

، الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

③ المجال = ح − {١} ، المدى =]−٢ ، ∞[

، الدالة تناقصية فى]−∞ ، ١[

، تزايدية فى]١ ، ∞[

④ المجال = ح − {٢} ، والمدى = ح − {٢}

، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

⑤ المجال = ح − {−١ ، ٢} ، المدى = {٣}

، الدالة ثابتة على مجالها.

⑥ المجال = ح −]٠ ، ١]

، المدى =]٣ ، ∞[⋃ {٢} ، الدالة ثابتة فى]−∞ ، ٠[وتزايدية فى]١ ، ∞[

⑦ المجال = ح ، المدى =]−∞ ، ٤]

، الدالة تزايدية فى]−∞ ، −٢[،]٠ ، ٢[وتناقصية فى]−٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[

⑧ المجال = ح ، المدى = ح −]١ ، ٢]

، الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[،]١ ، ∞[وتزايدية فى]٠ ، ١[

⑨ المجال = [−٢ ، ∞[، المدى = [٠ ، ∞[

، الدالة تزايدية فى]−٢ ، ٠[.

وتناقصية فى]٠ ، ٢[،]٢ ، ∞[

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (د)	② (د)	③ (د)
④ (جـ)	⑤ (أ)	⑥ (د)

إرشادات الحل :

① ∵ س تدل على عدد أضلاع مضلع

∴ س عدد صحيح أكبر من ٢

∴ المجال = ص⁺ − {١ ، ٢}

② بوضع ∛س − ٢ = ٠

∴ ∛س = ٢   ∴ س = ٨

∴ المجال = ح − {٨}

③ ∵ ٣ س ≥ ٠   ∴ س ≥ ٠

∴ س ∈ [٠ ، ∞[

بوضع √٣س − س = ٠   ∴ √٣س = س

∴ ٣ س = س²   ∴ س² − ٣ س = ٠

∴ س (س − ٣) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = ٣

∴ المجال =]٠ ، ∞[− {٣}

④ ∵ س − ١ ≥ ٠   ∴ س ≥ ١

∴ س ∈ [١ ، ∞[

وبوضع √س − ١ = ٣   ∴ س − ١ = ٩

∴ س = ١٠

∴ المجال = [١ ، ∞[− {١٠}

⑤ ∵ س − ١ ≥ ٠   ∴ س ≥ ١

∴ س ∈ [١ ، ∞[

وبوضع √س − ١ + ٣ = ٠ (تعارض)

∴ المجال = [١ ، ∞[

⑥ ∵ د (س) = √−(س² − ٦ س + ٩)

= √−(س − ٣)²

∴ −(س − ٣)² ≥ ٠   ∴ (س − ٣)² ≤ ٠

وهذا لا يتحقق إلا فى حالة التساوى فقط

أى عندما س = ٣   ∴ المجال = {٣}

إجابات تمارين 2

أولاً: أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (ب)	③ (جـ)	④ (جـ)
⑤ (أ)	⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (د)	⑩ (د)	⑪ (جـ)	⑫ (جـ)
⑬ (د)	⑭ (أ)	⑮ (ب)	⑯ (د)
⑰ (ب)	⑱ (جـ)	⑲ (أ)	⑳ (جـ)
(٢١) (د)	(٢٢) (جـ)	(٢٣) (ب)	(٢٤) (ب)
(٢٥) (جـ)	(٢٦) (د)	(٢٧) (د)	(٢٨) (أ)
(٢٩) (ب)	(٣٠) (أ)	(٣١) (ب)	(٣٢) (أ)
(٣٣) (جـ)	(٣٤) (جـ)	(٣٥) (أ)	(٣٦) (جـ)
(٣٧) (ب)	(٣٨) (د)	(٣٩) (جـ)	(٤٠) (ب)
(٤١) (ب)	(٤٢) (ب)		

ثانيًا: الأسئلة المقالية

١

① (د + ر) (سـ) = سـ^{٢} − ١٦

، المجال = [−٤ ، ٨] ∩ [−٧ ، ٤] = [−٤ ، ٤]

② (د − ر) (سـ) = سـ^{٢} − ٢ سـ − ٨

، المجال = [−٤ ، ٤]

③ (د . ر) (سـ) = (سـ − ٤) (سـ^{٢} − سـ − ١٢)

، المجال = [−٤ ، ٤]

④ $(\frac{د}{ر})$ (سـ) = (سـ^{٢} − سـ − ١٢) / (سـ − ٤)

= (سـ − ٤) (سـ + ٣) / (سـ − ٤) = سـ + ٣

، المجال = [−٤ ، ٤[

⑤ $(\frac{ر}{د})$ (سـ) = (سـ − ٤) / ((سـ − ٤) (سـ + ٣)) = ١ / (سـ + ٣)

، المجال = [−٤ ، ٤[− {−٣}

٢

د (سـ) = سـ^{٢} − ٤ ومجال د = ح

، ر (سـ) = $\sqrt{\text{سـ} - ١}$ ومجال ر = [١ ، ∞[

∴ المجال المشترك = [١ ، ∞[

① (د + ر) (سـ) = سـ^{٢} − ٤ + $\sqrt{\text{سـ} - ١}$

، المجال = [١ ، ∞[

، (د . ر) (سـ) = (سـ^{٢} − ٤) ($\sqrt{\text{سـ} - ١}$)

، المجال = [١ ، ∞[

، $(\frac{د}{ر})$ (سـ) = (سـ^{٢} − ٤) / $\sqrt{\text{سـ} - ١}$ ، المجال =]١ ، ∞[

، $(\frac{ر}{د})$ (سـ) = $\sqrt{\text{سـ} - ١}$ / (سـ^{٢} − ٤)

، المجال = [١ ، ∞[− {٢}

② (د + ر) (٥) = ٥^{٢} − ٤ + $\sqrt{٥ - ١}$ = ٢٣

، (د . ر) (٢) = (٢^{٢} − ٤) ($\sqrt{٢ - ١}$) = صفر

، $(\frac{د}{ر})$ (٣) = (٣^{٢} − ٤) / $\sqrt{٣ - ١}$ = ٥$\sqrt{٢}$ / ٢

، $(\frac{ر}{د})$ (−٢) غير معرفة لأن −٢ ∌ المجال

٣

أولاً :

① (د + ر) (سـ) = سـ^{٢} − ٤ سـ + $\sqrt{\text{سـ} + ٢}$

، المجال = ح ∩ [−٢ ، ∞[= [−٢ ، ∞[

② (ر − ع) (سـ) = $\sqrt{\text{سـ} + ٢}$ − $\sqrt{٤ - \text{سـ}}$

، المجال = [−٢ ، ∞[∩]−∞ ، ٤] = [−٢ ، ٤]

③ (د . ع) (سـ) = (سـ^{٢} − ٤ سـ) ($\sqrt{٤ - \text{سـ}}$)

، المجال = ح ∩]−∞ ، ٤] =]−∞ ، ٤]

④ $(\frac{ع}{د})$ (سـ) = $\sqrt{٤ - \text{سـ}}$ / (سـ^{٢} − ٤ سـ) = $\sqrt{٤ - \text{سـ}}$ / (سـ (سـ − ٤))

، المجال =]−∞ ، ٤[− {٠}

ثانيًا :

① (ر − ع) (١) = $\sqrt{١ + ٢}$ − $\sqrt{٤ - ١}$ = صفر

② (د . ع) (٥) غير معرفة لأن ٥ ∌ المجال

③ $(\frac{ع}{د})$ (٣) = $\sqrt{٤ - ٣}$ / (٣^{٢} − ٤ × ٣) = −$\frac{١}{٣}$

٤

① ح − {٠ ، −٢}
② ح − {−١ ، ١}
③]−∞ ، ١[
④]$\frac{١}{٢}$ ، ∞[
⑤ [٢ ، ∞[
⑥ [٤ ، ∞[− {٦}
⑦ [٣ ، ∞[
⑧]٥ ، ∞[

٥

① (د . ر) (سـ) = { سـ^{٢} − ٢ سـ ، سـ ≥ ٢ ؛ −سـ^{٢} + ٢ سـ ، سـ < ٢ }

، والمجال = ح

② $(\frac{د}{ر})$ (سـ) = { ١ − $\frac{٢}{\text{سـ}}$ ، سـ ≥ ٢ ؛ −١ + $\frac{٢}{\text{سـ}}$ ، سـ < ٢ ، سـ ≠ ٠ }

، والمجال = ح − {٠}

③ $(\frac{ر}{د})$ (سـ) = { سـ / (سـ − ٢) ، سـ > ٢ ؛ سـ / (−سـ + ٢) ، سـ < ٢ }

، والمجال = ح − {٢}

٦

① ح −]٣ ، ٥]
② [٢ ، ∞[− {٣}
③ [−٢ ، ∞[− {٧ ، −١}
④ ح − {١ ، ٢ ، $\frac{٧}{٤}$}

٧

① (د ∘ ر) (٢) = د (ر (٢)) = د (٢^{٢} − ٥)

= د (−١) = ٣ × (−١) + ١ = −٢

② (ر ∘ د) (−٣) = ر (د (−٣)) = ر (٣ (−٣) + ١)

= ر (−٨) = (−٨)^{٢} − ٥ = ٥٩

③ (ر ∘ ق) (١) = ر (ق (١)) = ر (١^{٣})

= ر (١) = ١^{٢} − ٥ = −٤

④ (ق ∘ د) (−٢) = ق (د (−٢)) = ق (٣ (−٢) + ١)

= ق (−٥) = (−٥)^{٣} = −١٢٥

٨

① (د ∘ ر) (سـ) = د (ر (سـ))

= د (سـ + ٣) = $\frac{١}{\text{سـ} + ٣}$

∵ م$_{١}$ = مجال ر = ح

، قيم سـ التى تجعل ر (سـ) فى مجال د

هى م$_{٢}$ = ح − {−٣}

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح − {−٣}

② (ر ∘ د) (سـ) = ر (د (سـ)) = ر ($\frac{١}{\text{سـ}}$)

= $\frac{١}{\text{سـ}}$ + ٣

، ∵ م$_{١}$ = مجال د = ح − {٠}

، قيم سـ التى تجعل د (سـ) فى مجال ر

هى م$_{٢}$ = ح − {٠}

∴ مجال (ر ∘ د) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح − {٠}

٩

① ∵ (د ∘ ر) (سـ) = د (ر (سـ))

= د (٣ سـ) = (٣ سـ)^{٢} + ٦

= ٩ سـ^{٢} + ٦

∴ (د ∘ ر) (٣) = ٩ × ٣^{٢} + ٦ = ٨٧

② ∵ ٩ سـ^{٢} + ٦ = ٤٢ ∴ ٩ سـ^{٢} = ٣٦

∴ سـ^{٢} = ٤ ∴ سـ = ± ٢

١٠

∵ (د ∘ ر) (سـ)

= د (ر (سـ)) = د ($\sqrt{\text{سـ} - ٢}$)

= ($\sqrt{\text{سـ} - ٢}$)^{٢} − ٣ = سـ − ٢ − ٣ = سـ − ٥

، ∵ م$_{١}$ = مجال ر = [٢ ، ∞[

، قيم سـ التى تجعل ر (سـ) فى مجال د هى م$_{٢}$ = ح

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = [٢ ، ∞[

، (د ∘ ر) (٣) = ٣ − ٥ = −٢

١١

∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د $(\frac{٢}{س - ٣})$ = $\sqrt{\frac{٢}{س - ٣} + ١}$

= $\sqrt{\frac{س - ١}{س - ٣}}$

، ∵ م$_{١}$ = مجال ر = ح − {٣}

، بوضع $\frac{س - ١}{س - ٣}$ ≥ ٠

∴ قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د هى م$_{٢}$

= ح −]١ ، ٣]

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح −]١ ، ٣]

١٢

① ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (√(٤ − س))

= √(√(٤ − س) − ٢)

، ∵ م$_{١}$ = مجال ر =]−∞ ، ٤]

، بوضع √(٤ − س) − ٢ ≥ ٠

أى √(٤ − س) ≥ ٢

أى ٤ − س ≥ ٤ أى س ≤ ٠

∴ قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د هى

م$_{٢}$ =]−∞ ، ٠]

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ =]−∞ ، ٠]

② ∵ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر (√(س − ٢))

= √(٤ − √(س − ٢))

، ∵ م$_{١}$ = مجال د = [٢ ، ∞[

، بوضع ٤ − √(س − ٢) ≥ ٠

∴ √(س − ٢) ≤ ٤

∴ س − ٢ ≤ ١٦ ∴ س ≤ ١٨

∴ قيم س التى تجعل د (س) فى مجال ر هى م$_{٢}$

=]−∞ ، ١٨]

∴ مجال (ر ∘ د) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = [٢ ، ١٨]

١٣

① ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (√(س^{٢} − ٤))

= √(√(س^{٢} − ٤) − ١)

، بوضع س^{٢} − ٤ ≥ ٠

∴ م$_{١}$ = مجال ر = ح −]−٢ ، ٢[

وبوضع √(س^{٢} − ٤) − ١ ≥ ٠

أى √(س^{٢} − ٤) ≥ ١ أى س^{٢} − ٤ ≥ ١

أى س^{٢} − ٥ ≥ ٠

، قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د هى

م$_{٢}$ = ح −]−√٥ ، √٥[

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$

= ح −]−√٥ ، √٥[

② ∵ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر (√(س − ١))

= √((√(س − ١))^{٢} − ٤)

= √(س − ١ − ٤) = √(س − ٥)

، ∵ م$_{١}$ = مجال د = [١ ، ∞[

، قيم س التى تجعل د (س) فى مجال ر هى

م$_{٢}$ = [٥ ، ∞[

∴ مجال (ر ∘ د) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = [٥ ، ∞[

١٤

د (س) = √(س − ٤) ، ر (س) = س^{٣}

(توجد حلول أخرى)

١٥

بفرض د (س) = أ س + ب

، ∵ (د ∘ د) (س) = ١٦ س + ١٥

∴ د (د(س)) = ١٦ س + ١٥

∴ د (أ س + ب) = ١٦ س + ١٥

∴ أ (أ س + ب) + ب = ١٦ س + ١٥

∴ أ^{٢} س + أ ب + ب = ١٦ س + ١٥

∴ أ^{٢} = ١٦ ومنها أ = ± ٤

، أ ب + ب = ١٥ ∴ ب = $\frac{١٥}{أ + ١}$

، عند أ = ٤ ∴ ب = ٣

، عند أ = −٤ ∴ ب = −٥

∴ د (س) = ٤ س + ٣

أ، د (س) = −٤ س − ٥

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (د) ② (د) ③ (د) ④ (جـ) ⑤ (جـ)

⑥ (د) ⑦ (أ) ⑧ (د) ⑨ (جـ)

إرشادات لحل رقم ١

① ∵ مجال د = [١ ، ∞[، مجال ر =]−∞ ، ١]

∴ مجال (د + ر) = [١ ، ∞[∩]−∞ ، ١]

= {١}

② عندما ٠ < س < ١

(د + ر) (س) = د (س) + ر (س)

= (−س + ٢) + (س + ٢) = ٤

③ (ر ∘ د) (−١) = ر (د (−١))

[لاحظ أن د (−١) = (−١)^{٢} + ١ = ٢]

= ر (٢)

= (٢)^{٢} + ٢ = ٦

④ ∵ د (ر (س)) = د (س)

∴ د (٢ س + ٣) = د (س)

∴ (٢ س + ٣)^{٢} = س^{٢}

∴ ٤ س^{٢} + ١٢ س + ٩ − س^{٢} = ٠

∴ ٣ س^{٢} + ١٢ س + ٩ = ٠

∴ س^{٢} + ٤ س + ٣ = ٠

∴ (س + ١) (س + ٣) = ٠

∴ س = −١ أ، س = −٣

∴ مجموعة الحل = {−١ ، −٣}

⑤ ∵ (د ∘ ر) (س) = ٣ س + ٢

∴ د (ر (س)) = ٣ س + ٢

∴ ٢ ر (س) + ١ = ٣ س + ٢

∴ ٢ ر (س) = ٣ س + ١

∴ ر (س) = $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$

⑥ ∵ (ر ∘ د) (س) = س + ٢

∴ ر (د (س)) = س + ٢

∴ ر (٢ س − ٣) = س + ٢

وبوضع ٢ س − ٣ = ص

∴ س = $\frac{ص + ٣}{٢}$

∴ ر (ص) = $\frac{ص + ٣}{٢}$ + ٢ = $\frac{ص + ٧}{٢}$

∴ ر (س) = $\frac{س + ٧}{٢}$

⑦ ∵ (ر ∘ د) (٠) = (د ∘ ر) (١)

∴ ر [د (٠)] = د [ر (١)]

لاحظ أن : د (٠) = ٢ ، ر (١) = $\frac{١ - ك}{٢}$

∴ ر (٢) = د $(\frac{١ - ك}{٢})$

∴ $\frac{٢ - ك}{٥}$ = $\frac{١ - ك}{٢}$ + ٢

∴ ٤ − ٢ ك = ٥ − ٥ ك + ٢٠

∴ ٣ ك = ٢١ ∴ ك = ٧

⑧ ∵ (د ∘ د ∘ د) (١)
= د (د [د (١)]) [من الرسم د (١) = ٥]
= د (د (٥)) [من الرسم د (٥) = صفر]
= د (صفر) [من الرسم د (٠) = ٢]
= ٢

⑨ (د ∘ ت) (٣) − (د ∘ ت) (٨)
= د (ت (٣)) − د (ت (٨))
= د (٢) − د (٤)
= ٤ − ٨ = −٤

٢

① (د ∘ د) (س) = د (د (س)) = د ($\frac{١}{س}$)
= ١ ÷ $\frac{١}{س}$ = س

② (د ∘ د ∘ د) (س) = د (د (د (س)))
= د (د ($\frac{١}{س}$))
= د (س) = $\frac{١}{س}$

③ نلاحظ مما سبق أن التركيب مرتين يعطى س والتركيب ثلاثة مرات يعطى $\frac{١}{س}$ وهكذا نلاحظ أن فى باقى التركيب يعطى س ثم $\frac{١}{س}$

∴ (د ∘ د ∘ د ∘ ..... إلى ن من المرات) (س)
= { س إذا كانت ن زوجية
 { $\frac{١}{س}$ إذا كانت ن فردية

إجابات تمارين 3

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (أ)	③ (أ)	④ (ب)
⑤ (أ)	⑥ (جـ)	⑦ (ب)	⑧ (ب)
⑨ (أ)	⑩ (جـ)	⑪ (أ)	⑫ (د)
⑬ (أ)	⑭ (د)	⑮ (ب)	⑯ (د)
⑰ (د)	⑱ (ب)	⑲ (جـ)	⑳ (جـ)
㉑ (أ)	㉒ (جـ)	㉓ (ب)	㉔ (جـ)
㉕ (جـ)	㉖ (ب)	㉗ (د)	㉘ (جـ)
㉙ (أ)	㉚ (جـ)	㉛ (أ)	㉜ (جـ)
㉝ (جـ)	㉞ (أ)	㉟ (أ)	㊱ (ب)
㊲ (د)	㊳ (د)	㊴ (ب)	㊵ (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

شكل (١) : متماثل حول محور السينات ومحور الصادات ونقطة الأصل
شكل (٢) : متماثل حول محور السينات
شكل (٣) : متماثل حول نقطة الأصل
شكل (٤) : متماثل حول نقطة الأصل
شكل (٥) : متماثل حول محور الصادات
شكل (٦) : متماثل حول نقطة الأصل

٢

① فردية ② ليست زوجية وليست فردية
③ زوجية ④ ليست زوجية وليست فردية
⑤ فردية ⑥ فردية

٣

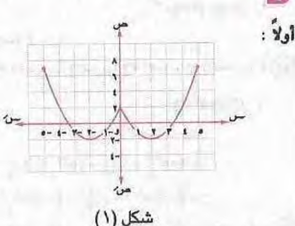
شكل (١) : د (س) = س^{٣} + س
∵ مجال د = ح والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل
∴ الدالة د فردية.
التحقيق الجبرى : لكل س ، −س ∈ ح
∵ د (−س) = (−س)^{٣} + (−س)
= −س^{٣} − س = −(س^{٣} + س)
= −د (س)

∴ الدالة فردية
شكل (٢) : د (س) = س^{٣} − ٢
∵ مجال د = ح
، المنحنى ليس متماثلاً حول محور الصادات وليس متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل.
∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.
التحقيق الجبرى : لكل س ، −س ∈ ح
∵ د (−س) = (−س)^{٣} − ٢ = −س^{٣} − ٢
= −(س^{٣} + ٢)
∴ د (−س) ≠ د (س) ≠ −د (س)
∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

شكل (٣) : د (س) = ٢ − س^{٢}
∵ مجال د = [−٢ ، ٢]
، المنحنى متماثل حول محور الصادات.
∴ الدالة د زوجية.
التحقيق الجبرى : لكل س ، −س ∈ [−٢ ، ٢]
∵ د (−س) = ٢ − (−س)^{٢}
= ٢ − س^{٢} = د (س)
∴ الدالة زوجية.

٤

أولاً :


شكل (١)

شكل (٣)

ثانيًا :

شكل (٢)

ثالثًا :

شكل (١) : المجال = [−٥ ، ٥] ، المدى = [−٢ ، ٧] ، ليست أحادية
شكل (٢) : المجال = ح − {٠}
، المدى = [−٢ ، ٢] − {٠} ، ليست أحادية
شكل (٣) : المجال = ح ، المدى = [−٣ ، ٦] ، ليست أحادية

٥

① د (−س) = ٥ = د (س) ∴ الدالة زوجية.
② د (−س) = (−س)^{٤} + (−س)^{٢} − ١
= س^{٤} + س^{٢} − ١ = د (س)
∴ الدالة زوجية.
③ د (−س) = ٣ (−س) − ٤ (−س)^{٣}
= −٣س + ٤س^{٣}
= −(٣س − ٤س^{٣}) = −د (س)
∴ الدالة فردية.

④ $د(-س) = (-س)^{٢} - ٣(-س) + ٤$

$= س^{٢} + ٣س + ٤$

$\neq د(س) \neq -د(س)$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

⑤ $د(-س) = (-س)^{٣}\left((-س)^{٢} - ١\right)$

$= -س^{٣}(س^{٢} - ١) = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

⑥ $د(-س) = (-س - ٣)^{٢} - ٧$

$= (س + ٣)^{٢} - ٧$

$\neq د(س) \neq -د(س)$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

⑦ ∵ مجال الدالة $= ح - \{٣\}$

∴ $-٣ \in$ مجال الدالة ، $٣ \notin$ مجالها

∴ الدالة ليست فردية وليست زوجية.

⑧ $د(-س) = \dfrac{٢(-س)^{٢} - (-س)^{٥}}{-س}$

$= \dfrac{٢س^{٢} + س^{٥}}{-س}$

$= \dfrac{-(٢س^{٢} - س^{٥})}{-س}$

$= \dfrac{٢س^{٢} - س^{٥}}{س} = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

⑨ ∵ مجال د $= [-٣ ، \infty[$

∴ لكل $س \in [-٣ ، \infty[$

ليس بالضرورة أن يوجد $-س \in [-٣ ، \infty[$

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

⑩ $د(-س) = \left((-س)^{٢} + ١\right)^{٣} = (س^{٢} + ١)^{٣}$

$= د(س)$

∴ الدالة زوجية.

⑪ $د(-س) = \sqrt{(-س)^{٢} + ٦} = \sqrt{س^{٢} + ٦} = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

⑫ $د(-س) = \sqrt[٣]{(-س)^{٣} + (-س)}$

$= \sqrt[٣]{-(س^{٣} + س)} = -\sqrt[٣]{س^{٣} + س}$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

⑬ $د(-س) = (-س)^{٣} - \dfrac{١}{-س}$

$= -س^{٣} + \dfrac{١}{س}$

$= -\left(س^{٣} - \dfrac{١}{س}\right) = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

⑭ $د(-س) = \left(-س - \dfrac{٢}{-س}\right)^{٣}$

$= \left(-\left(س - \dfrac{٢}{س}\right)\right)^{٣}$

$= -\left(س - \dfrac{٢}{س}\right)^{٣} = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

⑮ $د(-س) = \left(\dfrac{(-س)^{٢}}{٣} - \dfrac{٥}{(-س)^{٤}}\right)^{٥}$

$= \left(\dfrac{س^{٢}}{٣} - \dfrac{٥}{س^{٤}}\right)^{٥} = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

⑯ $د(-س) = \left(\dfrac{١ + س}{١ - س}\right)^{٢} - \left(\dfrac{١ - س}{١ + س}\right)^{٢}$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

⑰ $د(-س) = \left(\dfrac{-س - ١}{-س + ١}\right)^{٥} + \left(\dfrac{-س + ١}{-س - ١}\right)^{٥}$

$= \left[\dfrac{-(س + ١)}{-(س - ١)}\right]^{٥} + \left[\dfrac{-(س - ١)}{-(س + ١)}\right]^{٥}$

$= \left(\dfrac{س + ١}{س - ١}\right)^{٥} + \left(\dfrac{س - ١}{س + ١}\right)^{٥}$

$= د(س)$

∴ الدالة زوجية.

⑱ $د(-س) = \left((-س)^{٣} + ١\right)^{٤} - \left((-س)^{٣} - ١\right)^{٤}$

$= \left(-(س^{٣} - ١)\right)^{٤} - \left(-(س^{٣} + ١)\right)^{٤}$

$= (س^{٣} - ١)^{٤} - (س^{٣} + ١)^{٤}$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

⑲ $د(-س) = -س\ حتا(-س) = -س\ حتاس$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

⑳ $د(-س) = \dfrac{-٣س}{ظا(-س)} = \dfrac{-٣س}{-ظاس} = \dfrac{٣س}{ظاس}$

$= د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉑ $د(-س) = \dfrac{(-س)^{٣} \times حا(-٣س)}{١ + (-س)^{٤}}$

$= \dfrac{س^{٣}\ حا٣س}{١ + س^{٤}} = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉒ $د(-س) = \dfrac{٣(-س)^{٢} - حتا(-س)}{(-س)^{٣} + ٦س}$

$= \dfrac{٣س^{٢} - حتاس}{-س^{٣} + ٦س} = \dfrac{٣س^{٢} - حتاس}{-(س^{٣} - ٦س)}$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

㉓ $د(-س) = (-س)^{٢}\left(حا(-س)\right)^{٣}$

$= س^{٢}(-حاس)^{٣} = -س^{٢}\ حا^{٣}س$

$= -د(س)$

∴ الدالة فردية.

㉔ $د(-س) = -س\ حا(-س)^{٣}$

$= -س\ حا(-س^{٣})$

$= س\ حاس^{٣} = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉕ $د(-س) = \dfrac{(-س)^{٢} + ظا(-س)}{(-س)^{٤} + حا(-س)}$

$= \dfrac{س^{٢} - ظاس}{س^{٤} - حاس} \neq د(س) \neq -د(س)$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

㉖ $د(-س) = حا(-س)^{٢} - \left(حا(-س)\right)^{٢}$

$= حاس^{٢} - (-حاس)^{٢}$

$= حاس^{٢} - حا^{٢}س = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉗ $د(-س) = (-س)^{٤} + حا^{٦}(-س)$

$= س^{٤} + (-حاس)^{٦}$

$= س^{٤} + حا^{٦}س = د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉘ $د(-س) = (-س)^{٧} + ظا^{٥}(-س)$

$= -س^{٧} + (-ظاس)^{٥}$

$= -س^{٧} - ظا^{٥}س = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

㉙ $د(-س) = \dfrac{حا(-٣س)\ حتا(-٢س)}{قا(-س)}$

$= \dfrac{-حا٣س\ حتا٢س}{قاس} = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

㉚ ∵ $د(س) = ٢^{٢س} + حتاس + ٢^{-٢س}$

∴ $د(-س) = ٢^{-٢س} + حتا(-س) + ٢^{٢س}$

$= ٢^{-٢س} + حتاس + ٢^{٢س}$

$= د(س)$

∴ الدالة زوجية.

㉛ ∵ $د(س)$

$= \left((حتاس + حاس) - ١\right)\left((حتاس + حاس) + ١\right)$

$= (حتاس + حاس)^{٢} - ١$

$= حتا^{٢}س + حا^{٢}س + ٢\ حاس\ حتاس - ١$

$= ١ + ٢\ حاس\ حتاس - ١ = ٢\ حاس\ حتاس$

∴ $د(-س) = ٢\ حا(-س)\ حتا(-س)$

$= -٢\ حاس\ حتاس = -د(س)$

∴ الدالة فردية.

(٣٢) د (−س) = { −٢س ، −س ≥ ٠ ؛ ٢س ، −س < ٠ }

= { −٢س ، س ≤ ٠ ؛ ٢س ، س > ٠ }

= { ٢س ، س ≥ ٠ ؛ −٢س ، س < ٠ }

= د (س)

∴ الدالة زوجية.

(٣٣) د (−س)

= { −٢س + (−س)^{٢} ، −س ≤ ٠ ؛ −٢س − (−س)^{٢} ، −س > ٠ }

= { −(٢س − س^{٢}) ، س ≥ ٠ ؛ −(٢س + س^{٢}) ، س < ٠ }

= { −(٢س + س^{٢}) ، س ≤ ٠ ؛ −(٢س − س^{٢}) ، س > ٠ }

= − { ٢س + س^{٢} ، س ≤ ٠ ؛ ٢س − س^{٢} ، س > ٠ }

= − د (س)

∴ الدالة فردية.

٦

شكل (١) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

<u>التحقيق الجبرى :</u>

بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = ٢ − ٢أ ، د (ب) = ٢ − ٢ب

وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ ٢ − ٢أ = ٢ − ٢ب

∴ −٢أ = −٢ب ∴ أ = ب

∴ الدالة د أحادية

شكل (٢) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

<u>التحقيق الجبرى :</u>

بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = ٤ − أ^{٣} ، د (ب) = ٤ − ب^{٣}

وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ ٤ − أ^{٣} = ٤ − ب^{٣}

∴ −أ^{٣} = −ب^{٣} ∴ أ = ب

∴ الدالة د أحادية.

شكل (٣) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

<u>التحقيق الجبرى :</u>

بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د

∴ د (أ) = $\frac{أ - ١}{أ - ٢}$ ، د (ب) = $\frac{ب - ١}{ب - ٢}$

وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ $\frac{أ - ١}{أ - ٢} = \frac{ب - ١}{ب - ٢}$

∴ (أ − ١) (ب − ٢) = (أ − ٢) (ب − ١)

∴ أب − ٢أ − ب + ٢ = أب − أ − ٢ب + ٢

∴ −٢أ − ب = −أ − ٢ب

∴ ٢ب − ب = ٢أ − أ ∴ ب = أ

∴ الدالة د أحادية.

٧

(١) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ٢أ − ٣ ، د (ب) = ٢ب − ٣

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٢أ − ٣ = ٢ب − ٣ ∴ ٢أ = ٢ب

∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

(٢) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ٤ − أ^{٣} ، د (ب) = ٤ − ب^{٣}

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٤ − أ^{٣} = ٤ − ب^{٣} ∴ −أ^{٣} = −ب^{٣}

∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية

(٣) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = $\frac{٣}{٢أ + ٥}$ ، د (ب) = $\frac{٣}{٢ب + ٥}$

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{٣}{٢أ + ٥} = \frac{٣}{٢ب + ٥}$ ∴ ٢أ + ٥ = ٢ب + ٥

∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

(٤) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = $\frac{٣أ - ٥}{٤أ + ٣}$ ، د (ب) = $\frac{٣ب - ٥}{٤ب + ٣}$

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{٣أ - ٥}{٤أ + ٣} = \frac{٣ب - ٥}{٤ب + ٣}$

∴ (٣أ − ٥) (٤ب + ٣) = (٤أ + ٣) (٣ب − ٥)

∴ ١٢أب + ٩أ − ٢٠ب − ١٥

= ١٢أب − ٢٠أ + ٩ب − ١٥

∴ ٩أ − ٢٠ب = −٢٠أ + ٩ب

∴ ٢٩أ = ٢٩ب

∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

٨

(١) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د ، أ ≠ ب

، ∵ د (أ) = ٣ ، د (ب) = ٣

∴ د (أ) = د (ب) ∴ د دالة ليست أحادية.

(٢) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = (أ + ٣)^{٢} ، د (ب) = (ب + ٣)^{٢}

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ (أ + ٣)^{٢} = (ب + ٣)^{٢} ∴ أ + ٣ = ± (ب + ٣)

∴ أ + ٣ = ب + ٣ ∴ أ = ب

أ، أ + ٣ = −ب − ٣ ∴ أ = −ب − ٦

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، −ب − ٦

∴ د دالة ليست أحادية.

(٣) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = أ^{٢} − ٥أ + ٦

، د (ب) = ب^{٢} − ٥ب + ٦

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ أ^{٢} − ٥أ + ٦ = ب^{٢} − ٥ب + ٦

∴ أ^{٢} − ٥أ = ب^{٢} − ٥ب

∴ أ^{٢} − ب^{٢} − ٥أ + ٥ب = ٠

∴ (أ − ب) (أ + ب) − ٥ (أ − ب) = ٠

∴ (أ − ب) (أ + ب − ٥) = ٠

∴ أ − ب = ٠ ∴ أ = ب

أ، أ + ب − ٥ = ٠ ∴ أ = −ب + ٥

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، −ب + ٥

∴ د دالة ليست أحادية.

(٤) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = $\frac{١}{أ^{٢} - ٤}$ ، د (ب) = $\frac{١}{ب^{٢} - ٤}$

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ $\frac{١}{أ^{٢} - ٤} = \frac{١}{ب^{٢} - ٤}$ ∴ أ^{٢} − ٤ = ب^{٢} − ٤

∴ أ^{٢} = ب^{٢} ∴ أ = ± ب

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، −ب

∴ د دالة ليست أحادية.

٩

(١) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ٢أ^{٢} − أ − ٣

، د (ب) = ٢ب^{٢} − ب − ٣

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٢أ^{٢} − أ − ٣ = ٢ب^{٢} − ب − ٣

∴ ٢أ^{٢} − ٢ب^{٢} − أ + ب = ٠

∴ ٢ (أ^{٢} − ب^{٢}) − (أ − ب) = ٠

∴ ٢ (أ − ب) (أ + ب) − (أ − ب) = ٠

∴ (أ − ب) (٢ (أ + ب) − ١) = ٠

∴ أ − ب = ٠ ∴ أ = ب

أ، ٢ (أ + ب) − ١ = ٠

∴ أ + ب = $\frac{١}{٢}$ ∴ أ = $\frac{١}{٢}$ − ب

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، $\frac{١}{٢}$ − ب

∴ د دالة ليست أحادية.

(٢) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = أ^{٤} + ٢ أ^{٢} + ١

، د (ب) = ب^{٤} + ٢ ب^{٢} + ١

، ويفرض د (أ) = د (ب)

∴ أ^{٤} + ٢ أ^{٢} + ١ = ب^{٤} + ٢ ب^{٢} + ١

∴ (أ^{٢} + ١)^{٢} = (ب^{٢} + ١)^{٢}

∴ أ^{٢} + ١ = ب^{٢} + ١ ∴ أ^{٢} = ب^{٢} ∴ أ = ± ب

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، − ب

∴ د دالة ليست أحادية.

١٠

من (١) : (٤) ليست زوجية وليست فردية.

١١

(١) ∵ الدالة فردية. ∴ د (−٥) = − د (٥)

∴ المقدار = $\frac{-٧ \text{ د } (٥) + ٣ \text{ د } (٥)}{-٢ \text{ د } (٥)} = \frac{-٤ \text{ د } (٥)}{-٢ \text{ د } (٥)} = ٢$

(٢) ∵ الدالة زوجية. ∴ د (−٥) = د (٥)

∴ المقدار = $\frac{٧ \text{ د } (٥) + ٣ \text{ د } (٥)}{٢ \text{ د } (٥)} = \frac{١٠ \text{ د } (٥)}{٢ \text{ د } (٥)} = ٥$

١٢

∵ د$_{١}$ ، د$_{٢}$ زوجيتان ، ر$_{١}$ ، ر$_{٢}$ فرديتان

(١) د$_{١}$ + ر$_{٢}$ ليست زوجية وليست فردية

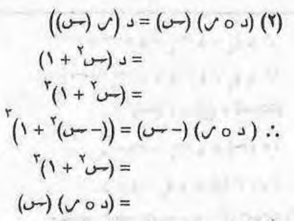
(٢) د$_{١}$ − د$_{٢}$ زوجية (٣) ر$_{١}$ + ر$_{٢}$ فردية

(٤) د$_{١}$. ر$_{٢}$ فردية (٥) ر$_{١}$. ر$_{٢}$ زوجية

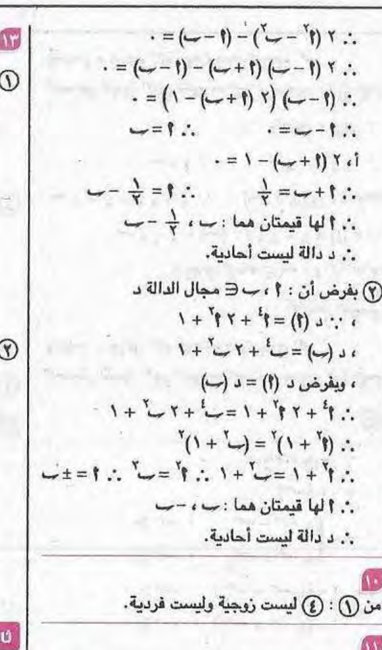
(٦) $\frac{\text{د}_{٢}}{\text{د}_{١}}$ زوجية

١٣

(١)



(٢)



ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير



(١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (أ)

(٥) (ب) (٦) (أ) (٧) (أ)

إرشادات الحل :

(١) ∵ د دالة ينتمى إليها النقطة (٢ ، ٣)

∴ النقطة (٢ ، −١) ∌ بيان الدالة

، ∵ د أحادية ينتمى اليها النقطة (٢ ، ٣)

∴ النقطة (٥ ، ٣) ∌ بيان الدالة

∴ النقطة التى يمكن أن تنتمى للدالة هى (٣ ، ٢)

(٢) ∵ الدالة احادية تمر بالنقطتين (٢ ، أ) ، (٣ ، ب)

∴ لابد وأن يكون أ ≠ ب دائمًا

(٣) ∵ د فردية ، د (١) = ك ∴ د (− ١) = − ك

، ∵ د (س + ٢) = د (س) + د (٢)

بوضع س = −١

∴ د (١) = د (−١) + د (٢)

∴ ك = − ك + د (٢) ∴ د (٢) = ٢ ك

، بوضع س = ١

∴ د (٣) = د (١) + د (٢) = ك + ٢ ك = ٣ ك

(٤) ∵ (د + ر) (− س)

$= \frac{١ + (−س)}{١ − (−س)} + \frac{١ − (−س)}{١ + (−س)}$

$= \frac{١ − س}{١ + س} + \frac{١ + س}{١ − س}$ = (د + ر) (س)

∴ (د + ر) دالة زوجية

، ∵ (د . ر) (س) = $\frac{١ + س}{١ − س} \times \frac{١ − س}{١ + س} = ١$

∴ (د . ر) دالة زوجية أيضًا.

(٥) ∵ ر (− س) = د (− س) + د (س) = ر (س)

∴ ر دالة زوجية دائمًا

(٦) ∵ ٣ د (س) + ٢ د (− س) = س^{٣} − جاس (١)

وبوضع − س بدلًا من س

∴ ٣ د (− س) + ٢ د (س) = (− س)^{٣} − جا (− س)

∴ ٣ د (− س) + ٢ د (س) = − س^{٣} + جاس (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٥ د (س) + ٥ د (− س) = صفر

∴ د (س) = − د (− س)

∴ الدالة فردية.

(٧) د (س) = س^{٣} ، ر (س) = س^{٢} + ١

(١) (د × ر) (س) = س^{٣} (س^{٢} + ١)

∴ (د × ر) (− س) = (− س)^{٣} ((− س)^{٢} + ١)

= − س^{٣} (س^{٢} + ١)

∴ (د × ر) (− س) = − (د × ر) (س)

أى أن : (د × ر) فردية.

(٢) (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (س^{٢} + ١)

= (س^{٢} + ١)^{٣}

∴ (د ∘ ر) (− س) = ((− س)^{٢} + ١)^{٣}

= (س^{٢} + ١)^{٣}

= (د ∘ ر) (س)

∴ (د ∘ ر) زوجية.

(٣) (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر (س^{٣}) = س^{٦} + ١

∴ (ر ∘ د) (− س) = ((− س)^{٦} + ١)

= س^{٦} + ١ = (ر ∘ د) (س)

∴ (ر ∘ د) زوجية.

∴ الإجابة (أ) هى الصحيحة.

إجابات تمارين 4

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (د) (٤) (ب)

(٥) (د) (٦) (د) (٧) (ب) (٨) (جـ)

(٩) (جـ) (١٠) (جـ) (١١) (د) (١٢) (ب)

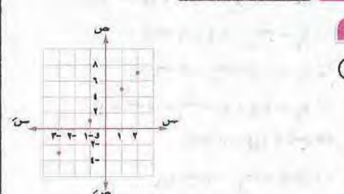
(١٣) (ب) (١٤) (ب) (١٥) (جـ) (١٦) (ب)

(١٧) (ب)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

(١)



المدى = {−٣ ، ١ ، ٥ ، ٧}

②

المدى =]٢ ، ٦]

③

المدى =]٢ ، ∞[

④

المدى = ح

⑤

المدى = [٠ ، ∞[

⑥

المدى = [-٥ ، ∞[

⑦

* لاحظ أن رأس المنحنى (١,٥ ، -٢$\frac{١}{٤}$)
* المدى = [-٢$\frac{١}{٤}$ ، ١٨]

٢

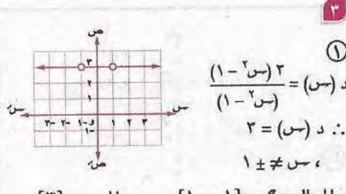
①

* المدى = [١ ، ٦]
* الدالة تناقصية فى]-٢ ، ١[
، وتزايدية فى]١ ، ٦[

② الدالة ليست أحادية لأنه يوجد خط أفقى يقطع الدالة فى أكثر من نقطة.

٣

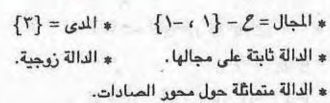
①



د(س) = $\frac{٣(س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)}$

∴ د(س) = ٣

، س ≠ ±١



* المجال = ح - {١ ، -١} * المدى = {٣}
* الدالة ثابتة على مجالها. * الدالة زوجية.
* الدالة متماثلة حول محور الصادات.

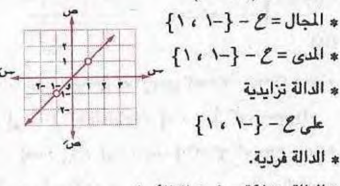
②

د(س) = $\frac{(٢ - س)(٢ + س)}{س + ٢}$ = ٢ - س

، س ≠ -٢

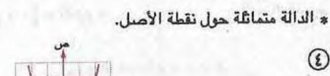
* المجال = ح - {-٢}
* المدى = ح - {٤}
* الدالة تناقصية على مجالها
* الدالة ليست فردية وليست زوجية.

③



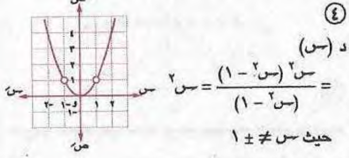
د(س) = $\frac{س(س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)}$ = س ، س ≠ ±١

* المجال = ح - {-١ ، ١}
* المدى = ح - {-١ ، ١}
* الدالة تزايدية على ح - {-١ ، ١}



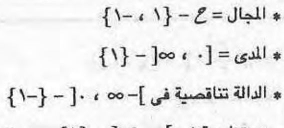
* الدالة فردية.
* الدالة متماثلة حول نقطة الأصل.

④

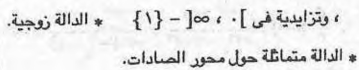


د(س) = $\frac{س^٢(س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)}$ = $س^٢$

حيث س ≠ ±١



* المجال = ح - {١ ، -١}
* المدى = [٠ ، ∞[- {١}
* الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٠] - {-١}

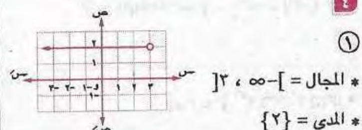


، وتزايدية فى [٠ ، ∞[- {١} * الدالة زوجية.

* الدالة متماثلة حول محور الصادات.

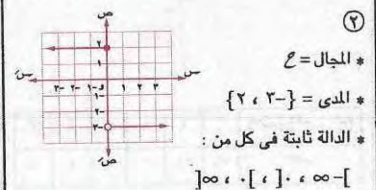
٤

①



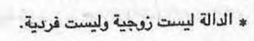
* المجال =]-∞ ، ٣[
* المدى = {٢}
* الدالة ثابتة فى الفترة]-∞ ، ٣[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

②



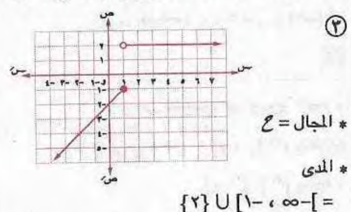
* المجال = ح
* المدى = {-٢ ، ٢}
* الدالة ثابتة فى كل من:

]-∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[



* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

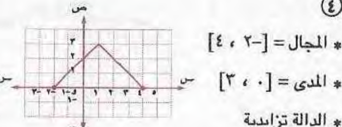
③



* المجال = ح
* المدى =]-∞ ، -١] ∪ {٢}
* الدالة ثابتة فى]١ ، ∞[، وتزايدية فى]-∞ ، ١]

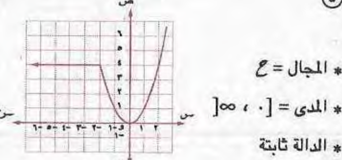
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

④



* المجال = [-٢ ، ٤]
* المدى = [٠ ، ٣]
* الدالة تزايدية في]-٢ ، ١[
، وتناقصية في]١ ، ٤[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* محور التماثل هو المستقيم س = ١

⑤



* المجال = ع
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة ثابتة في]-∞ ، -٢]
، وتناقصية في]-٢ ، ٠[، وتزايدية في]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑥

* المجال = ع
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية في]-∞ ، ٠[
، وتزايدية في]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑦

* المجال = ع - {١}
* المدى =]-∞ ، ١]
* الدالة تزايدية في]-∞ ، ١[
، وثابتة في]١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

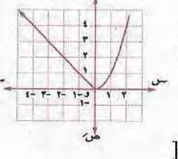
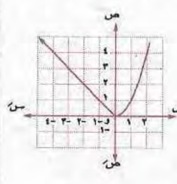
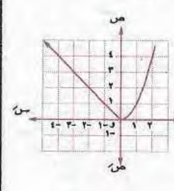
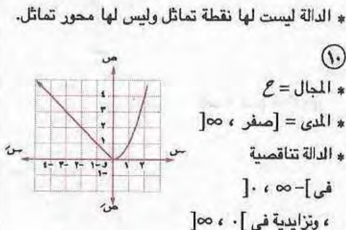
⑧

* المجال = ع
* المدى =]-∞ ، ١]
* الدالة تزايدية في]-∞ ، ١[
، وتناقصية في]١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑨

* المجال = ع
* المدى = [صفر ، ∞[
* الدالة تناقصية في]-∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

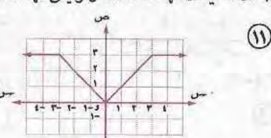
⑩

* المجال = ع
* المدى = [صفر ، ∞[
* الدالة تناقصية في]-∞ ، ٠[
، وتزايدية في]٠ ، ∞[

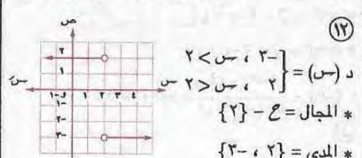
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑪



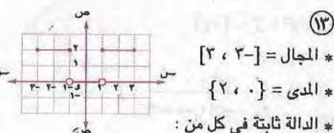
* المجال = ع   * المدى = [٠ ، ٣]
* الدالة ثابتة في كل من]-∞ ، -٣[،]٣ ، ∞[
، وتناقصية في]-٣ ، ٠[، وتزايدية في]٠ ، ٣[
* الدالة زوجية.   * محور التماثل هو المستقيم : س = ٠.

⑫



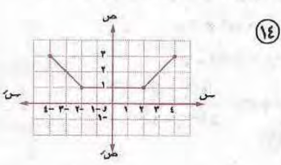
د(س) = { -٣ ، س > ٢ ؛ ٢ ، س < ٢ }
* المجال = ع - {٢}
* المدى = {٢ ، -٣}
* الدالة ثابتة في كل من :]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑬



* المجال = [-٣ ، ٣]
* المدى = {٠ ، ٢}
* الدالة ثابتة في كل من :
]-٣ ، -١[،]-١ ، ١[،]١ ، ٣[
* الدالة زوجية
* محور التماثل هو المستقيم س = ٠.

⑭

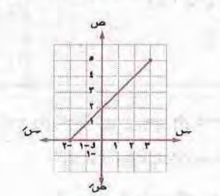


* المجال = [-٤ ، ٤]   * المدى = [١ ، ٣]
* الدالة تناقصية في]-٤ ، -٢[
، وثابتة في]-٢ ، ٢[
وتزايدية في]٢ ، ٤[* الدالة زوجية.
* محور التماثل هو المستقيم س = ٠.

٥

$د_1$(س) = ٣س - ١ ، مجالها = ع
، $د_2$(س) = ٣ - ٢س ، مجالها = [-٢ ، ٣]
، ($د_1$ + $د_2$)(س) = س + ٢ ، ومجالها = [-٢ ، ٣]

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣
($د_1$ + $د_2$)(س)	٠	١	٢	٣	٤	٥



* المجال = [-٢ ، ٣]
* الدالة تزايدية في]-٢ ، ٣[

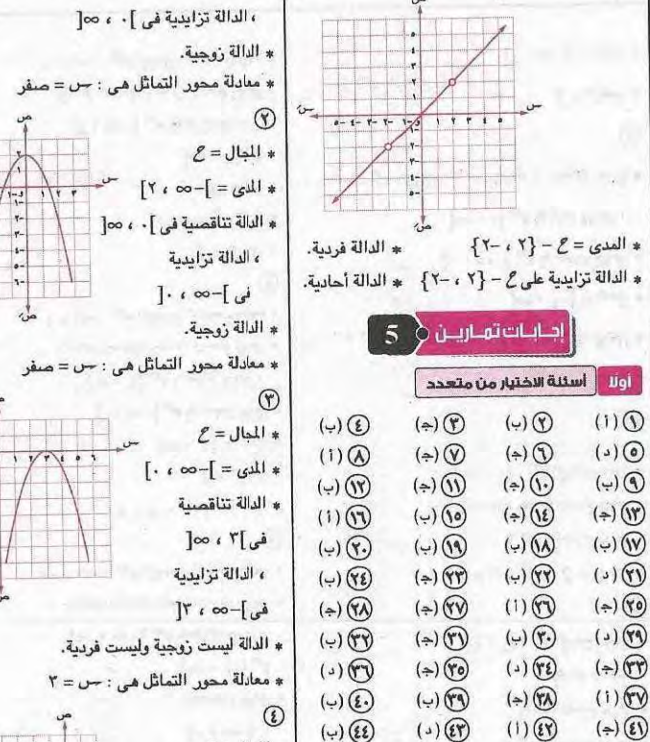
٦

∵ د(س) = $س^3$ - ٤س ومجالها = ع
، ر(س) = $س^2$ - ٤ ومجالها = ع

∴ $\frac{د}{ر}$(س) = $\frac{س^3 - ٤س}{س^2 - ٤}$ = $\frac{س(س^2 - ٤)}{س^2 - ٤}$ = س

حيث س ≠ ± ٢

ومجال $\frac{د}{ر}$ = ع - {٢ ، -٢}



* المدى = ح − {٢ ، −٢}   * الدالة فردية.
* الدالة تزايدية على ح − {٢ ، −٢}   * الدالة أحادية.

إجابات تمارين 5

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

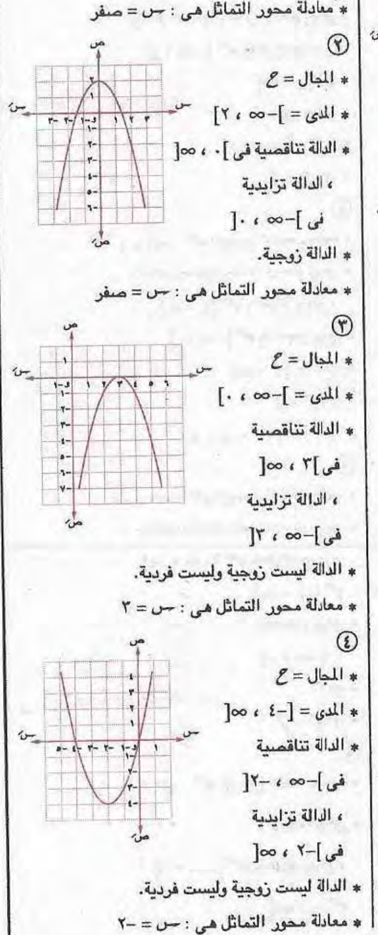
(١) (أ)	(٢) (ب)	(٣) (جـ)	(٤) (ب)
(٥) (د)	(٦) (جـ)	(٧) (جـ)	(٨) (أ)
(٩) (ب)	(١٠) (جـ)	(١١) (جـ)	(١٢) (ب)
(١٣) (جـ)	(١٤) (جـ)	(١٥) (ب)	(١٦) (أ)
(١٧) (ب)	(١٨) (ب)	(١٩) (ب)	(٢٠) (ب)
(٢١) (د)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (ب)
(٢٥) (جـ)	(٢٦) (أ)	(٢٧) (جـ)	(٢٨) (جـ)
(٢٩) (د)	(٣٠) (ب)	(٣١) (جـ)	(٣٢) (ب)
(٣٣) (جـ)	(٣٤) (د)	(٣٥) (جـ)	(٣٦) (د)
(٣٧) (أ)	(٣٨) (جـ)	(٣٩) (ب)	(٤٠) (ب)
(٤١) (جـ)	(٤٢) (أ)	(٤٣) (د)	(٤٤) (ب)
(٤٥) (د)	(٤٦) (جـ)		

ثانياً الأسئلة المقالية

1

(١)
* المجال = ح
* المدى = [−٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠]

، الدالة تزايدية فى [٠ ، ∞[
* الدالة زوجية.
* معادلة محور التماثل هى : س = صفر



(٢)
* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٢]
* الدالة تناقصية فى [٠ ، ∞[

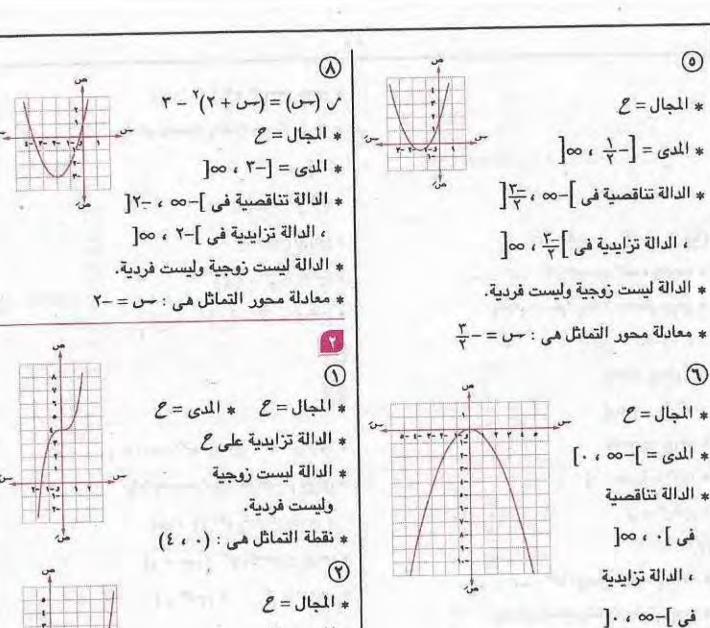
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠]
* الدالة زوجية.
* معادلة محور التماثل هى : س = صفر

(٣)
* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٠]
* الدالة تناقصية فى [٣ ، ∞[

، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٣]
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٣

(٤)
* المجال = ح
* المدى = [−٤ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، −٢]

، الدالة تزايدية فى [−٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −٢



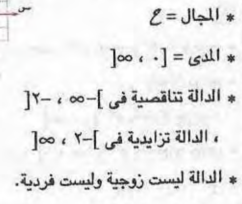
(٥)
* المجال = ح
* المدى = [−$\frac{١}{٢}$ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، $\frac{-٣}{٢}$]

، الدالة تزايدية فى [$\frac{-٣}{٢}$ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −$\frac{٣}{٢}$

(٦)
* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٠]
* الدالة تناقصية فى [٠ ، ∞[

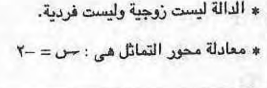
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠]
* الدالة زوجية.
* معادلة محور التماثل هى : س = صفر

(٧)



د(س) = (س + ٢)^{٢}
* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، −٢]

، الدالة تزايدية فى [−٢ ، ∞[



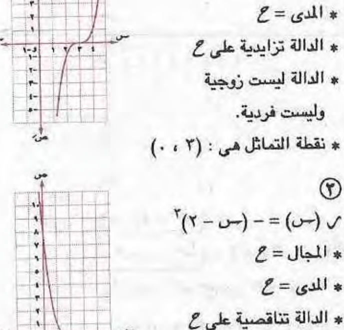
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −٢

(٨)

د(س) = (س + ٢)^{٢} − ٣
* المجال = ح
* المدى = [−٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، −٢]

، الدالة تزايدية فى [−٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −٢

2



(١)
* المجال = ح   * المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٠ ، ٤)

(٢)
* المجال = ح
* المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٣ ، ٠)

(٣)
د(س) = −(س − ٢)^{٣}
* المجال = ح
* المدى = ح
* الدالة تناقصية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ٠)

④

* المجال = ح * المدى = ح
* الدالة تناقصية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (١ ، ٢)

⑤

د(س) = −(س − ٣)^{٣} + ١

* المجال = ح * المدى = ح
* الدالة تناقصية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٣ ، ١)

⑥

* المجال = ح * المدى = ح
* الدالة تزايدية على ح
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٠ ، −١)

٣

①

* المجال = ح
* المدى = [−٣ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠]
، الدالة تزايدية فى [٠ ، ∞[
* الدالة زوجية * معادلة محور التماثل هى : س = ٠

②

* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٢]
* الدالة تناقصية فى [٠ ، ∞[
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠]
* الدالة زوجية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٠

③

* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٠]
* الدالة تناقصية فى [−٥ ، ∞[
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، −٥]
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −٥

④

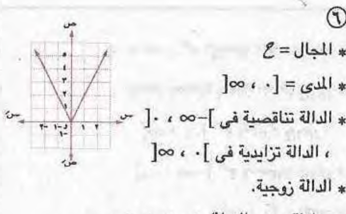
د(س) = |س − ٢| + ١

* المجال = ح
* المدى = [١ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢]
، الدالة تزايدية فى [٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٢

⑤

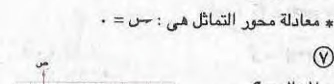
* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٤]
* الدالة تناقصية فى [٢ ، ∞[
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢]
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٢

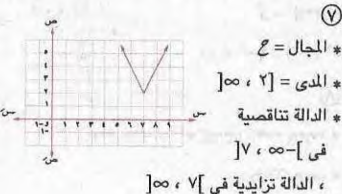
⑥



* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠]
، الدالة تزايدية فى [٠ ، ∞[
* الدالة زوجية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٠

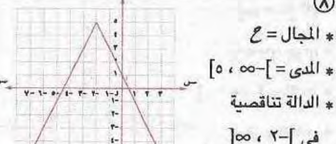
⑦

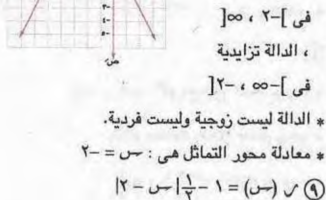




* المجال = ح
* المدى = [٢ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٧]
، الدالة تزايدية فى [٧ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محوز التماثل هى : س = ٧

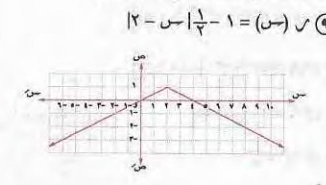
⑧





* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٥]
* الدالة تناقصية فى [−٢ ، ∞[
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، −٢]
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = −٢

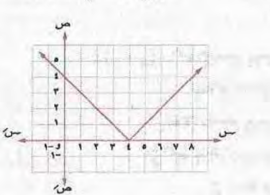
⑨ د(س) = ١ − $\frac{١}{٢}$|س − ٢|



* المجال = ح * المدى =]−∞ ، ١]
* الدالة تناقصية فى [٢ ، ∞[
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢]
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٢

⑩ ∵ د(س) = $\sqrt{س^{٢} − ٨س + ١٦}$

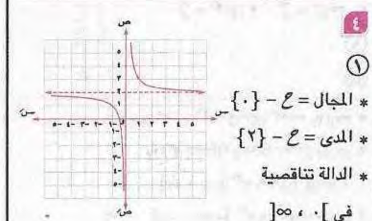
= $\sqrt{(س − ٤)^{٢}}$ = |س − ٤|



* المجال = ح * المدى = [٠ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٤]
، الدالة تزايدية فى [٤ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* معادلة محور التماثل هى : س = ٤

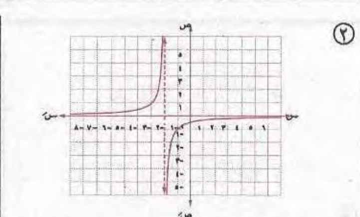
٤

①



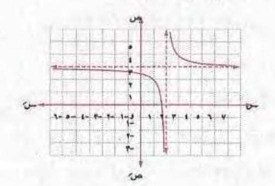
* المجال = ح − {٠}
* المدى = ح − {٢}
* الدالة تناقصية
فى]٠ ، ∞[
،]−∞ ، ٠[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٠ ، ٢)

②



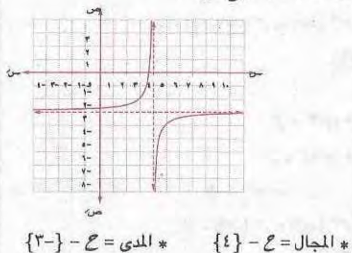
* المجال = ح − {−٢}   * المدى = ح − {٠}
* الدالة تزايدية فى]−∞ ، −٢[،]−٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (−٢ ، ٠)

③



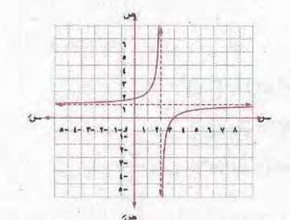
* المجال = ح − {٢}   * المدى = ح − {٣}
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ٣)

④ ر(س) = $\frac{-١}{س - ٤} - ٣$



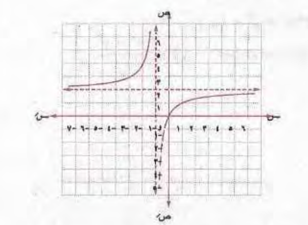
* المجال = ح − {٤}   * المدى = ح − {−٣}
* الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٤[،]٤ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٤ ، −٣)

⑤ ر(س) = $١ - \frac{١}{س - ٢}$



* المجال = ح − {٢}   * المدى = ح − {١}
* الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ١)

⑥ ر(س) = $٢ - \frac{٢}{س + ١}$

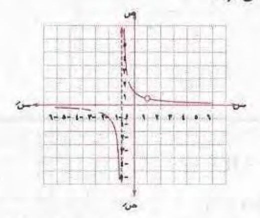


* المجال = ح − {−١}   * المدى = ح − {٢}
* الدالة تزايدية فى]−∞ ، −١[،]−١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (−١ ، ٢)

⑦ ر(س) = $٣ + \frac{١}{س - ٢}$

* المجال = ح − {٢}   * المدى = ح − {٣}
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* نقطة التماثل هى : (٢ ، ٣)

⑧ ر(س) = $\frac{س - ١}{(س - ١)(س + ١)} = \frac{١}{س + ١}$
، س ≠ ١



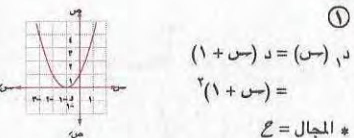
* المجال = ح − {−١ ، ١}   * المدى = ح − {٠ ، $\frac{١}{٢}$}
* الدالة تناقصية فى]−∞ ، −١[،]−١ ، ١[،]١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.
* لا توجد نقطة تماثل.

٥

① د(س) = س − ٢
② د(س) = $(س + ٢)^٢ - ٣$
③ د(س) = $-(س - ١)^٢ + ٢$
④ د(س) = $(س - ٢)^٣$
⑤ د(س) = $(س + ١)^٣ - ٣$
⑥ د(س) = |س − ٢| − ٣
⑦ د(س) = −|س − ١| + ٢
⑧ د(س) = $\frac{١}{س} + ٢$
⑨ د(س) = $\frac{-١}{س + ٢} - ٢$

٦

①



$د_١$(س) = د(س + ١)
= $(س + ١)^٢$
* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[

②

$د_٢$(س) = د(س) − ١
= $س^٢ - ١$
* المجال = ح
* المدى = [−١ ، ∞[

③

$د_٣$(س) = ٢ − د(س − ١)
= $٢ - (س - ١)^٢$
* المجال = ح
* المدى =]−∞ ، ٢]

④

$ر_١$(س) = ر(س − ١)
= $(س - ١)^٣$
* المجال = ح
* المدى = ح

⑤

ر٢ (س) = ر (س) − $\frac{١}{٢}$

= $س^{٣}$ − $\frac{١}{٢}$

* المجال = ح
* المدى = ح

⑥

ر٣ (س) = ر (س − ١) + ٢

= $(س − ١)^{٣}$ + ٢

* المجال = ح
* المدى = ح

⑦

و١ (س) = ٢ و (س)

= ٢ | س |

* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[

⑧

و٢ (س) = $\frac{١}{٢}$ و (س) − ٣ = $\frac{١}{٢}$ | س | − ٣

* المجال = ح
* المدى = [−٣ ، ∞[

⑨

و٣ (س) = ٢ و (س − ١) = ٢ | س − ١ |

* المجال = ح
* المدى = [٠ ، ∞[

⑩

ه١ (س) = ه (س − ٢) = $\frac{١}{س − ٢}$

* المجال = ح − {٢}
* المدى = ح − {٠}

⑪

ه٢ (س) = ه (س) − ١ = $\frac{١}{س}$ − ١

* المجال = ح − {٠}
* المدى = ح − {−١}

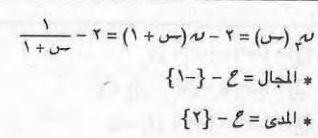
⑫

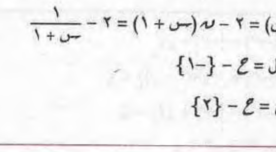
ه٣ (س) = ٢ − ه (س + ١) = ٢ − $\frac{١}{س + ١}$

* المجال = ح − {−١}
* المدى = ح − {٢}

⑦

①





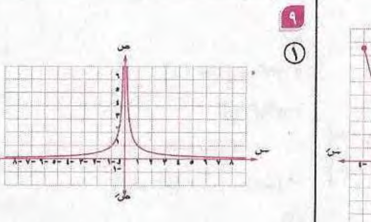
* المدى

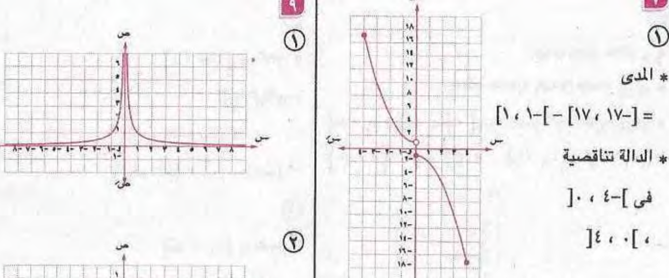
= [−١٧ ، ١٧] −]−١ ، ١[

* الدالة تناقصية

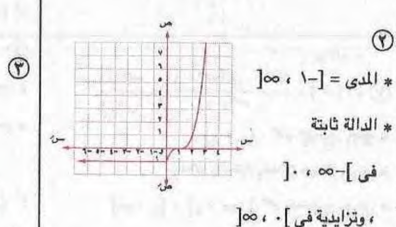
في]−٤ ، ٠[

،]٠ ، ٤[





②

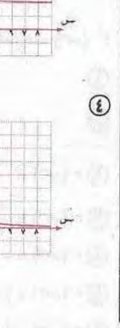


* المدى =]−١ ، ∞[
* الدالة ثابتة

في]−∞ ، ٠[

، وتزايدية في]٠ ، ∞[

③



* المدى = ح
* الدالة تناقصية

في]−١ ، ∞[

، وتزايدية

في]−∞ ، −١[

⑧

شكل (١) : د (س) = | $(س − ٣)^{٢}$ − ١ |

شكل (٢) : و (س) = | $س^{٣}$ |

شكل (٣) : ر (س) = $\frac{١}{| س − ٢ |}$

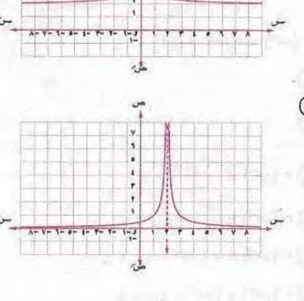
⑨

①

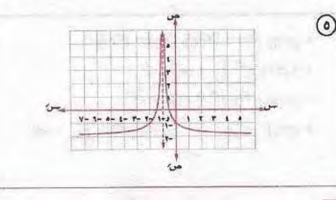
②

③

④



⑤

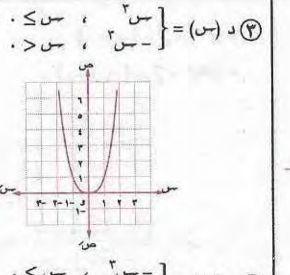


١٠

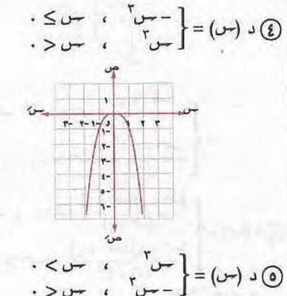
① د(س) = { س^{٢} ، س ≥ ٠ ؛ −س^{٢} ، س < ٠

② د(س) = { س^{٢} − ١ ، س ≥ ٠ ؛ −س^{٢} − ١ ، س < ٠

③ د(س) = { س^{٣} ، س ≥ ٠ ؛ −س^{٣} ، س < ٠



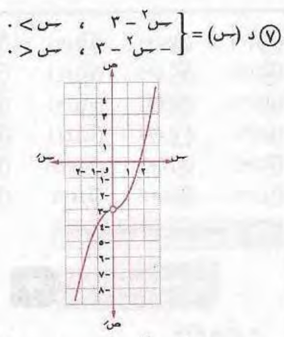
④ د(س) = { −س^{٣} ، س ≥ ٠ ؛ س^{٣} ، س < ٠

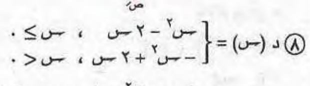


⑤ د(س) = { س^{٣} ، س > ٠ ؛ −س^{٢} ، س < ٠

⑥ د(س) = { س^{٢} + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ −س^{٢} + ٢ ، س < ٠

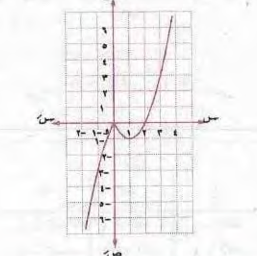
⑦ د(س) = { س^{٢} − ٣ ، س > ٠ ؛ −س^{٢} − ٣ ، س < ٠





⑧ د(س) = { س^{٢} − ٢س ، س ≥ ٠ ؛ −س^{٢} + ٢س ، س < ٠

= { (س − ١)^{٢} − ١ ، س ≥ ٠ ؛ −(س − ١)^{٢} + ١ ، س < ٠



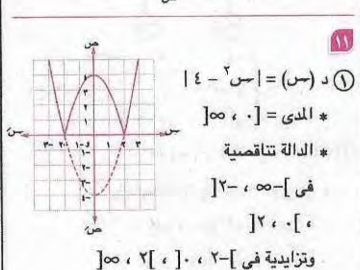
١١

① د(س) = |س^{٢} − ٤|

* المدى = [٠ ، ∞[

* الدالة تناقصية في]−∞ ، −٢[،]٠ ، ٢[

وتزايدية في]−٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[

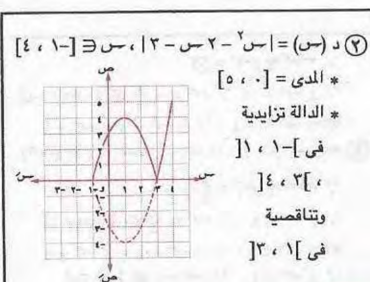


② د(س) = |س^{٢} − ٢س − ٣| ، س ∈ [−١ ، ٤]

* المدى = [٠ ، ٥]

* الدالة تزايدية في]−١ ، ١[،]٣ ، ٤[

وتناقصية في]١ ، ٣[





ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (جـ)	② (ب)	③ (أ)
④ (جـ)	⑤ (ب)	⑥ (ب)
⑦ (ب)	⑧ (ب)	⑨ (جـ)

إرشادات لحل رقم ١

① ∵ المنحنى ر(س) هو نفسه منحنى د(س) بالانتقال ٣ وحدات يمينًا.

∴ كل نقطة من نقاط تقاطع المنحنى د(س) مع محور السينات تنتقل ٣ وحدات يمينًا أيضًا.

∴ س ∈ {−٣ + ٣ ، ١ + ٣ ، ٠ + ٣}

أي س ∈ {٠ ، ٤ ، ٣}

② ∵ مدى الدالة التربيعية = [١ ، ∞[

∴ ب − ٢ = ١ ∴ ب = ٣

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ٢)

∴ د(٣) = ٢

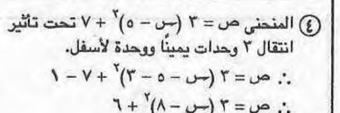
∴ (٣ − أ + ١)^{٢} + ١ = ٢

∴ (٤ − أ)^{٢} = ١ ∴ ٤ − أ = ±١

∴ أ = ٤ ± ١ ∴ أ = ٣ أو ٥

③ ∵ منحنى د(س) هو نفسه منحنى ر(س) بالانتقال وحدة واحدة يسارًا.

∴ الدالة تكون متزايدة في]−١ ، ∞[



④ المنحنى ص = ٣ (س − ٥)^{٢} + ٧ تحت تأثير انتقال ٣ وحدات يمينًا ووحدة لأسفل.

∴ ص = ٣ (س − ٥ − ٣)^{٢} + ٧ − ١

∴ ص = ٣ (س − ٨)^{٢} + ٦

⑤ ∵ (د ∘ د) (س) = د (د (س))

= د (|س| + ٢)

= ||س| + ٢| + ٢

= |س| + ٤

∴ مدى الدالة (د ∘ د) هو [٤ ، ∞[

⑥ ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = |$\frac{١}{٢}$ س^{٢} − ٨|

∴ مدى الدالة (د ∘ ر) = [٠ ، ∞[

⑦ ∵ |د (س)| هو نفس منحنى د (س) بعد انعكاس الجزء المرسوم اسفل محور السينات لأعلى

أى أن : الدالة |د (س)| تكون زوجية.

⑧ ∵ الدالة متماثلة حول نقطة الأصل.

∴ ر (س) = س^{٣} − ٢

∴ ر تزايدية.

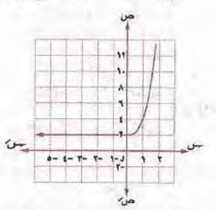
⑨ ∵ الدالة متماثلة حول محور الصادات

∴ ر (س) = −س^{٢} + ٢

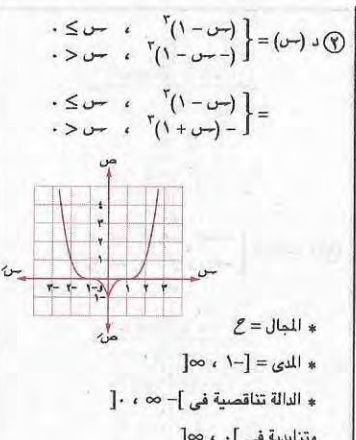
٢

① د (س) = { س^{٣} + س^{٣} + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ س^{٣} − س^{٣} + ٢ ، س < ٠ }

= { ٢ س^{٣} + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ ٢ ، س < ٠ }

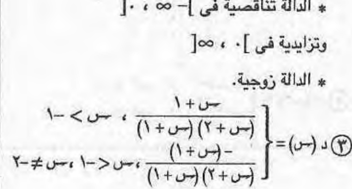


* المجال = ح   * المدى = [٢ ، ∞[
* الدالة ثابتة فى]− ∞ ، ٠]
، تزايدية فى [٠ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.



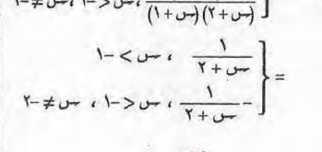
② د (س) = { (س − ١)^{٣} ، س ≥ ٠ ؛ (−س − ١)^{٣} ، س < ٠ }

= { (س − ١)^{٣} ، س ≥ ٠ ؛ −(س + ١)^{٣} ، س < ٠ }

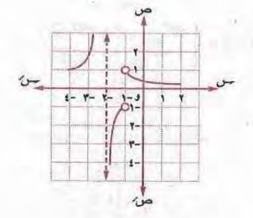


* المجال = ح
* المدى = [−١ ، ∞[
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[
وتزايدية فى]٠ ، ∞[
* الدالة زوجية.

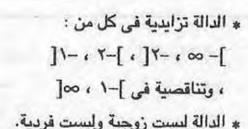
③ د (س) = { $\frac{س + ١}{(س + ٢)(س + ١)}$ ، س > −١ ؛ $\frac{−(س + ١)}{(س + ٢)(س + ١)}$ ، س < −١ ، س ≠ −٢ }



= { $\frac{١}{س + ٢}$ ، س > −١ ؛ −$\frac{١}{س + ٢}$ ، س < −١ ، س ≠ −٢ }



* المجال = ح − {−١ ، −٢}
* المدى = ح − [−١ ، ٠]



* الدالة تزايدية فى كل من :
]− ∞ ، −٢[،]−٢ ، −١[
، وتناقصية فى]−١ ، ∞[
* الدالة ليست زوجية وليست فردية.

④ د (س) = |س + ١| − |س − ١|

= { ٢ ، س > ١ ؛ ٢ س ، −١ ≤ س ≤ ١ ؛ −٢ ، س < −١ }

①		⓵−
س + ١	س + ١	−س − ١
س − ١	−س + ١	−س + ١
٢	٢ س	−٢

* المجال = ح   * المدى = [−٢ ، ٢]
* الدالة ثابتة فى كل من]− ∞ ، −١[
،]١ ، ∞[
وتزايدية فى]−١ ، ١[
* الدالة فردية.

إجابات تمارين 6

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (جـ)	③ (جـ)	④ (أ)
⑤ (جـ)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)
⑨ (ب)	⑩ (د)	⑪ (أ)	⑫ (ب)
⑬ (ب)	⑭ (جـ)	⑮ (ب)	⑯ (جـ)
⑰ (جـ)	⑱ (د)	⑲ (أ)	⑳ (ب)
㉑ (ب)	㉒ (جـ)	㉓ (جـ)	㉔ (د)



㉕ (د)	㉖ (د)	㉗ (ب)	㉘ (جـ)
㉙ (جـ)	㉚ (ب)	㉛ (د)	㉜ (د)
㉝ (د)	㉞ (ب)	㉟ (جـ)	㊱ (ب)
㊲ (جـ)	㊳ (ب)	㊴ (ب)	㊵ (أ)
㊶ (ب)	㊷ (جـ)	㊸ (جـ)	㊹ (د)
㊺ (جـ)	㊻ (د)		

ثانيا الأسئلة المقالية

تمارين على حل معادلات القيمة المطلقة

١

① ٤ |س| = ٢٠   ∴ |س| = ٥

∴ س = ± ٥   ∴ مجموعة الحل = {٥ ، −٥}

② |٢ س − ٣| = ٧   ∴ ٢ س − ٣ = ± ٧

∴ ٢ س − ٣ = ٧ ومنها ٢ س = ١٠

∴ س = ٥

أ، ٢ س − ٣ = −٧   ومنها ٢ س = −٤

∴ س = −٢

∴ مجموعة الحل = {٥ ، −٢}

③ |س + ٢| = ١   ∴ س + ٢ = ± ١

∴ س = −١ أ، س = −٣

∴ مجموعة الحل = {−١ ، −٣}

④ ٣ |س| = ٣   ∴ |س| = ١

∴ س = ± ١

∴ مجموعة الحل = {١ ، −١}

⑤ عندما س ≥ ٢ : ∴ س − ٢ = ٣ س − ٤

∴ ٢ س = ٢   ∴ س = ١ ∉ [٢ ، ∞[

عندما س < ٢ : ∴ −س + ٢ = ٣ س − ٤

∴ ٤ س = ٦   ∴ س = $\frac{٣}{٢}$ ∈]− ∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل = {$\frac{٣}{٢}$}

⑥ عندما س ≤ −٢ : ∴ س + ٢ = س − ١ (مرفوض)

عندما س > −٢ : ∴ −س − ٢ = س − ١

∴ ٢ س = −١   ∴ س = −$\frac{١}{٢}$ ∉]− ∞ ، −٢]

∴ مجموعة الحل = ∅

(٧) عندما س ≤ -٢ : ∴ س + ٢ = - س + ٢
∴ ٢ س = ٠   ∴ س = ٠ ∈ [-٢ ، ∞[
عندما س < -٢ :
∴ - س - ٢ = - س + ٢ (مرفوض)
∴ مجموعة الحل = {٠}

(٨) ∵ ٢ |س| = ٥ س - ٢١
عندما س ≤ ٠ : ∴ ٢ س = ٥ س - ٢١
∴ ٣ س = ٢١ ∴ س = ٧ ∈ [٠ ، ∞[
عندما س < ٠ : ∴ - ٢ س = ٥ س - ٢١
∴ ٧ س = ٢١ ∴ س = ٣ ∉]-∞ ، ٠]
∴ مجموعة الحل = {٧}

(٩) |س + ٥| = |س - ٣|
∴ س + ٥ = ± (س - ٣)
∴ س + ٥ = س - ٣ (مرفوض)
أ، س + ٥ = - س + ٣ ∴ ٢ س = -٢
∴ س = -١ (تحقق) ∴ مجموعة الحل = {-١}

(١٠) ∵ |٢ (س - ٣)| = |س - ٣|
∴ ٢ |س - ٣| = |س - ٣|
∴ |س - ٣| = ٠   ∴ س - ٣ = ٠
∴ س = ٣   ∴ مجموعة الحل = {٣}

(١١) |س - ١| = ٢ |س - ٢|
∴ س - ١ = ± ٢ (س - ٢)
∴ س - ١ = ٢ س - ٤   ∴ س = ٣ (تحقق)
أ، س - ١ = -٢ س + ٤   ∴ ٣ س = ٥
∴ س = $\frac{٥}{٣}$ (تحقق)
∴ مجموعة الحل = {٣ ، $\frac{٥}{٣}$}

(١٢) عندما س ≤ ٠ : ∴ س^{٢} - ٥ س + ٦ = ٠
∴ (س - ٢) (س - ٣) = ٠
∴ س = ٢ ∉ [٠ ، ∞[أ، س = ٣ ∉ [٠ ، ∞[
عندما س < ٠ : ∴ س^{٢} + ٥ س + ٦ = ٠
∴ (س + ٢) (س + ٣) = ٠
∴ س = -٢ ∈]-∞ ، ٠]
أ، س = -٣ ∈]-∞ ، ٠]
∴ مجموعة الحل = {٢ ، ٣ ، -٢ ، -٣}

(١٣) ∵ √س^{٢} - ٢ س = ٦
∴ |س| - ٢ س = ٦
عندما س ≤ ٠ : ∴ س - ٢ س = ٦
∴ س = -٦ ∉ [٠ ، ∞[
عندما س < ٠ : ∴ - س - ٢ س = ٦
∴ ٣ س = -٦ ∴ س = -٢ ∈]-∞ ، ٠]
∴ مجموعة الحل = {-٢}

(١٤) ∵ √(س^{٢} - ٤ س + ٤) = ٤
∴ √(س - ٢)^{٢} = ٤   ∴ |س - ٢| = ٤
∴ س - ٢ = ± ٤
∴ س - ٢ = ٤   ∴ س = ٦
أ، س - ٢ = -٤   ∴ س = -٢
∴ مجموعة الحل = {-٢ ، ٦}

(١٥) |س| + س = ٠
عندما س ≤ ٠ : ∴ س + س = ٠
∴ ٢ س = ٠   ∴ س = ٠ ∈ [٠ ، ∞[
عندما س < ٠ : ∴ - س + س = صفر
∴ صفر = صفر وذلك متحقق لجميع قيم س < ٠
∴ مجموعة الحل =]-∞ ، ٠]

(١٦) عندما س ≤ -٣ : س + ٣ + ٢ س = ٠
∴ ٣ س = -٣   ∴ س = -١ ∈ [-٣ ، ∞[
عندما س < -٣ : ∴ - س - ٣ + ٢ س = ٠
∴ س = ٣ ∉]-∞ ، -٣[
∴ مجموعة الحل = {-١}

(١٧) ∴ √(س^{٢} - ٦ س + ٩) + ٢ س = ٩
∴ √(س - ٣)^{٢} + ٢ س = ٩
∴ |س - ٣| + ٢ س = ٩
عندما س ≤ ٣ : ∴ س - ٣ + ٢ س = ٩
∴ ٣ س = ١٢   ∴ س = ٤ ∈ [٣ ، ∞[
عندما س < ٣ : ∴ - س + ٣ + ٢ س = ٩
∴ س = ٦ ∉]-∞ ، ٣[
∴ مجموعة الحل = {٤}

(١٨) |س - ٣| (|س - ٣| - ١) = ٠
∴ |س - ٣| = ٠ ومنها س = ٣
أ، |س - ٣| - ١ = ٠   ∴ |س - ٣| = ١
∴ س - ٣ = ± ١ ومنها س = ٢ أ، س = ٤
∴ مجموعة الحل = {٣ ، ٢ ، ٤}

(١٩) ∵ ٥ |س - ٣| - ٢ √(س - ٣)^{٢} = ١٢
∴ ٥ |س - ٣| - ٢ |س - ٣| = ١٢
∴ ٣ |س - ٣| = ١٢ ∴ |س - ٣| = ٤
∴ س - ٣ = ± ٤ ومنها س = ٧ أ، س = -١
∴ مجموعة الحل = {٧ ، -١}

(٢٠) |س - ١| |س + ١| = |س - ١|
∴ |س - ١| (|س + ١| - ١) = ٠
∴ |س - ١| = ٠ ومنها س = ١
أ، |س + ١| - ١ = ٠ ∴ |س + ١| = ١
∴ س + ١ = ± ١
ومنها س = ٠ أ، س = -٢
∴ مجموعة الحل = {١ ، ٠ ، -٢}

(٢١) |س^{٢} - ١| = ٢٦ ∴ س^{٢} - ١ = ± ٢٦
∴ س^{٢} = -٢٥ (مرفوض) أ، س^{٢} = ٢٧
ومنها س = ± ٣ √٣
∴ مجموعة الحل = {٣ √٣ ، -٣ √٣}

(٢٢) (|س + ١| + ٢) (|س + ١| - ٥) = ٠
∴ |س + ١| + ٢ = ٠
∴ |س + ١| = -٢ (مرفوض)
أ، |س + ١| - ٥ = ٠   ∴ |س + ١| = ٥
∴ س + ١ = ± ٥ ومنها س = ٤ أ، س = -٦
∴ مجموعة الحل = {٤ ، -٦}

(٢٣) |س - ٥|^{٢} = ٢ |س - ٥|
∴ |س - ٥| (|س - ٥| - ٢) = ٠
∴ |س - ٥| = ٠ ومنها س = ٥
أ، |س - ٥| - ٢ = ٠   ∴ |س - ٥| = ٢
ومنها س - ٥ = ± ٢
∴ س = ٧ أ، س = ٣
∴ مجموعة الحل = {٥ ، ٧ ، ٣}

(٢٤) ∵ س |س| - س = ٠
∴ س (|س| - ١) = ٠
∴ س = ٠ أ، |س| - ١ = ٠
∴ |س| = ١   ∴ س = ± ١
∴ مجموعة الحل = {٠ ، ١ ، -١}

(٢٥) س |س - ٥| - ٦ = ٠
عندما س ≤ ٥ : ∴ س^{٢} - ٥ س - ٦ = ٠
∴ (س - ٦) (س + ١) = ٠
∴ س = ٦ ∈ [٥ ، ∞[أ، س = -١ ∉ [٥ ، ∞[

عندما س < ٥ : − س^٢ + ٥ س − ٦ = ٠

∴ س^٢ − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ ∈]−∞ ، ٥[

أ، س = ٣ ∈]−∞ ، ٥[

∴ مجموعة الحل = {٦ ، ٢ ، ٣}

(٢٦) س^٢ + س − ١٠ = ± ١٠

∴ س^٢ + س − ١٠ = −١٠

∴ س^٢ + س = ٠ ∴ س (س + ١) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = −١

أ، س^٢ + س − ١٠ = ١٠

∴ س^٢ + س − ٢٠ = ٠

∴ (س + ٥) (س − ٤) = ٠

∴ س = −٥ أ، س = ٤

∴ مجموعة الحل = {٠ ، −١ ، −٥ ، ٤}

(٢٧) س |س − ٢| = ٤ س − ٨

عندما س > ٢ : ∴ س (س − ٢) = ٤ س − ٨

∴ س^٢ − ٢ س − ٤ س + ٨ = ٠

∴ س^٢ − ٦ س + ٨ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٤) = ٠

∴ س = ٢ ∉]٢ ، ∞[

أ، س = ٤ ∈]٢ ، ∞[

عندما س < ٢ : ∴ س (−س + ٢) = ٤ س − ٨

∴ −س^٢ + ٢ س = ٤ س − ٨

∴ س^٢ + ٢ س − ٨ = ٠

∴ (س + ٤) (س − ٢) = ٠

∴ س = −٤ ∈]−∞ ، ٢[

أ، س = ٢ ∉]−∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل = {٤ ، −٤}

(٢٨) س^٢ |س| = ٨ س

عندما س ≥ ٠ : ∴ س^٢ × س = ٨ س

∴ س^٤ − ٨ س = ٠

∴ س (س^٣ − ٨) = ٠

∴ س = ٠ ∈ [٠ ، ∞[

أ، س^٣ − ٨ = ٠ ∴ س^٣ = ٨

∴ س = ٢ ∈ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ س^٢ × −س = ٨ س

∴ س^٤ + ٨ س = ٠

∴ س (س^٣ + ٨) = ٠

∴ س = ٠ ∉]−∞ ، ٠[

أ، س^٣ + ٨ = ٠

∴ س^٣ = −٨

∴ س = −٢ ∈]−∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {−٢ ، ٠ ، ٢}

٢

* تم الحل بيانيًا وعليك التحقق جبريًا بنفسك.
* نرسم منحنيى الدالتين د (س) ، ر (س) فتكون الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين هى مجموعة حل المعادلة.

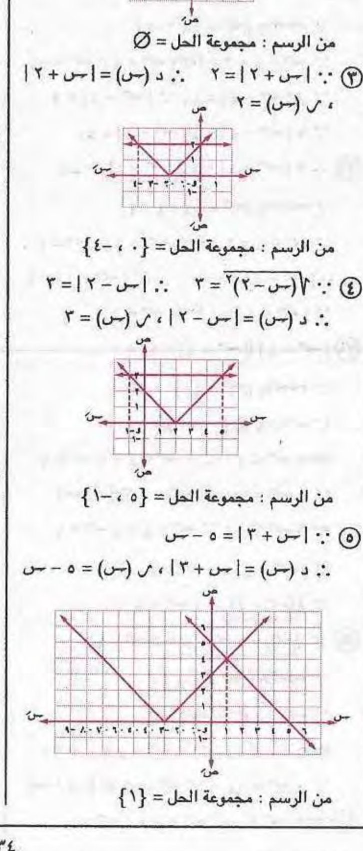
(١) ∵ |س| = ٤ ∴ د (س) = |س|

، ر (س) = ٤

من الرسم : مجموعة الحل = {٤ ، −٤}

(٢) ∵ |س| = −٢ ∴ د (س) = |س|

، ر (س) = −٢



من الرسم : مجموعة الحل = ∅

(٣) ∵ |س + ٢| = ٢ ∴ د (س) = |س + ٢|

، ر (س) = ٢

من الرسم : مجموعة الحل = {٠ ، −٤}

(٤) ∵ √((س − ٢)^٢) = ٣ ∴ |س − ٢| = ٣

∴ د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = ٣

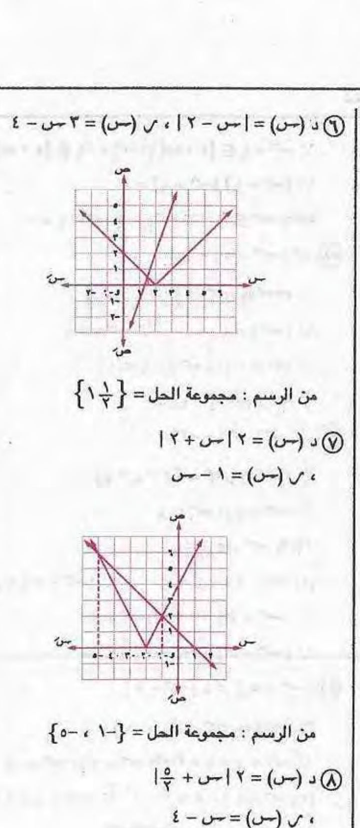
من الرسم : مجموعة الحل = {٥ ، −١}

(٥) ∵ |س + ٣| = ٥ − س

∴ د (س) = |س + ٣| ، ر (س) = ٥ − س

من الرسم : مجموعة الحل = {١}

(٦) د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = ٣ س − ٤



من الرسم : مجموعة الحل = {١ $\frac{1}{2}$}

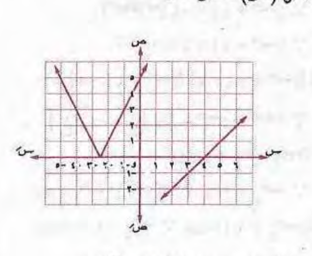
(٧) د (س) = ٢ |س + ٢|

، ر (س) = ١ − س

من الرسم : مجموعة الحل = {−١ ، −٥}

(٨) د (س) = ٢ |س + $\frac{5}{2}$|

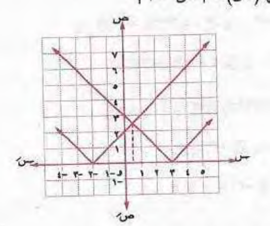
، ر (س) = س − ٤



من الرسم : مجموعة الحل = ∅

(٩) د(س) = |س + ٢|

، ر(س) = |س − ٣|

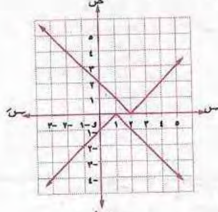


من الرسم : مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٢}\}$

(١٠) ∵ |س − ٢| = −|س − ١|

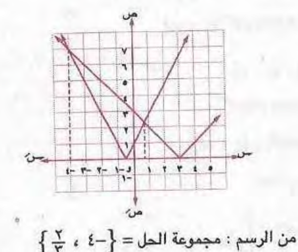
∴ د(س) = |س − ٢|

، ر(س) = −|س − ١|



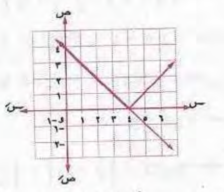
من الرسم : مجموعة الحل = ∅

(١١) د(س) = |س − ٣| ، ر(س) = |٢س + ١|



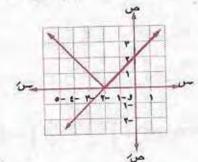
من الرسم : مجموعة الحل = $\{-٤ ، \frac{٢}{٣}\}$

(١٢) د(س) = |س − ٤| ، ر(س) = ٤ − س



من الرسم : مجموعة الحل =]−∞ ، ٤]

(١٣) د(س) = |س + ٢| ، ر(س) = س + ٢

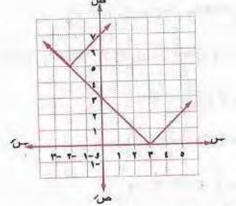


من الرسم : مجموعة الحل = [−٢ ، ∞[

(١٤) ∵ |س − ٣| = |س + ٢| + ٥

∴ د(س) = |س − ٣|

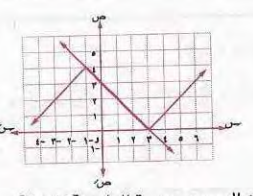
، ر(س) = |س + ٢| + ٥



من الرسم : مجموعة الحل =]−∞ ، −٢]

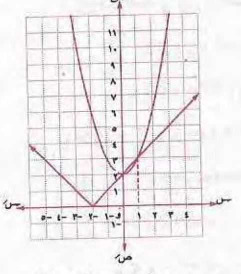
(١٥) د(س) = |س − ٣|

، ر(س) = ٤ − |س + ١|



من الرسم : مجموعة الحل = [−١ ، ٣]

(١٦) د(س) = |س + ٢| ، ر(س) = $س^٢$ + ٢



من الرسم : مجموعة الحل = {٠ ، ١}

٣

د(−س) = $\frac{١٢}{|-س| + ٢} = \frac{١٢}{|س| + ٢}$ = د(س)

∴ الدالة زوجية.

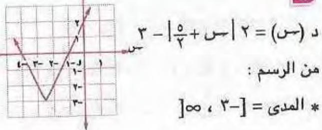
∵ د(س) = ٢ ∴ $\frac{١٢}{|س| + ٢} = ٢$

∴ |س| + ٢ = ٦ ∴ |س| = ٤

∴ س = ±٤ ∴ مجموعة الحل = {−٤ ، ٤}



٤



د(س) = ٢ |س + $\frac{٥}{٢}$| − ٣

من الرسم :

* المدى = [−٣ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى]−∞ ، −$\frac{٥}{٢}$]

، وتزايدية فى [−$\frac{٥}{٢}$ ، ∞[

* مجموعة الحل = {−١ ، −٤}

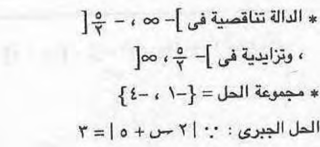
الحل الجبرى : ∵ |٢س + ٥| = ٣

∴ ٢س + ٥ = ±٣

∴ ٢س + ٥ = ٣ ومنها س = −١

أ، ٢س + ٥ = −٣ ومنها س = −٤

٥



من الرسم :

* المدى =]−∞ ، ١]
* الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠]

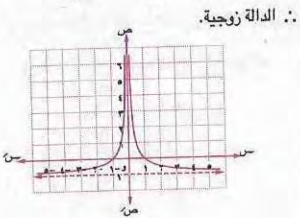
، وتناقصية فى [٠ ، ∞[

* الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات.
* مجموعة الحل = {−٢ ، ٢} ويمكنك التحقق منها جبريًا.

٦

د(−س) = $\frac{١ - |-س|}{|-س|} = \frac{١ - |س|}{|س|}$ = د(س)

∴ الدالة زوجية.



∴ د(س) = $\frac{١ - |س|}{|س|} = \frac{١}{|س|} - ١$

من الرسم : مجموعة الحل = {−١ ، ١}

⑦

د (س) = { ٢س ، س ≥ ١ ؛ ٢ ، س < ١ }

من الرسم :

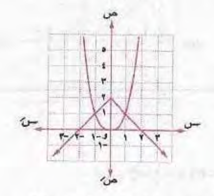
* المدى = [٢ ، ∞[
* الدالة ثابتة فى]-∞ ، ١]

، وتزايدية فى]١ ، ∞[

* مجموعة الحل = { $\frac{٣}{٢}$ }

⑧

د (س) = { $س^٣$ ، س ≥ ٠ ؛ $-س^٣$ ، س < ٠ }



من الرسم : مجموعة الحل = {-١ ، ١}

تمارين على حل متباينات القيمة المطلقة

⑨

① -٥ ≤ س - ٣ ≤ ٥

∴ -٢ ≤ س ≤ ٨

∴ مجموعة الحل = [-٢ ، ٨]

② س - ٣ ≥ ٥ ومنها س ≥ ٨

أ، س - ٣ ≤ -٥ ومنها س ≤ -٢

∴ مجموعة الحل = ح -]-٢ ، ٨[

③ ٢س + ٥ > ٣ ومنها س > -١

أ، ٢س + ٥ < -٣ ومنها س < -٤

مجموعة الحل = ح - [-٤ ، -١]

④ ∴ |س - ٣| < ٧ ∴ -٧ < س - ٣ < ٧

∴ -٤ < س < ١٠

∴ مجموعة الحل =]-٤ ، ١٠[

⑤ -١ ≤ $\frac{س - ٣}{٤}$ ≤ ١

∴ -٤ ≤ س - ٣ ≤ ٤ ∴ -١ ≤ س ≤ ٧

∴ مجموعة الحل = [-١ ، ٧]

⑥ |٢س + ٢| < -١ ∴ مجموعة الحل = ∅

⑦ ∵ $\frac{١}{|٣س|}$ ≥ ٥ ∴ |٣س| ≤ $\frac{١}{٥}$

∴ $-\frac{١}{٥}$ ≤ ٣س ≤ $\frac{١}{٥}$ ∴ $\frac{-١}{١٥}$ ≤ س ≤ $\frac{١}{١٥}$

، ∵ |٣س| = ٠ عندما س = ٠

∴ مجموعة الحل = [$\frac{-١}{١٥}$ ، $\frac{١}{١٥}$] - {٠}

⑧ ∵ $\frac{١}{|٢س - ٣|}$ > ٢ ∴ |٢س - ٣| < $\frac{١}{٢}$

∴ $-\frac{١}{٢}$ < ٢س - ٣ < $\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{٥}{٢}$ < ٢س < $\frac{٧}{٢}$ ∴ $\frac{٥}{٤}$ < س < $\frac{٧}{٤}$

، ∵ |٢س - ٣| = ٠ عندما س = $\frac{٣}{٢}$

∴ مجموعة الحل =] $\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٧}{٤}$ [- { $\frac{٣}{٢}$ }

⑨ |٢س - ٣| > ٤

∴ ٢س - ٣ > ٤ ومنها س > $\frac{٧}{٢}$

أ، ٢س - ٣ < -٤ ومنها س < $\frac{-١}{٢}$

∴ مجموعة الحل = ح - [$-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$]

⑩ ∵ $\sqrt{(س - ١)^٢}$ ≥ ٤ ∴ |س - ١| ≥ ٤

∴ س - ١ ≥ ٤ ومنها س ≥ ٥

أ، س - ١ ≤ -٤ ومنها س ≤ -٣

∴ مجموعة الحل = ح -]-٣ ، ٥[

⑪ ∵ $\sqrt{(٢س - ٣)^٢}$ ≤ ٩

∴ |٢س - ٣| ≤ ٩

∴ -٩ ≤ ٢س - ٣ ≤ ٩

∴ -٦ ≤ ٢س ≤ ١٢

∴ -٣ ≤ س ≤ ٦

∴ مجموعة الحل = [-٣ ، ٦]

⑫ ٢|س - ٢| < ٦ ∴ |س - ٢| < ٣

∴ -٣ < س - ٢ < ٣

∴ -١ < س < ٥

∴ مجموعة الحل =]-١ ، ٥[

⑬ |س + ٢| + ٢|س + ٢| ≥ ٦

∴ ٣|س + ٢| ≥ ٦

∴ |س + ٢| ≥ ٢

∴ س + ٢ ≥ ٢ ومنها س ≥ ٠

أ، س + ٢ ≤ -٢ ومنها س ≤ -٤

∴ مجموعة الحل = ح -]-٤ ، ٠[

⑩

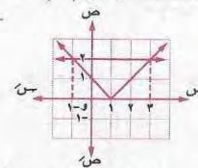
①]-٤ ، ٠[② ح - [-١ ، ٥]

③ [-٥ ، -١]

⑪

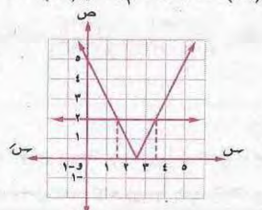
تم الحل بيانيًا وعليك التحقق جبريًا بنفسك

① د (س) = |س - ١| ، ر (س) = ٢



من الرسم : مجموعة الحل =]-١ ، ٣[

② د (س) = ٢|س - $\frac{٥}{٢}$| ، ر (س) = ٢



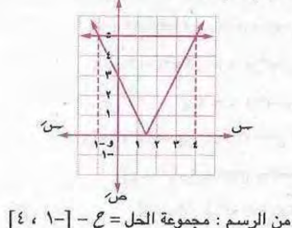
من الرسم : مجموعة الحل = ح -] $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$ [

③ ∵ $\sqrt{٤س^٢ - ١٢س + ٩}$ = $\sqrt{(٢س - ٣)^٢}$

= |٢س - ٣|

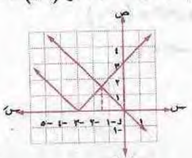
∴ د (س) = |٢س - ٣| = ٢|س - $\frac{٣}{٢}$|

، ر (س) = ٥



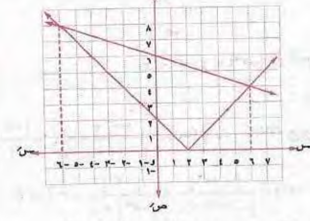
من الرسم : مجموعة الحل = ح - [-١ ، ٤]

④ د (س) = |س + ٣| ، ر (س) = − س



من الرسم : مجموعة الحل =]−∞ ، $-\frac{٣}{٢}$[

⑤ د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = $\frac{-١}{٢}$ س + ٦

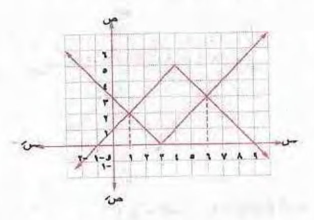


من الرسم : مجموعة الحل =]−٦ ، ٦[

⑥ ∵ |س − ٣| < ٥ − |س − ٤|

∴ د (س) = |س − ٣|

، ر (س) = ٥ − |س − ٤|



من الرسم : مجموعة الحل = ح − [١ ، ٦]

١٢

① ∵ −٤ ≤ س ≤ ٤   ∴ |س| ≤ ٤

② ∵ ٠ < س < ٦ بإضافة (−٣) إلى أطراف المتباينة.

∴ −٣ < س − ٣ < ٣   ∴ |س − ٣| < ٣

③ ∵ س ≥ ٢ أو س ≤ −٢   ∴ |س| ≥ ٢

④ ∵ س ∈ ح − [−٢ ، ٦]

∴ س > ٦ ، س < −٢

وبإضافة (−٢) إلى أطراف المتباينة

∴ س − ٢ > ٤ ، س − ٢ < −٤

∴ |س − ٢| > ٤

١٣

① نفرض أن درجة الطالب = س درجة

∴ ٦٠ < س < ١٠٠

وبإضافة (−٨٠) إلى أطراف المتباينة

∴ −٢٠ < س − ٨٠ < ٢٠

∴ |س − ٨٠| < ٢٠

② نفرض أن درجة الحرارة = س درجة

∴ ٣٥ < س < ٤٢

وبإضافة (− ٣٨,٥) إلى أطراف المتباينة

∴ −٣,٥ < س − ٣٨,٥ < ٣,٥

∴ |س − ٣٨,٥| < ٣,٥

③ نفرض أن العمق الذى تعيش فيه الطحالب الخضراء = س مترًا

∴ ٠ ≤ س ≤ ٣٠

وبإضافة (−١٥) إلى أطراف المتباينة

∴ −١٥ ≤ س − ١٥ ≤ ١٥

∴ |س − ١٥| ≤ ١٥

تمارين متنوعة

١٤

① بوضع |س| − ١ = ٠   ∴ |س| = ١

∴ س = ±١

∴ المجال = ح − {١ ، −١}

② بوضع |س| + ١ = ٠   ∴ |س| = −١ (تعارض)

∴ المجال = ح

③ بوضع |س − ٢| − ٥ = ٠

∴ |س − ٢| = ٥

∴ س − ٢ = ٥ ومنها س = ٧

أ، س − ٢ = −٥ ومنها س = −٣

∴ المجال = ح − {٧ ، −٣}

④ بوضع ٥ − |س| ≥ ٠   ∴ |س| ≤ ٥

∴ −٥ ≤ س ≤ ٥   ∴ المجال = [−٥ ، ٥]

⑤ بوضع |س| − ٥ ≥ ٠   ∴ |س| ≥ ٥

∴ س ≥ ٥ أ، س ≤ −٥

∴ المجال = ح −]−٥ ، ٥[

⑥ بوضع ٥ − |س| > ٠   ∴ |س| < ٥

∴ −٥ < س < ٥   ∴ المجال =]−٥ ، ٥[

١٥

① د (−س) = −س |−س| = −س |س|

= −د (س)   ∴ الدالة فردية.

② د (−س) = $(−س)^2$ |−س| − ١

= $س^2$ |س| − ١ = د (س)   ∴ الدالة زوجية.

③ د (−س) = $\frac{|−س − ١| + |−س + ١|}{|−س + ١| − |−س − ١|}$ = −د (س)

∴ الدالة فردية.

④ د (−س) = $\frac{(−س)^2 \text{ جتا } (−٢س)}{|−٢س| + ٥}$

= $\frac{س^2 \text{ جتا } ٢س}{|٢س| + ٥}$ = د (س)

∴ الدالة زوجية.

⑤ د (−س)

= ٢ |−س| ظا (−س) + ٢ (−س) |ظا (−س)|

= ٢ |س| (−ظا س) − ٢ س |−ظا س|

= −٢ |س| ظا س − ٢ س |ظا س|

= −د (س)   ∴ الدالة فردية.

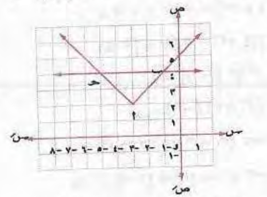
⑥ د (−س) = $\sqrt{|−س| + (−س)}$ = $\sqrt{|س| − س}$

≠ د (س) ≠ −د (س)

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

١٦

① د (س) = |س + ٣| + ٢ ، ر (س) = ٤

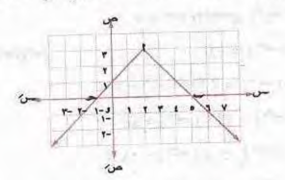


∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المثلث أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٢

= ٤ وحدة مربعة.

② د (س) = −|س − ٢| + ٣ ، ر (س) = صفر



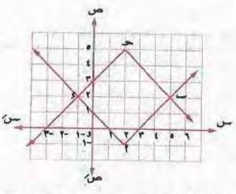
∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المثلث أ ب حـ

$= \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٣ = ٩$ وحدة مربعة.

③ د (س) = | س − ٢ | − ١

، ر (س) = ٥ − | س − ٢ |



∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المربع أ ب حـ ء $= \frac{١}{٢} (ب ء)^{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times ٦^{٢} = ١٨$ وحدة مربعة.

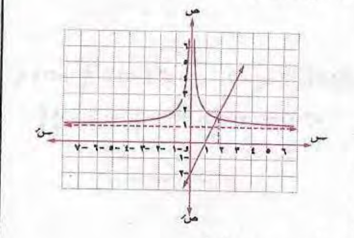
١٧

$د (−س) = \frac{|−س| + ١}{|−س|} = \frac{|س| + ١}{|س|} = د (س)$

∴ الدالة زوجية. ∵ $د (س) = \frac{|س| + ١}{|س|} = ١ + \frac{١}{|س|}$

بيانيًا :

وبوضع ر (س) = ٢ س − ٢



من الرسم : س ≃ ١,٨

∴ مجموعة الحل = {١,٨}

جبريًا : ∵ $د (س) = \begin{cases} \frac{١}{س} + ١ ، & س > ٠ \\ \frac{−١}{س} + ١ ، & س < ٠ \end{cases}$

عندما س > ٠ : ∴ $\frac{١}{س} + ١ = ٢ س − ٢$

∴ $\frac{١}{س} = ٢ س − ٣$ (بالضرب فى س)

∴ $١ = ٢ س^{٢} − ٣ س$

∴ $٢ س^{٢} − ٣ س − ١ = ٠$

∴ $س = \frac{٣ \pm \sqrt{٩ − ٤ \times ٢ \times −١}}{٢ \times ٢} = \frac{٣ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$

∴ س ≃ ١,٨ ∈]٠ ، ∞[

أ، س ≃ −٠,٣ ∌]٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ $\frac{−١}{س} + ١ = ٢ س − ٢$

∴ $\frac{−١}{س} = ٢ س − ٣$ (بالضرب فى س)

∴ $−١ = ٢ س^{٢} − ٣ س$

∴ $٢ س^{٢} − ٣ س + ١ = ٠$

∴ (٢ س − ١) (س − ١) = ٠

∴ $س = \frac{١}{٢}$ ∌]−∞ ، ٠[

أ، س = ١ ∌]−∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {١,٨}

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (د) ② (د) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (د)

⑥ (أ) ⑦ (أ) ⑧ (جـ) ⑨ (ب)

إرشادات لحل رقم ١

① ∵ $| س + ١ |^{٢} + | ٢ س + ٣ | = ٠$

∴ س + ١ = ٠ ومنها س = −١

وفى نفس الوقت يكون ٢ س + ٣ = ٠ ومنها $س = \frac{−٣}{٢}$

وهذا تعارض.

∴ مجموعة الحل = ∅

② ∵ | (س − ١) (س − ٣) | = | س − ٣ |

∴ | س − ٣ | | س − ١ | − | س − ٣ | = ٠

∴ | س − ٣ | (| س − ١ | − ١) = ٠

∴ | س − ٣ | = ٠ ومنها س = ٣

أ، | س − ١ | = ١

∴ س − ١ = ± ١ ومنها س = ٠ أ، ٢

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٢ ، ٣}

③ ∵ | س | + | ص | ≤ | س + ص |

∴ $\frac{|س| + |ص|}{|س + ص|} \geq ١$

∴ أصغر قيمة للمقدار $\frac{|س| + |ص|}{|س + ص|}$ هى ١

④ ∵ ٣٢ < ٦١ < ٦٤

∴ $٢^{٥} < ٢^{س} < ٢^{٦}$ ∴ ٥ < س < ٦

∴ | س − ٦ | = − س + ٦

، | س − ٥ | = س − ٥

∴ | س − ٦ | + | س − ٥ |

= − س + ٦ + س − ٥ = ١

⑤ ∵ $أ^{٢} ب > ٠$ ∴ ب موجبة.

، ∵ $\frac{أ}{ب} < ٠$ ∴ أ سالبة.

∴ $\sqrt{أ^{٢}} = | أ | = −أ$ ، $\sqrt{ب^{٢}} = | ب | = ب$

∴ $\sqrt{أ^{٢}} + \sqrt{ب^{٢}} − (ب − أ)$

= − أ + ب − ب + أ = صفر

⑥ ∵ −٤ ≤ س ≤ ٦

∴ −١٦ ≤ ٤ س ≤ ٢٤

∴ −٢٤ ≤ ٤ س − ٨ ≤ ١٦

∴ ٠ ≤ | ٤ س − ٨ | ≤ ٢٤

∴ أ = صفر ، ب = ٢٤

∴ أ + ب = ٢٤

⑦ ∵ $س^{٢} − ٣ | س | − ١٠ = ٠$

∴ $| س |^{٢} − ٣ | س | − ١٠ = ٠$

(| س | − ٥) (| س | + ٢) = ٠

∴ | س | = ٥ ومنها س = ± ٥

أ، | س | = −٢ (مرفوض)

∴ جذرا المعادلة هما ± ٥

∴ حاصل ضرب جذرى المعادلة يساوى − ٢٥

⑧ ∵ ٣ < | س | < ٨ ∴ ٣ < س < ٨

∴ س = ٤ أ، ٥ أ، ٦ أ، ٧

أ، −٨ < س < −٣

∴ س = −٤ أ، −٥ أ، −٦ أ، −٧

∴ عدد قيم س الصحيحة هو ٨

⑨ ∵ (ر ∘ د) (س) = ٣

∴ ر (د (س)) = ٣

∴ | | ٢ س − ٥ | + ١ | = ٣

∴ | ٢ س − ٥ | + ١ = ± ٣

∴ | ٢ س − ٥ | = ± ٣ − ١

∴ | ٢ س − ٥ | = −٤ (مرفوض)

أ، | ٢ س − ٥ | = ٢ ∴ ٢ س − ٥ = ± ٢

∴ ٢ س = ٥ ± ٢

∴ ٢ س = ٧ ومنها $س = \frac{٧}{٢}$

أ، ٢ س = ٣ ومنها $س = \frac{٣}{٢}$

∴ مجموعة الحل = $\{\frac{٧}{٢} ، \frac{٣}{٢}\}$

٢

① $(س + ١) (| س | − ١) + \frac{١}{٢} =$ صفر

عندما س ≥ ٠ :

∴ $(س + ١) (س − ١) + \frac{١}{٢} = ٠$

∴ $س^{٢} − ١ + \frac{١}{٢} = ٠$ ∴ $س^{٢} − \frac{١}{٢} = ٠$

∴ $س = \frac{١}{\sqrt{٢}} \in]٠ ، ∞[$

أ، س $= -\frac{١}{\sqrt{٢}} \notin \,]٠ ، \infty[$

، عندما س $>$ ٠ :

∴ (س + ١) (− س − ١) + $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ − (س + ١)^{٢} + $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ (س + ١)^{٢} = $\frac{١}{٢}$ ∴ س + ١ = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ س = $\left(-١ + \frac{١}{\sqrt{٢}}\right) \in \,]-\infty ، ٠]$

∴ س = $\left(-١ - \frac{١}{\sqrt{٢}}\right) \in \,]-\infty ، ٠]$

∴ مجموعة الحل

= $\left\{\frac{١}{\sqrt{٢}} ، -١ - \frac{١}{\sqrt{٢}} ، -١ + \frac{١}{\sqrt{٢}}\right\}$

② ∵ ||٢ س + ٣| − ٨| = ٥

∴ |٢ س + ٣| − ٨ = ± ٥

∴ |٢ س + ٣| = ٨ ± ٥

∴ |٢ س + ٣| = ١٣ أ، |٢ س + ٣| = ٣

∴ ٢ س + ٣ = ± ١٣	٢ س + ٣ = ± ٣
∴ ٢ س = −٣ ± ١٣	∴ ٢ س = −٣ ± ٣
∴ س = −٨ أ، ٥	∴ س = صفر أ، −٣

∴ مجموعة الحل = {−٨ ، ٥ ، صفر ، −٣}

③ |س|^{٢} − ٣ |س| + ٢ = ٠

∴ (|س| − ٢) (|س| − ١) = ٠

∴ |س| = ٢ ومنها س = ± ٢

أ، |س| = ١ ومنها س = ± ١

∴ مجموعة الحل = {٢ ، −٢ ، ١ ، −١}

④ $\sqrt{(س - \frac{١}{س})^{٢} + ٤} = ٢$

∴ $\sqrt{س^{٢} - ٢ + \frac{١}{س^{٢}} + ٤} = ٢$

∴ $\sqrt{س^{٢} + ٢ + \frac{١}{س^{٢}}} = ٢$

∴ $\sqrt{(س + \frac{١}{س})^{٢}} = ٢$ ∴ $|س + \frac{١}{س}| = ٢$

∴ س + $\frac{١}{س}$ = ± ٢   ∴ س + $\frac{١}{س}$ = ٢

ومنها س^{٢} − ٢ س + ١ = ٠

∴ (س − ١)^{٢} = ٠   ∴ س = ١

أ، س + $\frac{١}{س}$ = −٢

ومنها س^{٢} + ٢ س + ١ = ٠

∴ (س + ١)^{٢} = ٠   ∴ س = −١

∴ مجموعة الحل = {١ ، −١}

⑤ ∵ |س^{٢} − ٣| + $\frac{٢}{|س^{٢} - ٣|}$ = ٣

∴ |س^{٢} − ٣|^{٢} − ٣ |س^{٢} − ٣| + ٢ = ٠

∴ (|س^{٢} − ٣| − ١) (|س^{٢} − ٣| − ٢) = ٠

∴ |س^{٢} − ٣| − ١ = ٠ أ، |س^{٢} − ٣| − ٢ = ٠

∴ |س^{٢} − ٣| = ١	∴ |س^{٢} − ٣| = ٢
∴ س^{٢} − ٣ = ± ١	∴ س^{٢} − ٣ = ± ٢
∴ س^{٢} = ٣ ± ١	∴ س^{٢} = ٣ ± ٢
∴ س^{٢} = ٤	∴ س^{٢} = ٥
ومنها س = ± ٢	ومنها س = ± $\sqrt{٥}$
أ، س^{٢} = ٢	أ، س^{٢} = ١
ومنها س = ± $\sqrt{٢}$	ومنها س = ± ١

∴ مجموعة الحل = {± ٢ ، ± $\sqrt{٢}$ ، ± $\sqrt{٥}$ ، ± ١}

⑥ |س − ٤| + |س − ٢| = ١٠

	④	②
س − ٤	٤ − س	٤ − س
س − ٢	س − ٢	٢ − س
٢ س − ٦	٢	٦ − ٢ س

∴ عندما س $>$ ٤   ∴ ٢ س − ٦ = ١٠

∴ س = ٨ (يحقق)

، عندما س $<$ ٢   ∴ ٦ − ٢ س = ١٠

∴ س = −٢ (يحقق)

عندما ٢ $<$ س $<$ ٤   ∴ ٢ = ١٠ تعارض

∴ مجموعة الحل = {٨ ، −٢}

⑦ ∵ (|٢ س − ٣| − ٥) (|٢ س − ٣| + ٥) $>$ ١١

∴ |٢ س − ٣|^{٢} − ٢٥ $>$ ١١

∴ |٢ س − ٣|^{٢} $>$ ٣٦

∴ |٢ س − ٣| $>$ ٦

∴ ٢ س − ٣ $>$ ٦ ومنها س $>$ $\frac{٩}{٢}$

أ، ٢ س − ٣ $<$ −٦ ومنها س $<$ $\frac{-٣}{٢}$

∴ مجموعة الحل = ح − $\left[\frac{-٣}{٢} ، \frac{٩}{٢}\right]$

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الأولى

١

① ع (١٠) = ٨ × ١٠ = ٨٠ سم/ث

② ع (١٥٠) = ٨٠ سم/ث

③ ع (٢١٠) = −٤ × ٢١٠ + ٨٨٠ = ٤٠ سم/ث

٢

ح (ل) = ٤ ل

① ح (٣) = ٤ × ٣ = ١٢ وحدة طول.

② ح $\left(\frac{١٥}{٤}\right)$ = ٤ × $\frac{١٥}{٤}$ = ١٥ وحدة طول.

٣

م (نق) = π نق^{٢}

① م $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = $\frac{١}{٤}$ π وحدة مربعة.

② م (٥) = ٢٥ π وحدة مربعة.

٤

① د (س) = ٣,٠ س + ٨ × ٧

② نعم دالة أحادية لأنه بفرض أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ٣,٠ أ + ٨ × ٧

، د (ب) = ٣,٠ ب + ٨ × ٧

وبفرض أن د (أ) = د (ب)

∴ ٣,٠ أ + ٨ × ٧ = ٣,٠ ب + ٨ × ٧

∴ ٣,٠ أ = ٣,٠ ب   ∴ أ = ب

٥

د (س) = ٥٠ س



٦

* ∵ ف = ع × ن

، ∵ ن = ٣ دقائق ، ع = ٣٠ مترًا/دقيقة

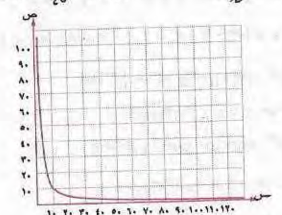
∴ ف = ٣ × ٣٠ = ٩٠   ∴ ع = $\frac{٩٠}{ن}$

∴ ع ∝ $\frac{١}{ن}$

∴ ع تتغير عكسيًا بتغير الزمن.

* ع = $\frac{٩٠}{ن}$ * عندما ع = ٤٥ مترًا/دقيقة.

∴ ٤٥ = $\frac{٩٠}{ن}$ ∴ ن = $\frac{٩٠}{٤٥}$ = ٢ دقيقة.



٧

① ∵ النقطة (٠ ، ٣) تنتمى لمنحنى الدالة

∴ (٠ ، ٣) تحقق معادلة الدالة.

د (س) = أ (س − ٢)^{٢} + ٤

∴ ٣ = أ (٠ − ٢)^{٢} + ٤

∴ ٣ = ٤ أ + ٤

∴ ٤ أ = −١

∴ أ = −$\frac{١}{٤}$

② ∵ نقطة رأس المنحنى هى : (٢ ، ٤)

∴ أقصى ارتفاع للبوابة = ٤ أمتار.

③ عرض البوابة = ٢ + ٢ = ٤ أمتار.



٨

①

من الرسم :

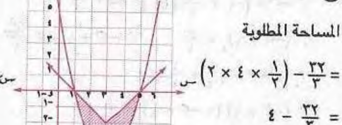
ل = ٤ وحدة طول.

، ع = ٤ وحدة طول.

∴ المساحة المطلوبة

= $\frac{٢}{٣}$ ل ع = $\frac{٢}{٣}$ × ٤ × ٤ = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

②



المساحة المطلوبة

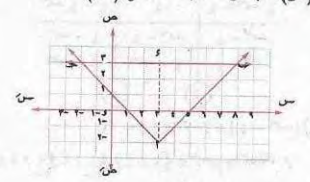
= $\frac{٣٢}{٣}$ − ($\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٢)

= $\frac{٣٢}{٣}$ − ٤

= $\frac{٢٠}{٣}$ وحدة مربعة.

٩

د (س) = | س − ٣ | − ٢ ، ر (س) = ٣



∵ طول الوحدة = ٨ أمتار.

، ∵ ب حـ = ١٠ وحدات.

∴ طول القاعدة = ١٠ × ٨ = ٨٠ متر.

، ∵ أ ء = ٥ وحدات.

∴ الارتفاع = ٥ × ٨ = ٤٠ متر.

∴ مساحة الأرض = مساحة Δ أ ب حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٨٠ × ٤٠ = ١٦٠٠ متر مربع.

١٠

يتقاطع الطريقان عندما د (س) = ر (س)

∴ | س − ٥ | = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

عندما س ≥ ٥ : س − ٥ = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

∴ ١$\frac{٢}{٣}$ س = ١٠ ∴ س = ٦ ∈ [٥ ، ∞[

، عندما س < ٥ : ∴ −س + ٥ = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

∴ $\frac{١}{٣}$ س = ٠ ∴ س = ٠ ∈]−∞ ، ٥[

، ∵ د (٦) = | ٦ − ٥ | = ١

∴ أ (٦ ، ١) نقطة تقاطع المنحنيين.

، د (٠) = | ٠ − ٥ | = ٥

∴ ب (٠ ، ٥) نقطة تقاطع المنحنيين.

∴ أ ب = $\sqrt{(٦ - ٠)^{٢} + (١ - ٥)^{٢}}$ = ٢ $\sqrt{١٣}$

، ∵ وحدة الأطوال تمثل ٥ كيلو مترات

∴ أ ب = ٥ × ٢ $\sqrt{١٣}$ = ١٠ $\sqrt{١٣}$ ≃ ٣٦ كم

١١

بفرض أن طول المتقدم لشغل الوظيفة = س سم

∴ ١٧٨ ≤ س ≤ ١٩٢ وبإضافة (− ١٨٥)

إلى أطراف المتباينة.

∴ −٧ ≤ س − ١٨٥ ≤ ٧

∴ | س − ١٨٥ | ≤ ٧

١٢

① بعد ثانيتين : ف = ٨ | ٥ − ٢ | = ٢٤ سم.

[فى اتجاه الحركة من أ إلى ب]

، بعد ٨ ثوان : ف = ٨ | ٥ − ٨ | = ٢٤ سم.

[فى اتجاه الحركة من ب إلى حـ]

② ∵ ٨ | ٥ − ن | = ١٦ ∴ | ن − ٥ | = ٢

∴ ن − ٥ = −٢ ومنها ن = ٣

[فى اتجاه الحركة من أ إلى ب]

أ، ن − ٥ = ٢ ومنها ن = ٧

[فى اتجاه الحركة من ب إلى حـ]

③ ∵ ٨ | ن − ٥ | < ٨ ∴ | ن − ٥ | < ١

∴ −١ < ن − ٥ < ١ ∴ ٤ < ن < ٦

∴ ن ∈]٤ ، ٦[

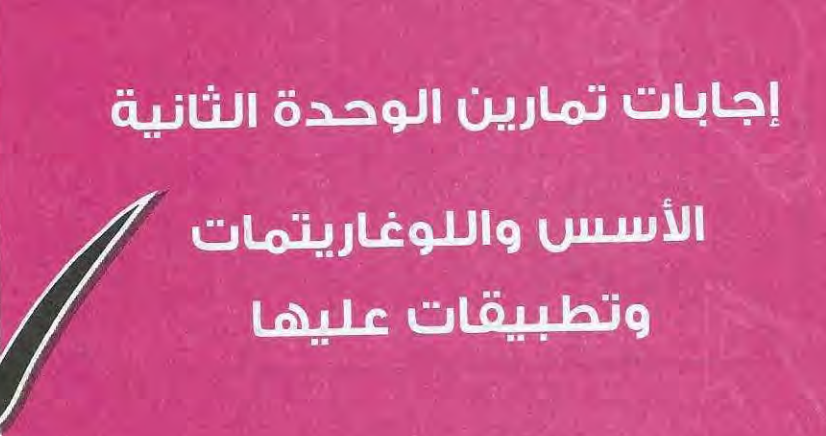
١٣

∵ ب = (٨ ، ٤)

، ∵ د (٨) = $\frac{٤}{٣}$ | ٨ − ٥ | = ٤

∴ ب تقع على منحنى الدالة د

∴ الكرة السوداء سوف تسقط فى الجيب ب


إجابات تمارين الوحدة الثانية
الأسس واللوغاريتمات
وتطبيقات عليها

إجابات الوحدة الثانية

إجابات تمارين 7

أولا: أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب)	(٢) (د)	(٣) (ب)	(٤) (جـ)
(٥) (ب)	(٦) (جـ)	(٧) (ب)	(٨) (جـ)
(٩) (ب)	(١٠) (أ)	(١١) (جـ)	(١٢) (د)
(١٣) (ب)	(١٤) (د)	(١٥) (جـ)	(١٦) (جـ)
(١٧) (جـ)	(١٨) (ب)	(١٩) (ب)	(٢٠) (ب)
(٢١) (د)	(٢٢) (جـ)	(٢٣) (أ)	(٢٤) (أ)
(٢٥) (جـ)	(٢٦) (أ)	(٢٧) (ب)	(٢٨) (جـ)
(٢٩) (أ)	(٣٠) (د)	(٣١) (ب)	(٣٢) (أ)
(٣٣) (ب)	(٣٤) (ب)	(٣٥) (ب)	(٣٦) (د)
(٣٧) (جـ)	(٣٨) (د)	(٣٩) (أ)	(٤٠) (أ)
(٤١) (أ)	(٤٢) (د)	(٤٣) (جـ)	(٤٤) (د)
(٤٥) (أ)	(٤٦) (جـ)		

ثانيا: الأسئلة المقالية

١

(١) $\frac{(٢٧)^{-٣} \times (١٢)^{٢}}{١٦ \times (٨١)^{-٢}} = \frac{(٣^{٣})^{-٣} \times (٣)^{٢} \times (٢^{٢})^{٢}}{٢^{٤} \times (٣^{٤})^{-٢}}$

$= \frac{٣^{-٩} \times ٣^{٢} \times ٢^{٤}}{٢^{٤} \times ٣^{-٨}} = ٣^{-٩+٢+٨} = ٣$

(٢) $\frac{٩^{٤\text{ن}+١} \times ٤^{٢-٢\text{ن}}}{٣^{٩\text{ن}+١} \times ٤٨^{١-\text{ن}}}$

$= \frac{(٣^{٢})^{٤\text{ن}+١} \times (٢^{٢})^{٢-٢\text{ن}}}{٣^{٩\text{ن}+١} \times ٣^{١-\text{ن}} \times (٢^{٤})^{١-\text{ن}}}$

$= \frac{٣^{٨\text{ن}+٢} \times ٢^{٤-٤\text{ن}}}{٣^{٩\text{ن}+١} \times ٣^{١-\text{ن}} \times ٢^{٤-٤\text{ن}}}$

$= ٣^{٨\text{ن}+٢-٩\text{ن}-١-١+\text{ن}} \times ٢^{٤-٤\text{ن}-٤+٤\text{ن}}$

$= ٣^{٠} \times ٢^{٠} = ١ \times ١ = ١$

(٣) $\frac{١٢٥ \times (١٥)^{\text{ن}-٣} \times (٢٥)^{\text{م}+\text{ن}}}{(٧٥)^{\text{ن}} \times (٥)^{\text{ن}+٢\text{م}}}$

$= \frac{٥^{٣} \times ٥^{\text{ن}-٣} \times ٣^{\text{ن}-٣} \times (٥^{٢})^{\text{م}+\text{ن}}}{٣^{\text{ن}} \times (٥^{٢})^{\text{ن}} \times ٥^{\text{ن}+٢\text{م}}}$

$= \frac{٥^{٣} \times ٥^{\text{ن}-٣} \times ٣^{\text{ن}-٣} \times ٥^{٢\text{م}+٢\text{ن}}}{٣^{\text{ن}} \times ٥^{٢\text{ن}} \times ٥^{\text{ن}+٢\text{م}}}$

$= ٥^{٣+\text{ن}-٣+٢\text{م}+٢\text{ن}-٢\text{ن}-\text{ن}-٢\text{م}} \times ٣^{\text{ن}-٣-\text{ن}}$

$= ٥^{٠} \times ٣^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$

(٤) $(١٨)^{\frac{١}{٢}} \times (١٢)^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{(٢٤)^{\frac{١}{٢}}}$

$= ٢^{\frac{١}{٢}} \times (٣^{٢})^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{٣}{٢}} \times (٢^{٢})^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{(٢^{٣})^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{١}{٢}}}$

$= ٢^{\frac{١}{٢}} \times ٣ \times ٣^{\frac{٣}{٢}} \times ٢^{٣} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}} \times ٣^{-\frac{١}{٢}}$

$= ٢^{\frac{١}{٢}+٣-\frac{٣}{٢}} \times ٣^{١+\frac{٣}{٢}-\frac{١}{٢}}$

$= ٢^{٢} \times ٣^{٢} = ٣٦$

٢

(١) الطرف الأيمن

$= \frac{(٣^{٢})^{\text{ص}-\frac{١}{٢}} \times ٧^{\frac{\text{ص}(\text{ص}+٣)}{\text{ص}}}}{(٣^{٤})^{\text{ص}-١} \times ٣^{٥-\text{ص}} \times ٧^{٥-\text{ص}} \times (٧^{٢})^{\text{ص}-١}}$

$= \frac{٣^{٢\text{ص}-١} \times ٧^{\text{ص}+٣}}{٣^{٤\text{ص}-٤} \times ٣^{٥-\text{ص}} \times ٧^{٥-\text{ص}} \times ٧^{٢\text{ص}-٢}}$

$= ٣^{٢\text{ص}-١-٤\text{ص}+٤-٥+\text{ص}}$

$\times ٧^{\text{ص}+٣-٥+\text{ص}-٢\text{ص}+٢}$

$= ٣^{-٢} \times ٧^{\text{صفر}} = ٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$

(٢) الطرف الأيمن $= \frac{(٧^{٣})^{٢\text{س}-\frac{١}{٣}} \times (٢^{٢})^{٣\text{س}+١}}{(٢^{٢})^{٣\text{س}} \times (٧^{٢})^{٣\text{س}} \times ٢^{٢}}$

$= \frac{٧^{٦\text{س}-١} \times ٢^{٦\text{س}+٢}}{٢^{٦\text{س}} \times ٧^{٦\text{س}} \times ٢^{٢}}$

$= ٢^{٦\text{س}+٢-٦\text{س}-٢}$

$\times ٧^{٦\text{س}-١-٦\text{س}}$

$= ٢^{\text{صفر}} \times ٧^{-١} = \frac{١}{٧}$

(٣) الطرف الأيمن

$= \frac{٥^{٣} \times (٢^{٢})^{\frac{٣}{٨}} \times ٢^{-\frac{١}{٤}} \times ٥^{-\frac{١}{٤}}}{(٢^{٢})^{\frac{٥}{٨}} \times ٢^{-\frac{٣}{٤}} \times ٣^{-\frac{٣}{٤}} \times ٣^{\frac{٣}{٤}} \times ٥^{\frac{٣}{٤}}}$

$= \frac{٥^{٣} \times ٢^{\frac{٣}{٤}} \times ٢^{-\frac{١}{٤}} \times ٥^{-\frac{١}{٤}}}{٢^{\frac{٥}{٤}} \times ٢^{-\frac{٣}{٤}} \times ٣^{-\frac{٣}{٤}} \times ٣^{\frac{٣}{٤}} \times ٥^{\frac{٣}{٤}}}$

$= ٥^{٣-\frac{١}{٤}-\frac{٣}{٤}} \times ٢^{\frac{٣}{٤}-\frac{١}{٤}-\frac{٥}{٤}+\frac{٣}{٤}} \times ٣^{\frac{٣}{٤}-\frac{٣}{٤}}$

$= ٥^{٢} \times ٢^{٠} \times ٣^{٠} = ٢٥ \times ١ \times ١ = ٢٥$

(٤) الطرف الأيمن

$= \frac{٣ \times ٢^{\text{س}+٢} + ٢^{\text{س}+٢}}{٢^{\text{س}+٣} - ٢ \times ٣ \times ٢^{\text{س}}}$

$= \frac{٢^{\text{س}+٢}(٣+١)}{٢^{\text{س}+١}(٢^{٢}-٣)} = \frac{٢^{\text{س}+٢} \times ٢^{٢}}{٢^{\text{س}+١} \times ١} = ٢^{٣} = ٨$

٣

(١) $\because \text{س}^{\frac{٧}{٢}} = ٢^{٧}$ $\quad \therefore \text{س} = (٢^{٧})^{\frac{٢}{٧}} = ٤$

$\therefore$ م.ح $= \{٤\}$

(٢) $\because \text{س}^{-\frac{٥}{٢}} = ٢^{\frac{٥}{٢}}$ $\quad \therefore \text{س} = (٢^{\frac{٥}{٢}})^{-\frac{٢}{٥}}$

$\therefore \text{س} = ٢^{-١} = \frac{١}{٢}$ $\quad \therefore$ م.ح $= \{\frac{١}{٢}\}$

(٣) $(\text{س}-١)^{\frac{٥}{٣}} = ٢^{٥}$

$\therefore \text{س} - ١ = (٢^{٥})^{\frac{٣}{٥}} = ٢^{٣} = ٨$

$\therefore \text{س} = ٩$ $\quad \therefore$ م.ح $= \{٩\}$

(٤) $٢\text{س} + ٣ = \pm(٣^{٤})^{\frac{٣}{٤}}$ $\quad \therefore ٢\text{س} + ٣ = \pm ٢٧$

$\therefore ٢\text{س} = ٢٤$ ، أ $٢\text{س} = -٣٠$

$\therefore \text{س} = ١٢$ ، أ $\text{س} = -١٥$

$\therefore$ م.ح $= \{١٢ ، -١٥\}$

(٥) $\text{س} + ١ = (٣٢^{-\frac{١}{٢}})^{-\frac{٢}{٥}} = ٣٢^{\frac{١}{٥}} = (٢^{٥})^{\frac{١}{٥}}$

$\therefore \text{س} + ١ = ٢$ $\quad \therefore \text{س} = ١$

$\therefore$ م.ح $= \{١\}$

(٦) $\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٩ = (٣^{٥})^{\frac{٢}{٥}}$

$\therefore \text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٩ = ٩$

$\therefore \text{س}^{٢} - ٥\text{س} = ٠$ $\quad \therefore \text{س}(\text{س} - ٥) = ٠$

$\therefore \text{س} = ٠$ أ، $\text{س} = ٥$ $\quad \therefore$ م.ح $= \{٠ ، ٥\}$

(٧) $\because \sqrt{\text{س}} + ٢ = ٩$ $\quad \therefore \sqrt{\text{س}} = ٧$

$\therefore \text{س} = ٤٩$ $\quad \therefore$ م.ح $= \{٤٩\}$

(٨) $(\text{س}^{\frac{٢}{٥}} - ١)(\text{س}^{\frac{٢}{٥}} - ٤) = ٠$

$\therefore \text{س}^{\frac{٢}{٥}} = ١$ ومنها $\text{س} = \pm ١$

أ، $\text{س}^{\frac{٢}{٥}} = ٤$ ومنها $\text{س} = \pm(٢^{٢})^{\frac{٥}{٢}} = \pm ٣٢$

$\therefore$ م.ح $= \{١ ، -١ ، ٣٢ ، -٣٢\}$

(٩) $(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ١)(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ٩) = ٠$

$\therefore \text{س}^{\frac{٢}{٣}} = ١$ $\quad \therefore \text{س} = \pm ١$

أ، $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} = ٩$ $\quad \therefore \text{س} = \pm(٣^{٢})^{\frac{٣}{٢}} = \pm ٢٧$

$\therefore$ م.ح $= \{١ ، -١ ، ٢٧ ، -٢٧\}$

(١٠) $(\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ١)(\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٢) = ٠$

$\therefore \text{س}^{\frac{١}{٢}} = ١$ $\quad \therefore \text{س} = ١$

أ، $\text{س}^{\frac{١}{٢}} = ٢$ $\quad \therefore \text{س} = (٢)^{٢} = ٤$

$\therefore$ م.ح $= \{١ ، ٤\}$

(١١) $\text{س} - ٨\sqrt{\text{س}} + ١٥ = ٠$

$\therefore (\sqrt{\text{س}} - ٣)(\sqrt{\text{س}} - ٥) = ٠$

$\therefore \sqrt{\text{س}} = ٣$ ومنها $\text{س} = ٩$

أ، $\sqrt{\text{س}} = ٥$ ومنها $\text{س} = ٢٥$

$\therefore$ م.ح $= \{٩ ، ٢٥\}$

(١٢) $\text{س}^{\frac{٥}{٣}} - \text{س}^{\frac{٥}{٦}} - ٦ = ٠$

$\therefore (\text{س}^{\frac{٥}{٦}} - ٣)(\text{س}^{\frac{٥}{٦}} + ٢) = ٠$

∴ $س^{\frac{٥}{٦}} = ٣$ ∴ $س = ٣^{\frac{٦}{٥}} = ٣,٧$

أ، $س^{\frac{٥}{٦}} = -٢$ (مرفوض)

∴ م.ح = {٣,٧}

⑬ $س^{\frac{٤}{٥}} - ٣ س^{\frac{٢}{٥}} - ٤ = ٠$

∴ $(س^{\frac{٢}{٥}} + ١)(س^{\frac{٢}{٥}} - ٤) = ٠$

∴ $س^{\frac{٢}{٥}} = -١$ (مرفوض)

أ، $س^{\frac{٢}{٥}} = ٤$

∴ $س = \pm (٢^{٢})^{\frac{٥}{٢}} = \pm ٢^{٥} = \pm ٣٢$

∴ م.ح = {-٣٢ ، ٣٢}

⑭ بالضرب × $\sqrt[٥]{س}$

∴ $(\sqrt[٥]{س})^{٢} - ٣\sqrt[٥]{س} + ٢ = ٠$

∴ $س^{\frac{٢}{٥}} - ٣ س^{\frac{١}{٥}} + ٢ = ٠$

∴ $(س^{\frac{١}{٥}} - ١)(س^{\frac{١}{٥}} - ٢) = ٠$

∴ $س^{\frac{١}{٥}} = ١$ ومنها س = ١

أ، $س^{\frac{١}{٥}} = ٢$ ومنها س = ٣٢

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٣٢}

٤

① $٥^{٢س-١} = \frac{١}{١٢٥}$ ∴ $٥^{٢س-١} = \frac{١}{٥^{٣}}$

∴ $٥^{٢س-١} = ٥^{-٣}$ ∴ ٢س - ١ = -٣

∴ ٢س = -٢ ∴ س = -١

∴ م.ح = {-١}

② $٥^{س+٢} = س^{س+٢}$ ∴ إما س = ٥

أ، س + ٢ = ٠ ∴ س = -٢

∴ م.ح = {-٢ ، ٥}

③ $٢^{س^{٢}-٩} = ١$ ∴ $س^{٢} - ٩ = ٠$

∴ $س^{٢} = ٩$ ∴ س = ±٣

∴ م.ح = {٣ ، -٣}

④ $(٣\sqrt{٣})^{|س|} = ٢٧$

∴ $(٣\sqrt{٣})^{|س|} = (٣\sqrt{٣})^{٢}$

∴ |س| = ٢ ∴ س = ±٢

∴ م.ح = {٢ ، -٢}

⑤ ∵ $٣^{|٣س-٤|} = ٣^{٤س-٤}$

∴ |٣س - ٤| = ٤س - ٤

عند س ≥ $\frac{٤}{٣}$

∴ ٣س - ٤ = ٤س - ٤

∴ س = ٠ (لا يحقق) ، عند س < $\frac{٤}{٣}$

∴ -٣س + ٤ = ٤س - ٤

∴ ٧س = ٨ ∴ س = $\frac{٨}{٧}$ (يحقق)

∴ م.ح = {$\frac{٨}{٧}$}

⑥ $(\frac{٣}{٥})^{٢س-١} = \frac{٢٧}{١٢٥}$

∴ $(\frac{٣}{٥})^{٢س-١} = (\frac{٣}{٥})^{٣}$

∴ ٢س - ١ = ٣ ∴ ٢س = ٤

∴ س = ٢ ∴ م.ح = {٢}

⑦ $٥^{س-١} \times ٧^{-(س-١)} = \frac{٢٥}{٤٩}$

∴ $٥^{س-١} \times ٧^{-(س-١)} = (\frac{٥}{٧})^{٢}$

∴ $(\frac{٥}{٧})^{س-١} = (\frac{٥}{٧})^{٢}$

∴ س - ١ = ٢ ∴ س = ٣

∴ م.ح = {٣}

⑧ ∵ $\frac{٩^{س+١} \times ٤^{س-١}}{٣٦^{س}} = \frac{٣^{٢س+٢} \times ٢^{٢س-٢}}{٢^{٢س} \times ٣^{٢س}}$

$= ٣^{٢س+٢-٢س} \times ٢^{٢س-٢-٢س}$

$= ٣^{٢} \times ٢^{-٢} = (\frac{٣}{٢})^{٢}$

∴ $(\frac{٣}{٢})^{٢} = (\frac{٣}{٢})^{س}$ ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

⑨ $\frac{١٢^{٣س-٢} \times ٩^{س+١}}{١٨^{٢س} \times ٤^{٢س-٢}} = ٩$

∴ $\frac{(٣ \times ٢^{٢})^{٣س-٢} \times (٣^{٢})^{س+١}}{(٢ \times ٣^{٢})^{٢س} \times (٢^{٢})^{٢س-٢}} = ٩$

∴ $\frac{٣^{٣س-٢} \times ٢^{٦س-٤} \times ٣^{٢س+٢}}{٢^{٢س} \times ٣^{٤س} \times ٢^{٤س-٤}} = ٩$

∴ $٣^{٣س-٢+٢س+٢-٤س}$

$\times ٢^{٦س-٤-٢س-٤س+٤} = ٩$

∴ $٣^{س} \times ٢^{٠} = ٣^{٢}$ ∴ $٣^{س} = ٣^{٢}$

∴ س = ٢ ∴ م.ح = {٢}

⑩ $\frac{١}{٢٧}(\sqrt{٣})^{س+٢} = ١$

∴ $\frac{١}{(\sqrt{٣})^{٦}} \times (\sqrt{٣})^{س+٢} = ١$

∴ $(\sqrt{٣})^{س+٢} = (\sqrt{٣})^{٦}$

∴ س + ٢ = ٦ ∴ س = ٤

∴ م.ح = {٤}

⑪ $(\sqrt{٣})^{س^{٢}-٥س} = ١$ ∴ $س^{٢} - ٥س = ٠$

∴ س(س - ٥) = ٠ ∴ س = ٠ أ، س = ٥

∴ م.ح = {٠ ، ٥}

⑫ ∵ $٥^{س^{٢}-٥س} = \frac{١٦}{١٠٠٠٠} = \frac{١}{٦٢٥}$

∴ $٥^{س^{٢}-٥س} = ٥^{-٤}$ ∴ $س^{٢} - ٥س = -٤$

∵ $س^{٢} - ٥س + ٤ = ٠$

∴ (س - ١)(س - ٤) = ٠

∴ س = ١ أ، س = ٤ ∴ م.ح = {١ ، ٤}

⑬ $٥^{س^{٢}} = ٢٥^{س+٤}$ ∴ $٥^{س^{٢}} = ٥^{٢س+٨}$

∴ $س^{٢} = ٢س + ٨$ ∴ $س^{٢} - ٢س - ٨ = ٠$

∴ (س + ٢)(س - ٤) = ٠

∴ س = -٢ أ، س = ٤

∴ م.ح = {-٢ ، ٤}

⑭ $٣^{س^{٢}-٤٢} = (\frac{١}{٣})^{س}$ ∴ $٣^{س^{٢}-٤٢} = ٣^{-س}$

∴ $س^{٢} - ٤٢ = -س$

∴ $س^{٢} + س - ٤٢ = ٠$

∴ (س - ٦)(س + ٧) = ٠

∴ س - ٦ = ٠ ومنها س = ٦

أ، س + ٧ = ٠ ومنها س = -٧

∴ م.ح = {٦ ، -٧}

⑮ $(\sqrt{٧})^{|س+٢|} = ٤٩$

∴ $(\sqrt{٧})^{|س+٢|} = (\sqrt{٧})^{٤}$

∴ |س + ٢| = ٤ ∴ س + ٢ = ±٤

∴ إما س + ٢ = ٤ ومنها س = ٢

أ، س + ٢ = -٤ ومنها س = -٦

∴ م.ح = {٢ ، -٦}

⑯ $٣^{٢س-٣} \times ٧^{٦-٤س} = ١$

∴ $٣^{٢س-٣} \times ٧^{-٢(٢س-٣)} = ١$

∴ $٣^{٢س-٣} \times \frac{١}{(٧^{٢})^{٢س-٣}} = ١$

∴ $٣^{٢س-٣} = (٤٩)^{٢س-٣}$

∴ ٢س - ٣ = ٠ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$

∴ م.ح = {$\frac{٣}{٢}$}

⑰ $\sqrt{٩^{س} - ٢ \times ٣^{س+١} + ٩} = ٢٤$

∴ $\sqrt{٣^{٢س} - ٢ \times ٣ \times ٣^{س} + ٩} = ٢٤$

∴ $\sqrt{(٣^{س} - ٣)^{٢}} = ٢٤$ ∴ $|٣^{س} - ٣| = ٢٤$

∴ $٣^{س} = ٢٧$ ∴ $٣^{س} = ٣^{٣}$

∴ س = ٣ أ، $٣^{س} - ٣ = -٢٤$

∴ $٣^{س} = -٢١$ (مرفوض)

∴ م.ح = {٣}

٥

(١) $٥^{س+١} + ٥^{س-١} = ٢٦$

∴ $٥^{س}(٥ + ٥^{-١}) = ٢٦$

∴ $٥^{س} \times \frac{٢٦}{٥} = ٢٦$

∴ $٥^{س} = ٥$ ∴ $س = ١$

∴ مجموعة الحل = {١}

(٢) $٣^{س+٣} - ٣^{س+٢} = ١٦٢$

∴ $٣^{س}(٣^{٣} - ٣^{٢}) = ١٦٢$

∴ $٣^{س} \times ١٨ = ١٦٢$

∴ $٣^{س} = ٩$ ∴ $٣^{س} = ٣^{٢}$

∴ $س = ٢$ ∴ م.ح = {٢}

(٣) $٧^{٢-س} + ٧^{-س} = ٥٠$

∴ $٧^{-س}(٧^{٢} + ١) = ٥٠$

∴ $٧^{-س} \times ٥٠ = ٥٠$ ∴ $٧^{-س} = ١$

∴ $س = ٠$ ∴ م.ح = {٠}

(٤) $٥^{٢س} + ٢٥ = ٢٦ \times ٥^{س}$

∴ $٥^{٢س} - ٢٦ \times ٥^{س} + ٢٥ = ٠$

∴ $(٥^{س} - ٢٥)(٥^{س} - ١) = ٠$

∴ $٥^{س} = ٢٥$ ومنها $س = ٢$

، $٥^{س} = ١$ ومنها $س = ٠$

∴ م.ح = {٢ ، ٠}

(٥) $٢^{س} + ٢^{٥-س} = ١٢$

∴ $٢^{س} + \frac{٢^{٥}}{٢^{س}} = ١٢$ بالضرب × $٢^{س}$

∴ $٢^{٢س} + ٣٢ = ١٢ \times ٢^{س}$

∴ $٢^{٢س} - ١٢ \times ٢^{س} + ٣٢ = ٠$

∴ $(٢^{س} - ٤)(٢^{س} - ٨) = ٠$

∴ $٢^{س} = ٤$ ومنها $س = ٢$

أ، $٢^{س} = ٨$ ومنها $س = ٣$

∴ م.ح = {٢ ، ٣}

(٦) $(\frac{١}{٢})^{س+١} + (\frac{١}{٢})^{س+٢} + (\frac{١}{٢})^{س+٥} = ٨٤$

∴ $(\frac{١}{٢})^{س}\left(\frac{١}{٢} + (\frac{١}{٢})^{٢} + (\frac{١}{٢})^{٥}\right) = ٨٤$

∴ $(\frac{١}{٢})^{س} \times \frac{٢١}{٣٢} = ٨٤$ ∴ $(\frac{١}{٢})^{س} = ٨٤ \times \frac{٣٢}{٢١}$

∴ $(\frac{١}{٢})^{س} = ١٢٨$ ∴ $(\frac{١}{٢})^{س} = (\frac{١}{٢})^{-٧}$

∴ $س = -٧$ ∴ م.ح = {-٧}

(٧) $٢^{٢س+١} - ٣٣(٢)^{س} + ١٦ = ٠$

∴ $٢(٢)^{٢س} - ٣٣(٢)^{س} + ١٦ = ٠$

∴ $[٢(٢)^{س} - ١][٢^{س} - ١٦] = ٠$

∴ إما $٢(٢)^{س} = ١$ ∴ $٢^{س+١} = ١$

∴ $س + ١ = ٠$ ∴ $س = -١$

أ، $٢^{س} = ١٦$ ∴ $٢^{س} = ٢^{٤}$ ∴ $س = ٤$

∴ مجموعة الحل = {-١ ، ٤}

(٨) $٥^{٢س-٢} - ٦(٥)^{س-١} + ٥ = ٠$

∴ $٥^{٢(س-١)} - ٦(٥)^{س-١} + ٥ = ٠$

∴ $(٥^{س-١} - ١)(٥^{س-١} - ٥) = ٠$

∴ إما $٥^{س-١} = ١$ ومنها $س - ١ = ٠$

∴ $س = ١$ أ، $٥^{س-١} = ٥$

∴ $س - ١ = ١$ ∴ $س = ٢$

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}

(٩) $٩^{س^{٢}-١} - ٣٦(٣)^{س^{٢}-٢} + ٣ = ٠$

∴ $(٣)^{٢(س^{٢}-١)} - \frac{٣٦}{٩}(٣)^{س^{٢}-١} + ٣ = ٠$

∴ $(٣)^{٢(س^{٢}-١)} - ٤(٣)^{س^{٢}-١} + ٣ = ٠$

∴ $(٣^{س^{٢}-١} - ١)(٣^{س^{٢}-١} - ٣) = ٠$

∴ إما $٣^{س^{٢}-١} = ١$

∴ $س^{٢} - ١ = ٠$ ∴ $س^{٢} = ١$

∴ $س = \pm ١$ أ، $٣^{س^{٢}-١} = ٣$

∴ $س^{٢} - ١ = ١$ ∴ $س^{٢} = ٢$

∴ $س = \pm\sqrt{٢}$

∴ مجموعة الحل = {١ ، -١ ، $\sqrt{٢}$ ، $-\sqrt{٢}$}

(١٠) $١٠^{س} - ٥^{س-١} \times ٢^{س-٢} = ٩٥٠$

∴ $١٠^{س} - \frac{٥^{س}}{٥} \times \frac{٢^{س}}{٤} = ٩٥٠$

∴ $١٠^{س} - \frac{١}{٢٠}(١٠)^{س} = ٩٥٠$

وبالضرب × ٢٠

∴ $٢٠(١٠)^{س} - (١٠)^{س} = ٢٠ \times ٩٥٠$

∴ $١٩(١٠)^{س} = ٢٠ \times ٩٥٠$

∴ $١٠^{س} = ١٠٠٠$ ∴ $١٠^{س} = ١٠^{٣}$

∴ $س = ٣$ ∴ مجموعة الحل = {٣}

٦

(١) $س^{\frac{٣}{٢}} = ٢٧$ ∴ $س = (٣^{٣})^{\frac{٢}{٣}} = ٣^{٢} = ٩$

، $٣ ص^{\frac{٢}{٣}} = ٢٧$ ∴ $ص^{\frac{٢}{٣}} = ٩$

∴ $ص = \pm(٣^{٢})^{\frac{٣}{٢}} = \pm ٢٧$

∴ $س + ص = ٩ + ٢٧ = ٣٦$

أ، $س + ص = ٩ - ٢٧ = -١٨$

(٢) ∵ $س^{\frac{٤}{٣}} = ٣^{٤}$

∴ $س = \pm(٣^{٤})^{\frac{٣}{٤}} = \pm ٢٧$

، ∵ $٩ ص^{\frac{-٢}{٣}} = ٨١$ ∴ $ص^{\frac{-٢}{٣}} = ٩ = ٣^{٢}$

∴ $ص^{\frac{٢}{٣}} = ٣^{-٢}$

∴ $ص = \pm(٣^{-٢})^{\frac{٣}{٢}} = \pm(٣)^{-٣} = \pm\frac{١}{٢٧}$

∴ $|٢ س ص| = \left|٢ \times (\pm ٢٧) \times (\pm\frac{١}{٢٧})\right| = ٢$

٧

(١) خطأ لأن $(-٩)^{\frac{٢}{٢}} \ne \sqrt{(-٩)^{٢}}$ لوجود عامل مشترك بين البسط والمقام للأس.

(٢) خطأ لأن س = ± ٣ لأن الأس زوجي.

٨

(١) ∵ $٢^{٢س+٢ص} = ٢^{٧}$

∴ $٢س + ٢ص = ٧$ (١)

، ∵ $٥^{س-٢ص-٣} = ١$

∴ $س - ٢ص = ٣$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $٣س = ١٠$ ∴ $س = \frac{١٠}{٣}$

، بالتعويض في (١) : ∴ $ص = \frac{١}{٦}$

∴ مجموعة الحل = {($\frac{١٠}{٣}$ ، $\frac{١}{٦}$)}

(٢) $٣^{س} \times ٥^{ص} = ٧٥$ (١) ، $٣^{ص} \times ٥^{س} = ٤٥$ (٢)

وبقسمة (١) على (٢) :

∴ $(\frac{٣}{٥})^{س} \times (\frac{٥}{٣})^{ص} = \frac{٧٥}{٤٥}$

∴ $(\frac{٥}{٣})^{-س} \times (\frac{٥}{٣})^{ص} = \frac{٥}{٣}$

∴ $(\frac{٥}{٣})^{ص-س} = \frac{٥}{٣}$ ∴ $ص - س = ١$ (٣)

وبضرب (١) × (٢) :

∴ $(١٥)^{س} \times (١٥)^{ص} = ٧٥ \times ٤٥$

∴ $(١٥)^{س+ص} = ١٥^{٣}$ ∴ $س + ص = ٣$ (٤)

بجمع (٣) ، (٤) نجد أن : ٢ ص = ٤

∴ ص = ٢ وبالتعويض في (٣) : ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٢)}

(٣) $٣^{س} \times ٣^{ص} = ٣^{٣}$ ∴ $٣^{س+ص} = ٣^{٣}$

∴ $س + ص = ٣$ ∴ $ص = ٣ - س$

، ∵ $٣^{س} + ٣^{ص} = ١٢$

∴ $٣^{س} + ٣^{٣-س} = ١٢$ وبالضرب × $٣^{س}$

∴ $٣^{٢س} + ٢٧ = ١٢(٣)^{س}$

∴ $٣^{٢س} - ١٢(٣)^{س} + ٢٧ = ٠$

∴ $(٣^{س} - ٣)(٣^{س} - ٩) = ٠$

∴ إما $٣^{س} = ٣$ ∴ س = ١ ومنها ص = ٢

أ، $٣^{س} = ٩$ ∴ $٣^{س} = ٣^{٢}$

∴ س = ٢ ومنها ص = ١

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ١)}

٩

$\because ٩^{س+١} - (٣^{س+٢} + ٣^{س}) + ٣ = ٠$

$\therefore ٩^{س} \times ٩ - ٣^{س}(٣^{٣} + ١) + ٣ = ٠$

$\therefore ٩ \times ٣^{٢س} - ٢٨ \times ٣^{س} + ٣ = ٠$

$\therefore (٩ \times ٣^{س} - ١)(٣^{س} - ٣) = ٠$

$\therefore ٩ \times ٣^{س} - ١ = ٠$ ومنها $٣^{س} = \frac{١}{٩}$

$\therefore ٣^{س} = ٣^{-٢}$ $\therefore$ س $= -٢$

أو $٣^{س} - ٣ = ٠$ ومنها $٣^{س} = ٣$ $\therefore$ س $= ١$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{-٢ ، ١\}$

١٠

$\because س^{ن+١} = ص^{ن-١}$

$\therefore (س^{ن+١})^{٣} = (ص^{ن-١})^{٣}$

$\therefore (س^{٣})^{ن+١} = ص^{٣ن-٣}$

، $\because س^{٣} = ص^{٢}$ $\therefore (ص^{٢})^{ن+١} = ص^{٣ن-٣}$

$\therefore ص^{٢ن+٢} = ص^{٣ن-٣}$

$\therefore ٢ن + ٢ = ٣ن - ٣$ $\therefore ن = ٥$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (ب) ② (د) ③ (جـ) ④ (جـ)

⑤ (جـ) ⑥ (د) ⑦ (د)

إرشادات لحل رقم ١

① $\because \sqrt{س^{٢}} = |س| = -س$ لأن (س < ٠)

، $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$

، $\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} = \sqrt{(س - ١)^{٢}}$

$= |س - ١| = ١ - س$

(لأن س < ٠)

$\therefore \sqrt{س^{٢}} - \sqrt[٣]{س^{٣}} - \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} + ١$

$= -س - س - (١ - س) + ١ = -س$

② $\because أ = \sqrt[٤]{\frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt{٧}}}$ $\therefore أ^{٤} = \frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt{٧}}$

$\therefore (أ^{٤})^{٦} = \frac{٤}{٣٤٣}$ عدد نسبى.

$\therefore أ^{٢٤}$ عدد نسبى.

③ $\because س^{\frac{٢}{٣}} = س^{\frac{٣}{٢}}$ $\therefore س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{٣}{٢}} = ٠$

$\therefore س^{\frac{٢}{٣}} (١ - س^{\frac{٥}{٦}}) = ٠$

$\therefore س^{\frac{٢}{٣}} = ٠$

ومنها س $= ٠$ أ، $١ - س^{\frac{٥}{٦}} = ٠$

ومنها $س^{\frac{٥}{٦}} = ١$ $\therefore$ س $= ١$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{٠ ، ١\}$

④ $\sqrt[٥]{\frac{٢}{٢٧}} = \sqrt[٥]{\frac{٢ \times ٣ \times ٣}{٢٧ \times ٣ \times ٣}} = \sqrt[٥]{\frac{١٨}{٢٤٣}} = \frac{\sqrt[٥]{١٨}}{٣}$

⑤ $\sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م}$ صحيحة لكل $\sqrt[ن]{أ} \in ح$

، $ن \in ص^{+} - \{١\}$

⑥ $\because س^{\frac{٢}{٣}} = أ$ $\therefore س = أ^{\frac{٣}{٢}} = (\sqrt{أ})^{٣}$

$\therefore$ لابد وأن تكون $أ \geq ٠$

أى أن : $أ \in ح^{+} \cup \{٠\}$

⑦ $\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[م]{أ} = أ^{\frac{١}{ن}} \times أ^{\frac{١}{م}} = أ^{\frac{١}{ن} + \frac{١}{م}}$

$= أ^{\frac{م+ن}{م ن}}$

$= \sqrt[م ن]{أ^{م+ن}}$

٢

① $\frac{٥^{س-١} \times س^{٢-س}}{٥} = ١$

$\therefore ٥^{س-٢} \times س^{٢-س} = ١$

$\therefore ٥^{س-٢} = س^{س-٢}$

$\therefore$ س $= ٥$ أ، س $= ٢$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{٥ ، ٢\}$

② $\because (س - ٣)^{س-٥} = ١$

$\therefore$ إما س $- ٥ = ٠$ ومنها س $= ٥$

أ، س $- ٣ = ١$ ومنها س $= ٤$

أ، س $- ٣ = -١$ (إذا كان الأس زوجيًا)

ومنها س $= ٢$ (مرفوض) لأن الأس $(٢ - ٥)$ فردى.

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{٥ ، ٤\}$

③ $\because (س - ٣)^{(س-٦)} = ١$

$\therefore$ إما س $- ٦ = ٠$ ومنها س $= ٦$

أ، س $- ٣ = ١$ ومنها س $= ٤$

أ، س $- ٣ = -١$ (إذا كان الأس زوجيًا)

ومنها س $= ٢$ (يتحقق) (لأن الأس $(٢ - ٦)$ زوجى)

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{٦ ، ٤ ، ٢\}$

إجابات تمارين 8

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (د)	③ (أ)	④ (ب)
⑤ (جـ)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (أ)	⑩ (جـ)	⑪ (أ)	⑫ (جـ)
⑬ (ب)	⑭ (جـ)	⑮ (جـ)	⑯ (أ)
⑰ (د)	⑱ (جـ)	⑲ (د)	⑳ (جـ)
㉑ (جـ)	㉒ (أ)	㉓ (أ)	㉔ (ب)
㉕ (ب)	㉖ (جـ)	㉗ (جـ)	㉘ (ب)
㉙ (د)	㉚ (ب)	㉛ (ب)	㉜ (جـ)
㉝ (د)	㉞ (جـ)	㉟ (أ)	㊱ (د)
㊲ (ب)	㊳ (ب)	㊴ (ب)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

① ليست أسية

② دالة أسية ، أساسها $= ٥$ ، أسها $=$ س

③ ليست أسية ④ ليست أسية

⑤ دالة أسية ، أساسها $= \frac{٢}{٣}$ ، أسها $=$ س $- ١$

⑥ ليست أسية

٢

$\frac{د(س + ٤) - د(س + ٣)}{د(س + ٥) - د(س + ٤)} = \frac{٥^{س+٤} - ٥^{س+٣}}{٥^{س+٥} - ٥^{س+٤}}$

$= \frac{٥^{س+٣}(٥ - ١)}{٥^{س+٤}(٥ - ١)} = \frac{١}{٥}$

٣

$\because د(٢س - ١) + د(س - ٢) = ٥٠$

$\therefore ٧^{(٢س-١)+١} + ٧^{(س-٢)+١} = ٥٠$

$\therefore ٧^{٢س} + ٧^{س-١} = ٥٠$

$\therefore ٧^{٢س} + ٧^{-١} \times ٧^{س} = ٥٠$

$\therefore ٧^{٢س} + \frac{١}{٧} \times ٧^{س} = ٥٠$ (بالضرب × ٧)

$\therefore ٧ \times ٧^{٢س} + ٧^{س} - ٣٥٠ = ٠$

$\therefore (٧ \times ٧^{س} + ٥٠)(٧^{س} - ٧) = ٠$

$\therefore ٧ \times ٧^{س} + ٥٠ = ٠$ ومنها $٧^{س} = \frac{-٥٠}{٧}$ (مرفوض)

أ، $٧^{س} - ٧ = ٠$ $\therefore ٧^{س} = ٧$ $\therefore$ س $= ١$

٤

$\because د_{١}(٢س - ١) + د_{٢}(س + ١) = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢س-١} + ٩^{س+١} = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢س-١} + ٣^{٢س+٢} = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢س}(٣^{-١} + ٣^{٢}) = ٧٥٦$

∴ $٣^{٢س} \times \frac{٢٨}{٣} = ٧٥٦$

∴ $٣^{٢س} = ٧٥٦ \times \frac{٣}{٢٨}$

∴ $٣^{٢س} = ٨١$ ∴ $٣^{٢س} = ٣^{٤}$

∴ ٢ س = ٤ ∴ س = ٢

٥

الطرف الأيمن = $\frac{ص^{س+١} + ص^{س+٢}}{ص^{س+١} + ص^{س}}$

$= \frac{ص^{س+١}(١ + ص)}{ص^{س}(ص + ١)} = ص$

٦

الطرف الأيمن = $\frac{٣^{٢س+٢} + ٣^{٢س-١}}{٥ \times ٣^{٢س} - ٧ \times ٣^{٢س-١}}$

$= \frac{٣^{٢س-١}(٣^{٣} + ١)}{٣^{٢س-١}(٥ \times ٣ - ٧)} = \frac{٢٨}{٨} = \frac{٧}{٢}$

٧

الطرف الأيمن = $\frac{٣^{٢(س+١)-١} \times ٣^{٢(س+٢)-١}}{٣^{٢(س+٣)-١}}$

$= \frac{٣^{٢س+٢} \times ٣^{٢س+٥}}{٣^{٢س+٨}}$

$= ٣^{٢س+٢+٢س+٥-٢س-٨}$

$= ٣^{٢س-١} =$ د (س)

٨

الطرف الأيمن = $\frac{٢^{س+١}}{٢^{س-١}} + \frac{٢^{س-١}}{٢^{س+١}} = ٢^{٢} + \frac{١}{٢^{٢}} = \frac{١٧}{٤}$

٩

∵ $٧^{٢س-١} + ٧^{٢س+١} = \frac{٥٠}{٤٩}$

∴ $٧^{٢س-١}(١ + ٤٩) = \frac{٥٠}{٤٩}$

∴ $٧^{٢س-١} = ٧^{-٢}$ ∴ ٢ س − ١ = −٢

∴ ٢ س = −١ ∴ س = $-\frac{١}{٢}$

١٠

∵ $\frac{٢^{س+١} - ٢^{س}}{٢^{س} - ٢^{س-١}} = ٢^{س-٢}$

∴ $\frac{٢^{س}(٢ - ١)}{٢^{س-١}(٢ - ١)} = ٢^{س-٢}$

∴ $٢ = ٢^{س-٢}$

∴ س − ٢ = ١ ∴ س = ٣

١١

∵ $\frac{٣^{-٢س-١}}{٣^{-س+١}} = ٧٢٩$

∴ $٣^{-٢س-١+س-١} = ٣^{٦}$

∴ −س − ٢ = ٦ ∴ س = −٨

∴ مجموعة الحل = {−٨}

١٢

∵ $٣^{س+١} + ٣^{٢-س} = ٣٠$ وبالضرب × $٣^{س-١}$

∴ $٣^{٢س} + ٣^{٢} - ١٠ \times ٣ \times ٣^{س-١} = ٠$

∴ $٣^{٢س} - ١٠ \times ٣^{س} + ٩ = ٠$

∴ $(٣^{س} - ١)(٣^{س} - ٩) = ٠$

∴ $٣^{س} = ١$ ومنها س = ٠

أ، $٣^{س} = ٩$ ومنها س = ٢

١٣

∵ $٢^{٢س} - ٦ \times ٢^{س} + ٨ = ٠$

∴ $(٢^{س} - ٢)(٢^{س} - ٤) = ٠$

∴ $٢^{س} = ٢$ ومنها س = ١ أ، $٢^{س} = ٤$ ومنها س = ٢

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}

١٤

∵ $٣^{س} + ٣^{\frac{س}{٢}} = ١٢$ وبوضع $٣^{\frac{س}{٢}}$ = ص

∴ ص^{٢} + ص − ١٢ = ٠

∴ (ص + ٤) (ص − ٣) = ٠

∴ ص = − ٤ (مرفوض) أ، ص = ٣ ومنها $٣^{\frac{س}{٢}} = ٣$

∴ $\frac{س}{٢} = ١$ ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {٢}

١٥

∵ د (س − ٢) = $٣^{س}$ ∴ د (س) = $٣^{س+٢}$

، ∵ د (٣ س + ١) − د (٣ س − ١) = ٢٤

∴ $٣^{٣س+٣} - ٣^{٣س+١} = ٢٤$

∴ $٣^{٣س+١}(٣^{٢} - ١) = ٢٤$

∴ $٣^{٣س+١} \times ٨ = ٢٤$ ∴ $٣^{٣س+١} = ٣$

∴ ٣ س + ١ = ١ ∴ ٣ س = صفر

∴ س = صفر

١٦

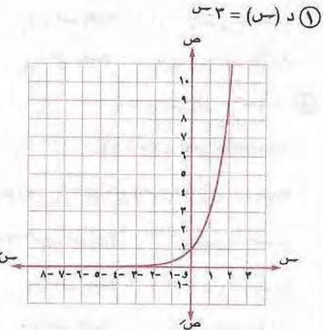
① شكل (٧) ② شكل (٢) ③ شكل (٥)

④ شكل (١) ⑤ شكل (٦) ⑥ شكل (٣)

⑦ شكل (٤) ⑧ شكل (٨)

١٧

① د (س) = $٣^{س}$

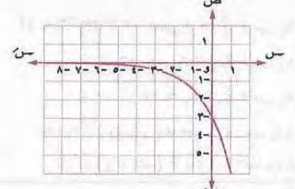


المجال = ح ، المدى = ح$^{+}$ ، الدالة تزايدية على مجالها.

② د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$

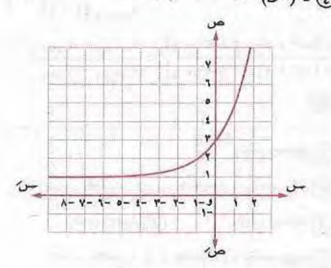
المجال = ح ، المدى = ح$^{+}$ ، الدالة تناقصية على مجالها.

③ د (س) = −٣ $(٢)^{س}$



المجال = ح ، المدى = ح$^{-}$ ، الدالة تناقصية على مجالها

④ د (س) = $٢^{س+١} + ١$



المجال = ح ، المدى =]١ ، ∞[

، الدالة تزايدية على مجالها.

(٥) د(س) = $(\frac{١}{٢})^{س+٢} - ٢$

المجال = ح ، المدى =]−٢ ، ∞[

، الدالة تناقصية على مجالها.

(٦) د(س) = $٢(\frac{٢}{٣})^{س-١} + ١$

المجال = ح ، المدى =]١ ، ∞[

، الدالة تناقصية على مجالها.

(٧) د(س) = $-(\frac{١}{٢})^{٢س} + \frac{٣}{٤}$

المجال = ح ، المدى =]−∞ ، $\frac{٣}{٤}$[

، الدالة تزايدية على مجالها.

١٨

(١) من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د(س) = $٢^{س+٣}$ ، ر : ر(س) = ٤

∴ مجموعة الحل = {−١}

(٢) من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د(س) = $٢^{س}$

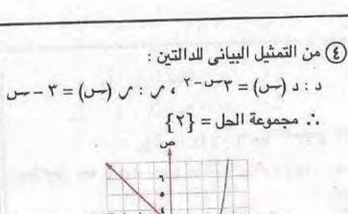
، ر : ر(س) = ٨

∴ مجموعة الحل = {٣}

(٣) من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د(س) = $٣^{س}$ ، ر : ر(س) = ٤ − س

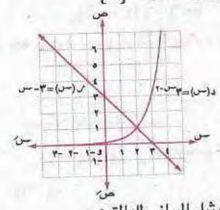
∴ مجموعة الحل = {١}



(٤) من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د(س) = $٣^{س-٢}$ ، ر : ر(س) = ٣ − س

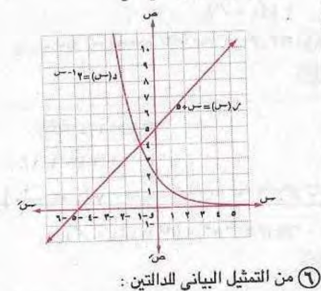
∴ مجموعة الحل = {٢}



(٥) من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د(س) = $٢^{١-س}$ ، ر : ر(س) = س + ٥

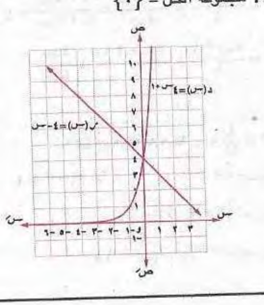
∴ مجموعة الحل = {−١}

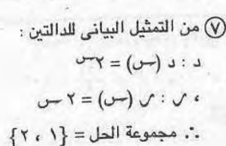


(٦) من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د(س) = $٤^{س+١}$ ، ر : ر(س) = ٤ − س

∴ مجموعة الحل = {٠}



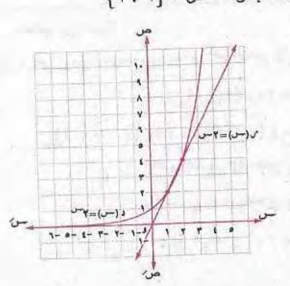


(٧) من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د(س) = $٢^{س}$

، ر : ر(س) = ٢ س

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}



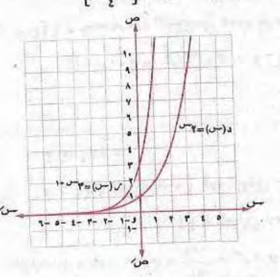
(٨) من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د(س) = $٢^{س}$

، ر : ر(س) = $٣^{س+١}$

∴ س ≈ $-٢\frac{٣}{٤}$

∴ مجموعة الحل = {$-٢\frac{٣}{٤}$}



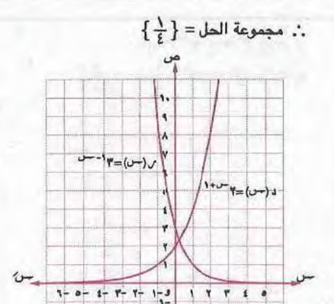
(٩) من التمثيل البيانى للدالتين :

د : د(س) = $٢^{س+١}$

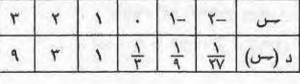
، ر : ر(س) = $٣^{١-س}$

∴ س ≈ $\frac{١}{٤}$

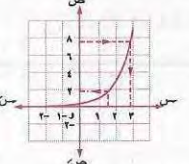
∴ مجموعة الحل = { $\frac{١}{٤}$ }

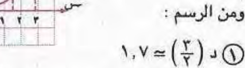


١٩

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣
د (س)	$\frac{١}{٢٧}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩

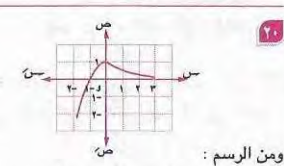



ومن الرسم :

① د $\left(\frac{٣}{٢}\right)$ ≃ ١,٧

② عندما ٣ $^{س - ١}$ = ٧ $\frac{١}{٢}$ فإن : س ≃ ٢,٨

٢٠



ومن الرسم :

* المجال = ح ، المدى =]− ∞ ، ١]

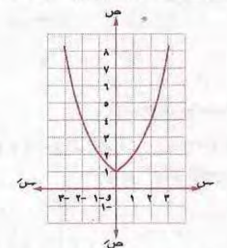
* الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠[

، وتناقصية فى]٠ ، ∞[

٢١

د (س) = ٢ ^{س} ، س ≥ ٠ | د (س) = ٢ $^{-س}$ ، س < ٠

س	٠	١	٢	٣	⓪	−١	−٢	−٣
د (س)	١	٢	٤	٨	①	٢	٤	٨



* المدى = [١ ، ∞[

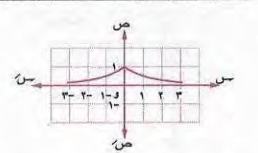
* الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[، وتزايدية فى]٠ ، ∞[

* الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات.

٢٢

د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ عندما س ≥ ٠ | د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-س}$ عندما س < ٠

س	٠	١	٢	٣	⓪	−١	−٢	−٣
د (س)	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$	①	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$



* المدى =]٠ ، ١]

* الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠[، وتناقصية فى]٠ ، ∞[

* الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات.

٢٣

∵ ٥ $^{١ + جاس}$ + ٥ $^{-١ + جاس}$ = ٢٦

∴ ٥ ^{جاس} (٥ + ٥ $^{-١}$) = ٢٦

∴ ٥ ^{جاس} = ٥ ∴ جاس = ١

∴ س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ ن π حيث ن ∈ ص

٢٤

المقدار = $\frac{١}{٢^{س} + ١}$ + $\frac{١}{٢^{-س} + ١}$ × $\frac{٢^{س}}{٢^{س}}$

= $\frac{١}{٢^{س} + ١}$ + $\frac{٢^{س}}{١ + ٢^{س}}$ = $\frac{١ + ٢^{س}}{١ + ٢^{س}}$ = ١

∴ قيمة المقدار = ١ مهما كانت قيمة س

٢٥

∵ دالة الرصيد هى د (ن) = أ (١ + ر) ^{ن}

∴ الرصيد بعد ١٠ سنوات = ٨٠٠٠٠ $\left(١ + \frac{١٠,٥}{١٠٠}\right)^{١٠}$

= ٨٠٠٠٠ (١,١٠٥) ^{١٠}

≃ ٢١٧١٢٦ جنيهًا.

٢٦

① عدد السكان بعد مرور ن سنة من عام ٢٠٠٠

= أ (١ + ر) ^{ن}

= ٤٣,٣ $\left(١ + \frac{١,٥}{١٠٠}\right)^{ن}$ = ٤٣,٣ (١,٠١٥) ^{ن}

② عام ٢٠٢٠ يكون عدد السنين = ٢٠٢٠ − ٢٠٠٠

= ٢٠ سنة.

∴ عدد السكان = ٤٣,٣ (١,٠١٥) ^{٢٠}

≃ ٥٨,٣ مليون نسمة.

٢٧

أ = ٣٦٤٠٠ ، ر = $\frac{٤}{١٠٠}$ = ٠,٠٤ ، ن = عدد المباريات

عدد الحضور (ص) = أ (١ − ر) ^{ن}

= ٣٦٤٠٠ (١ − ٠,٠٤) ^{ن}

= ٣٦٤٠٠ (٠,٩٦) ^{ن}

، فى المباراة العاشرة :

يكون عدد الحضور (ص) = ٣٦٤٠٠ (٠,٩٦) ^{١٠}

≃ ٢٤٢٠٠ مُشجع

٢٨

أ = ٨٠ ، ر = $\frac{١٨}{١٠٠}$ = ٠,١٨ ، ن = ٤ سنوات.

∴ عدد الأبقار = أ (١ + ر) ^{ن}

، عدد الأبقار بعد ٤ سنوات = ٨٠ (١ + ٠,١٨) ^{٤}

≃ ١٥٥ بقرة.

٢٩

أ = ٤,٦ ، ر = $\frac{٤}{١٠٠}$ = ٠,٠٤

① دالة النمو المستقبلى بعد ن سنة = أ (١ + ر) ^{ن}

= ٤,٦ (١ + ٠,٠٤) ^{ن}

= ٤,٦ (١,٠٤) ^{ن} مليون نسمة.

② بعد خمس سنوات :

عدد السكان = ٤,٦ (١,٠٤) ^{٥} ≃ ٥,٦ مليون نسمة.

٣٠

أ = ٢٥٤ ، ر = $\frac{٥}{١٠٠}$ = ٠,٠٥

، الفترة الزمنية ن = ٩ سنوات.

∴ دالة التضاؤل الأسى هى :

د (ن) = أ (١ − ر) ^{ن} = ٢٥٤ (١ − ٠,٠٥) ^{ن}

= ٢٥٤ (٠,٩٥) ^{ن}

∴ إنتاج المنجم فى السنة التاسعة = ٢٥٤ (٠,٩٥) ^{٩}

≃ ١٦٠ كجم.

٣١

أ = ٢٠٠٠ ، ر = $\frac{٧}{١٠٠}$ = ٠,٠٧

، الفترة الزمنية ن = ١١ ساعة.

∴ دالة النمو الأسى هى د (ن) = أ $(١ + ر)^{ن}$

= $٢٠٠٠ (١ + ٠,٠٧)^{ن}$

= $٢٠٠٠ (١,٠٧)^{ن}$

∴ كمية البكتريا بعد ١١ ساعة = $٢٠٠٠ (١,٠٧)^{١١}$

≃ ٤٢١٠ بكتريا.

٣٢

باستخدام العلاقة جـ = أ $\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$

(١) العائد السنوى. ∴ س = ١

جـ = $٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٨)^{١٠}$ ≃ ١٠٧٩٤,٦٢ جنيه.

(٢) العائد الربع سنوى. ∴ س = ٤

جـ = $٥٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٨}{٤}\right)^{١٠ \times ٤}$ ≃ ١١٠٤٠,٢ جنيه.

(٣) العائد الشهرى. ∴ س = ١٢

جـ = $٥٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٨}{١٢}\right)^{١٠ \times ١٢}$ ≃ ١١٠٩٨,٢ جنيه.

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (د) (٢) (جـ) (٣) (د) (٤) (جـ)

(٥) (د) (٦) (أ) (٧) (د) (٨) (أ)

إرشادات الحل :

(١) ∵ الدالة متناقصة إذا كان : ٠ < ٢أ < ١

∴ ٠ < أ < $\frac{١}{٢}$ ∴ أ ∈]٠ ، $\frac{١}{٢}$[

(٢) ∵ الدالة تزايدية ∴ $\frac{أ}{٣}$ > ١ ∴ أ > ٣

(٣) ∵ د (س) = $(أ - ٢)^{س}$ دالة اسية.

∴ أ - ٢ > ٠ ، أ - ٢ ≠ ١

∴ أ > ٢ ، أ ≠ ٣

∴ أ ∈]٢ ، ∞[- {٣}

(٤) المنحنى يقطع محور السينات عندما ص = ٠

وبالتعويض عن د (س) = ٠ فى الدوال المعطاة

لا نحصل على أى قيمة للمتغير س الا فى الحالة رقم (جـ)

$٢^{س}$ - ١ = ٠ ∴ $٢^{س}$ = ١ ∴ س = ٠

أى المنحنى يقطع محور السينات فى النقطة (٠ ، ٠)

(٥) بحل المعادلتين ص = ٨ ، ص = $٢^{س}$ معًا

∴ س = ٣

وبحل المعادلتين ص = ٨ ، ص = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ معًا

∴ س = -٣

∴ أ (٣ ، ٨) ، ب (-٣ ، ٨)

∴ طول $\overline{أب}$ = ٦ وحدات.

(٦) نعلم أن انعكاس منحنى الدالة د (س) = $٣^{س}$

حول محور الصادات يعطى منحنى الدالة

د (س) = $٣^{-س}$ ثم ازاحته ٥ وحدات

لأعلى يعطى المنحنى د (س) = ٥ + $٣^{-س}$

(٧) ∵ د (س) = $\frac{٩^{س}}{٩^{س} + ٣}$

∴ د (١ - س) = $\frac{٩^{١-س}}{٩^{١-س} + ٣}$

بالضرب بسطًا ومقامًا فى $٩^{س}$

∴ د (١ - س) = $\frac{٩}{٩ + ٣ \times ٩^{س}}$

= $\frac{٩}{٣(٣ + ٩^{س})} = \frac{٣}{٣ + ٩^{س}}$

∴ د (س) + د (١ - س)

= $\frac{٩^{س}}{٩^{س} + ٣} + \frac{٣}{٣ + ٩^{س}} = \frac{٩^{س} + ٣}{٩^{س} + ٣} = ١$

(٨) ∵ د (س) = $\frac{٤^{س}}{٤^{س} + ٢}$

∴ د (١ - س) = $\frac{٤^{١-س}}{٤^{١-س} + ٢}$

بالضرب بسطًا ومقامًا فى $٤^{س}$

∴ د (١ - س) = $\frac{٤}{٤ + ٢ \times ٤^{س}}$

= $\frac{٤}{٢(٢ + ٤^{س})} = \frac{٢}{٢ + ٤^{س}}$

∴ د (س) + د (١ - س)

= $\frac{٤^{س}}{٤^{س} + ٢} + \frac{٢}{٢ + ٤^{س}} = \frac{٤^{س} + ٢}{٤^{س} + ٢} = ١$

∴ د $\left(\frac{١}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{١٠}{١١}\right)$ = ١

، د $\left(\frac{٢}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٩}{١١}\right)$ = ١

، د $\left(\frac{٣}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٨}{١١}\right)$ = ١

، د $\left(\frac{٤}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٧}{١١}\right)$ = ١

، د $\left(\frac{٥}{١١}\right)$ + د $\left(\frac{٦}{١١}\right)$ = ١

∴ المقدار المطلوب = ٥

إجابات تمارين 9

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ) (٢) (د) (٣) (د) (٤) (جـ)

(٥) (جـ) (٦) (ب) (٧) (جـ) (٨) (ب)

(٩) (ب) (١٠) (جـ) (١١) (ب) (١٢) (ب)

(١٣) (ب) (١٤) (ب) (١٥) (جـ) (١٦) (جـ)

(١٧) (جـ) (١٨) (ب) (١٩) (ب) (٢٠) (جـ)

(٢١) (د) (٢٢) (جـ) (٢٣) (أ) (٢٤) (أ)

(٢٥) (ب) (٢٦) (جـ) (٢٧) (أ) (٢٨) (أ)

(٢٩) (أ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١)



س	٧	٤	١	-١
$د^{-١}$ (س)	-٢	١	٢	٥

(٢) $د^{-١}$ = {(٢ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ٣)}

(٣) بوضع س = ٢ ص + ٥

∴ ص = $\frac{س - ٥}{٢}$

∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{س - ٥}{٢}$

(٤) بوضع س = $\frac{١}{٢}$ ص + ٤

∴ ص = ٢ س - ٨

∴ $د^{-١}$ (س) = ٢ س - ٨

(٥) بوضع س = ٥ + $\frac{٤}{ص}$ ∴ $\frac{٤}{ص}$ = س - ٥

∴ ص = $\frac{٤}{س - ٥}$ ∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{٤}{س - ٥}$

(٦) بوضع س = ٨ $ص^{٣}$ - ١

∴ ٨ $ص^{٣}$ = س + ١

∴ $ص^{٣}$ = $\frac{١}{٨}$ (س + ١)

∴ ص = $\frac{١}{٢} \sqrt[٣]{س + ١}$

∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٢} \sqrt[٣]{س + ١}$

(٧) بوضع س = $\sqrt[٣]{ص + ١}$

∴ ص + ١ = $س^{٣}$ ∴ ص = $س^{٣}$ - ١

∴ $د^{-١}$ (س) = $س^{٣}$ - ١

⑧ بوضع س = ∛(٤ − ص)   ∴ ٤ − ص = س^{٣}

∴ ص = ٤ − س^{٣}

∴ د$^{-١}$(س) = ٤ − س^{٣}

⑨ ∵ ص = ٢ + √(٣ − س) حيث س ≤ ٣ ، ص ≥ ٢

وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ + √(٣ − ص)

حيث ص ≤ ٣ ، س ≥ ٢

∴ √(٣ − ص) = س − ٢

∴ ٣ − ص = (س − ٢)^{٢}

∴ ص = ٣ − (س − ٢)^{٢}

∴ د$^{-١}$(س) = ٣ − (س − ٢)^{٢} لكل س ≥ ٢

⑩ ∵ ص = س^{٢} حيث س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

وبتبديل المتغيرين

∴ س = ص^{٢} حيث ص ≥ ٠ ، س ≥ ٠

∴ ص = √س

∴ د$^{-١}$(س) = √س لكل س ≥ ٠

⑪ ∵ ص = (س + ٢)^{٢} حيث س ≤ −٢ ، ص ≥ ٠

وبتبديل المتغيرين

∴ س = (ص + ٢)^{٢} حيث ص ≤ −٢ ، س ≥ ٠

∴ ص + ٢ = −√س

∴ ص = −√س − ٢

∴ د$^{-١}$(س) = −√س − ٢ لكل س ≥ ٠

⑫ ∵ ص = (س − ١)^{٢} + ٢ حيث س ≥ ١

، ص ≥ ٢ وبتبديل المتغيرين

∴ س = (ص − ١)^{٢} + ٢ حيث ص ≥ ١ ، س ≥ ٢

∴ (ص − ١)^{٢} = س − ٢

∴ ص − ١ = √(س − ٢)

∴ ص = √(س − ٢) + ١

∴ د$^{-١}$(س) = √(س − ٢) + ١ لكل س ≥ ٢

⑬ ∵ ص = س^{٢} + ٨ س + ٧ = (س + ٤)^{٢} − ٩

حيث س ≥ −٤ ، ص ≥ −٩ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ص^{٢} + ٨ ص + ٧ حيث ص ≥ −٤

، س ≥ −٩

∴ س = ص^{٢} + ٨ ص + ١٦ − ٩

∴ س = (ص + ٤)^{٢} − ٩

∴ (ص + ٤)^{٢} = س + ٩

∴ ص + ٤ = √(س + ٩)

∴ ص = √(س + ٩) − ٤

∴ د$^{-١}$(س) = √(س + ٩) − ٤ لكل س ≥ −٩

⑭ ∵ ص = √(٩ − س^{٢}) حيث −٣ ≤ س ≤ ٠

، ٠ ≤ ص ≤ ٣ وبتبديل المتغيرين

∴ س = √(٩ − ص^{٢}) ، −٣ ≤ ص ≤ ٠

، ٠ ≤ س ≤ ٣

∴ س^{٢} = ٩ − ص^{٢}

∴ ص^{٢} = ٩ − س^{٢}

∴ ص = −√(٩ − س^{٢})

∴ د$^{-١}$(س) = −√(٩ − س^{٢})

لكل ٠ ≤ س ≤ ٣

⑮ ∵ ص = √(٩ − س^{٢}) حيث ٠ ≤ س ≤ ٣

، ٠ ≤ ص ≤ ٣ وبتبديل المتغيرين

∴ س = √(٩ − ص^{٢}) ، ٠ ≤ ص ≤ ٣

، ٠ ≤ س ≤ ٣

∴ س^{٢} = ٩ − ص^{٢}

∴ ص^{٢} = ٩ − س^{٢}

∴ ص = √(٩ − س^{٢})

∴ د$^{-١}$(س) = √(٩ − س^{٢}) لكل ٠ ≤ س ≤ ٣

⑯ ∵ ص = ١ / (س^{٢} + ٢) ، س ∈ ح$^{+}$

، ص ∈]٠ ، ½[

وبتبديل المتغيرين

∴ س = ١ / (ص^{٢} + ٢) ، ص ∈ ح$^{+}$

، س ∈]٠ ، ½[

∴ ص^{٢} + ٢ = ١ / س   ∴ ص^{٢} = ١ / س − ٢

∴ ص = √(١ / س − ٢)

∴ د$^{-١}$(س) = √(١ / س − ٢) ، س ∈]٠ ، ½[

٢

① لها دالة عكسية ② ليس لها دالة عكسية

③ ليس لها دالة عكسية ④ ليس لها دالة عكسية

٣

① ∵ (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

= د((س + ٣) / ٢) = ٢((س + ٣) / ٢) − ٣

= س + ٣ − ٣ = س

، (ر ∘ د)(س) = ر(د(س))

= ر(٢ س − ٣) = ((٢ س − ٣) + ٣) / ٢ = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

② ∵ (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

= د(√(س − ٤)) = (√(س − ٤))^{٢} + ٤

= س − ٤ + ٤ = س

، ∵ (ر ∘ د)(س) = ر(د(س))

= ر(س^{٢} + ٤) = √(س^{٢} + ٤ − ٤)

= √(س^{٢}) = |س|

، ∵ س ≥ ٠   ∴ (ر ∘ د)(س) = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

③ ر(س) = (٥ س − ٢) / س

∴ ر(س) = ٥ − ٢ / س

∴ (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

= د(٥ − ٢ / س) = −٢ / (٥ − ٢ / س − ٥) = س

، (ر ∘ د)(س) = ر(د(س))

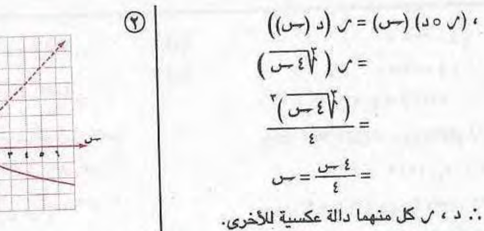
= ر(−٢ / (س − ٥)) = ٥ − ٢ / (−٢ / (س − ٥))

= ٥ + س − ٥ = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

④ (د ∘ ر)(س) = د(ر(س))

= د(س^{٣} / ٤) = ∛(٤ × س^{٣} / ٤) = س



، $(\text{ر} \circ \text{د})(\text{س}) = \text{ر}\left(\text{د}(\text{س})\right)$

$= \text{ر}\left(\sqrt[3]{4\text{س}}\right)$

$= \dfrac{\left(\sqrt[3]{4\text{س}}\right)^3}{4}$

$= \dfrac{4\text{س}}{4} = \text{س}$

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

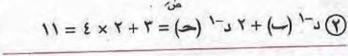
٤

① ∵ ص = ٥ س بتبديل المتغيرين.

∴ س = ٥ ص

∴ $\text{ص} = \frac{1}{5}\,\text{س}$

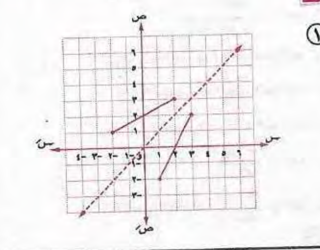
∴ $\text{د}^{-1}(\text{س}) = \frac{1}{5}\,\text{س}$



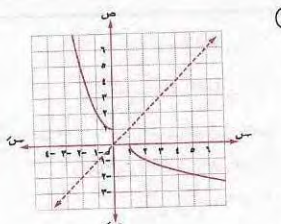
② $\text{د}^{-1}(\text{ب}) + 2\,\text{د}^{-1}(\text{ح}) = 3 + 2 \times 4 = 11$

٥

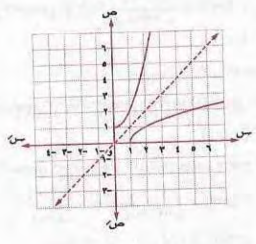
①

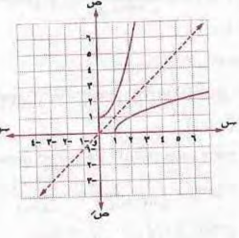


②

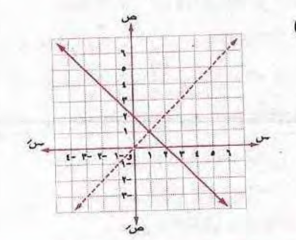


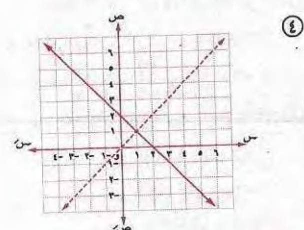
③





④





٦

① ∵ د (س) = ٢ س

∴ ص = ٢ س

بتبديل المتغيرين ∴ س = ٢ ص

∴ $\text{ص} = \frac{1}{2}\,\text{س}$

∴ $\text{د}^{-1}(\text{س}) = \frac{1}{2}\,\text{س} \neq \text{د}(\text{س})$

∴ د معكوسها ليس نفسها.

② ∵ د (س) = − س ∴ ص = − س

بتبديل المتغيرين

∴ س = − ص

∴ ص = − س

∴ $\text{د}^{-1}(\text{س}) = -\text{س} = \text{د}(\text{س})$

∴ د معكوسها هو نفسها.

③ ∵ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{2}{\text{س}}$ ∴ $\text{ص} = \dfrac{2}{\text{س}}$

بتبديل المتغيرين ∴ $\text{س} = \dfrac{2}{\text{ص}}$

∴ $\text{ص} = \dfrac{2}{\text{س}}$

∴ $\text{د}^{-1}(\text{س}) = \dfrac{2}{\text{س}} = \text{د}(\text{س})$

∴ د معكوسها هو نفسها.

④ ∵ د (س) = ٧ − س ∴ ص = ٧ − س

بتبديل المتغيرين

∴ س = ٧ − ص

∴ ص = ٧ − س

∴ $\text{د}^{-1}(\text{س}) = 7 - \text{س} = \text{د}(\text{س})$

∴ د معكوسها هو نفسها.

⑤ ∵ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{1}{\text{س} - 3} + 5$

∴ $\text{ص} = \dfrac{1}{\text{س} - 3} + 5$ بتبديل المتغيرين

∴ $\text{س} = \dfrac{1}{\text{ص} - 3} + 5$

∴ $\text{س} - 5 = \dfrac{1}{\text{ص} - 3}$

∴ $\text{ص} - 3 = \dfrac{1}{\text{س} - 5}$

∴ $\text{ص} = \dfrac{1}{\text{س} - 5} + 3$

∴ $\text{د}^{-1}(\text{س}) = \dfrac{1}{\text{س} - 5} + 3 \neq \text{د}(\text{س})$

∴ د معكوسها ليس نفسها.

⑥ ∵ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{1}{\text{س} - \text{ك}} + \text{ك}$

∴ $\text{ص} = \dfrac{1}{\text{س} - \text{ك}} + \text{ك}$

بتبديل المتغيرين

∴ $\text{س} = \dfrac{1}{\text{ص} - \text{ك}} + \text{ك}$

∴ $\text{س} - \text{ك} = \dfrac{1}{\text{ص} - \text{ك}}$

∴ $\text{ص} - \text{ك} = \dfrac{1}{\text{س} - \text{ك}}$

∴ $\text{ص} = \dfrac{1}{\text{س} - \text{ك}} + \text{ك}$

∴ $\text{د}^{-1}(\text{س}) = \dfrac{1}{\text{س} - \text{ك}} + \text{ك} = \text{د}(\text{س})$

∴ د معكوسها هو نفسها.

٧

إجابة رنا هى الصواب لأن :

$\text{د}^{-1}(\text{س}) \neq \dfrac{1}{\text{د}(\text{س})}$ كما فى إجابة وائل

٨

① ∵ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^2$

∴ د ليست أحادية على مجالها = ح

وتكون أحادية إذا كانت س ∈ [٠ ، ∞[

أو س ∈]−∞ ، ٠]

∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية

= [٠ ، ∞[أو]−∞ ، ٠]

② ∵ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^3$

∴ د دالة أحادية على مجالها ح

∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية = ح

③ ∵ $\text{د}(\text{س}) = \frac{1}{2}\,\text{س}$

∴ د دالة أحادية على مجالها ح

∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية = ح

٩

∵ ص = (س − ١)/(س + ٥) بتبديل المتغيرين

∴ س = (ص − ١)/(ص + ٥)

∴ س ص + ٥ س = ص − ١

∴ س ص − ص = −٥ س − ١

∴ ص (س − ١) = −٥ س − ١

∴ ص = (−٥ س − ١)/(س − ١)

∴ د$^{-1}$ (س) = (−٥ س − ١)/(س − ١)

١٠

∵ د (س) = ٢ س + أ ∴ ص = ٢ س + أ

وبتبديل المتغيرين ∴ س = ٢ ص + أ

∴ ص = (س − أ)/٢ = ١/٢ س − أ/٢

∴ د$^{-1}$ (س) = ١/٢ س − أ/٢

∵ د$^{-1}$ (س) = ى (س)

∴ ١/٢ س − أ/٢ = ب س + ٣

∴ ب = ١/٢ ، − أ/٢ = ٣ ∴ أ = −٦

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (أ) (٤) (أ)

(٥) (جـ) (٦) (د) (٧) (ب) (٨) (أ)

إرشادات الحل :

(١) ∵ د$^{-1}$ (٩) = ٣

∴ النقطة (٣ ، ٩) ∈ منحنى الدالة.

، ∵ د$^{-1}$ (٥) = ٢

∴ النقطة (٢ ، ٥) ∈ منحنى الدالة

، ∵ د (س) = أ س + ب

∴ ٣ أ + ب = ٩ (١)

، ٢ أ + ب = ٥ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ أ = ٤ ، ب = −٣

∴ أ × ب = ٤ × −٣ = −١٢

(٢) ∵ ى (س) = س − ٣

∴ ى$^{-1}$ (س) = س + ٣

، ∵ ى (د (س)) = ى (س^{2}) = س^{2} − ٣

، ∵ ى (د (س)) = ى$^{-1}$ (س)

∴ س^{2} − ٣ = س + ٣

∴ س^{2} − س − ٦ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٢ أ، س = ٣

∴ م.ح = {٣ ، −٢}

(٣) نضع د (س) = ٣ ونوجد قيمة س

∴ س = (د (س) + ١)/(٢ − د (س)) = (٣ + ١)/(٢ − ٣) = −٤

∴ د (−٤) = ٣ ∴ د$^{-1}$ (٣) = −٤

(٤) ∵ المجال ح − {١} ∴ ب = ١

∴ د (س) = (أ س + ٣)/(س − ١) = أ + (٣ + أ)/(س − ١)

من قاعدة الدالة نجد أن نقطة تماثل المنحنى هى (١ ، أ)

ومن المجال والمجال المقابل نجد أن نقطة تماثل المنحنى هى (١ ، ٣)

∴ أ = ٣

∴ د (س) = (٣ س + ٣)/(س − ١) وبتبديل المتغيرين

∴ س = (٣ ص + ٣)/(ص − ١)

∴ س ص − س = ٣ ص + ٣

(س − ٣) ص = س + ٣ ∴ ص = (س + ٣)/(س − ٣)

∴ د$^{-1}$ (س) = (س + ٣)/(س − ٣)

∴ د$^{-1}$ (١) = −٢

(٥) ∵ د (س) = ∛(س − ٥) وبتبديل المتغيرين

∴ س = ∛(ص − ٥)

∴ ص = س^{3} + ٥

∴ د$^{-1}$ (س) = س^{3} + ٥

∴ (ى ∘ د$^{-1}$) (س) = ى (د$^{-1}$ (س))

= ى (س^{3} + ٥)

= ٢ (س^{3} + ٥) − ٧

= ٢ س^{3} + ٣

(٦) ∵ د (س) = ٣ س − ٤ وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٣ ص − ٤

∴ ص = (س + ٤)/٣

∴ د$^{-1}$ (س) = (س + ٤)/٣

∴ د$^{-1}$ (س + ٢) = (س + ٢ + ٤)/٣ = (س + ٦)/٣

(٧) ∵ د (س) = س^{3} + ٣ س^{2} + ٣ س + ١

= (س^{3} + ١) + (٣ س^{2} + ٣ س)

= (س + ١) (س^{2} − س + ١) + ٣ س (س + ١)

= (س + ١) (س^{2} − س + ١ + ٣ س)

= (س + ١) (س^{2} + ٢ س + ١)

= (س + ١) (س + ١)^{2} = (س + ١)^{3}

وبتبديل المتغيرين

∴ س = (ص + ١)^{3}

∴ ص = ∛س − ١

∴ د$^{-1}$ (س) = ∛س − ١

(٨) ∵ منحنى د$^{-1}$ يمر بالنقطتين (−٢ ، ٠) ، (−٣ ، −٢)

∴ د$^{-1}$ (−٢) = ٠ ∴ د (٠) = −٢

، د$^{-1}$ (−٣) = −٢ ∴ د (−٢) = −٣

∴ (د ∘ د) (صفر) = د (د (صفر)) = د (−٢) = −٣

إجابات تمارين 10

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب)	(٢) (ب)	(٣) (جـ)	(٤) (ب)
(٥) (د)	(٦) (د)	(٧) (د)	(٨) (أ)
(٩) (أ)	(١٠) (جـ)	(١١) (أ)	(١٢) (ب)
(١٣) (د)	(١٤) (جـ)	(١٥) (أ)	(١٦) (جـ)
(١٧) (جـ)	(١٨) (ب)	(١٩) (ب)	(٢٠) (ب)
(٢١) (ب)	(٢٢) (د)	(٢٣) (ب)	(٢٤) (ب)
(٢٥) (ب)	(٢٦) (د)	(٢٧) (أ)	(٢٨) (جـ)
(٢٩) (أ)	(٣٠) (ب)	(٣١) (جـ)	(٣٢) (جـ)
(٣٣) (ب)	(٣٤) (جـ)	(٣٥) (أ)	(٣٦) (ب)
(٣٧) (أ)	(٣٨) (جـ)	(٣٩) (أ)	(٤٠) (أ)
(٤١) (د)	(٤٢) (ب)	(٤٣) (أ)	(٤٤) (جـ)
(٤٥) (د)			

ثانياً الأسئلة المقالية

١

(١) ٢^{7} = ١٢٨ (٢) $(\frac{2}{5})^{2} = \frac{4}{25}$

(٣) (٢)$^{\frac{5}{2}}$ = ٤ √٢

٢

(١) لو$_{5}$ ١ = صفر (٢) لو$_{0.1}$ ٠٫٠٠٠١ = −٤

(٣) لو$_{5}$ $\frac{1}{125}$ = −٣

٣

(١) بفرض : لو$_{2}$ ١٦ = س

∴ ٢^{س} = ١٦ ∴ ٢^{س} = ٢^{4}

∴ س = ٤ ∴ لو$_{2}$ ١٦ = ٤

(٢) بفرض : لو$_{8}$ ١ = س

∴ ٨^{س} = ١ = ٨^{0} ∴ س = صفر

∴ لو$_{8}$ ١ = صفر

③ بفرض : لو ٠,٠٠٠٠١ = س

∴ $١٠^{س}$ = ٠,٠٠٠٠١ ∴ $١٠^{س} = \frac{١}{١٠٠٠٠٠}$

∴ $١٠^{س} = ١٠^{-٥}$ ∴ س = −٥

∴ لو ٠,٠٠٠٠١ = −٥

④ بفرض : $لو_{\frac{١}{٢}}$ ١٢٨ = س

∴ $(\frac{١}{٢})^{س} = ١٢٨ = ٢^{٧}$

∴ $(\frac{١}{٢})^{س} = (\frac{١}{٢})^{-٧}$ ∴ س = −٧

∴ $لو_{\frac{١}{٢}}$ ١٢٨ = −٧

⑤ بفرض : $لو_{٢}\frac{١}{٨}$ = س ∴ $٢^{س} = \frac{١}{٨}$

∴ $٢^{س} = ٢^{-٣}$ ∴ س = −٣

∴ $لو_{٢}\frac{١}{٨} = -٣$

⑥ بفرض : $لو_{\sqrt{٢}} ٨\sqrt{٢}$ = س

∴ $(\sqrt{٢})^{س} = ٨\sqrt{٢} = (\sqrt{٢})^{٧}$

∴ س = ٧ ∴ $لو_{\sqrt{٢}} ٨\sqrt{٢} = ٧$

⑦ بفرض : $لو_{٣}\sqrt[٤]{٢٧}$ = س

∴ $٣^{س} = \sqrt[٤]{٢٧}$ ∴ $٣^{س} = (٣)^{\frac{٣}{٤}}$

∴ $س = \frac{٣}{٤}$ ∴ $لو_{٣}\sqrt[٤]{٢٧} = \frac{٣}{٤}$

⑧ بفرض : $لو_{٢}$ جتا ٤٥° = $لو_{٢}\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = س

∴ $٢^{س} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ $٢^{س} = ٢^{-\frac{١}{٢}}$

∴ $س = -\frac{١}{٢}$ ∴ $لو_{٢}$ جتا ٤٥° = $-\frac{١}{٢}$

٤

① $٢^{٧}$ = س ∴ س = ١٢٨

② $٥^{-٢}$ = س ∴ $س = \frac{١}{٢٥}$

③ $٣^{٤} = س^{٢}$ ∴ $٨١ = س^{٢}$ ∴ س = ±٩

④ $(٨١)^{\frac{٣}{٤}}$ = س ∴ س = ٢٧

⑤ $٢^{-٥} = س^{-١}$ ∴ $\frac{١}{٢^{٥}} = \frac{١}{س}$ ∴ س = ٣٢

⑥ ٢ = $لو_{٣}$ س ∴ $س = ٣^{٢} = ٩$

⑦ $(٣)^{٠}$ = ٢ س − ٥ ∴ ١ = ٢ س − ٥

∴ س = ٣

⑧ $٨^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{س^{٢} + ٤٨}$ ∴ $٨^{٢} = س^{٢} + ٤٨$

∴ $س^{٢} = ١٦$ ∴ س = ±٤

⑨ $لو_{٢}(س^{٢} - ٢س) = ٣$

∴ $٢^{٣} = س^{٢} - ٢س$

∴ $س^{٢} - ٢س - ٨ = ٠$

∴ (س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = −٢

⑩ ٥ = |٢ س + ١|

∴ ٢ س + ١ = ٥ أ، ٢ س + ١ = −٥

∴ س = ٢ أ، س = −٣

⑪ $٢^{٤}$ = س (س + ٦)

∴ $س^{٢} + ٦س - ١٦ = ٠$

∴ (س − ٢) (س + ٨) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = −٨

⑫ $٣ = س^{٢} - ٢س$

∴ $س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠$

∴ (س − ٣) (س + ١) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = −١

⑬ ($لو_{٣}$ س − ٤) ($لو_{٣}$ س − ٥) = ٠

∴ $لو_{٣}$ س = ٤ ومنها $س = ٣^{٤} = ٨١$

أ، $لو_{٣}$ س = ٥ ومنها $س = ٣^{٥} = ٢٤٣$

⑭ $٣^{س} - ٣^{س-٢} = ٢^{٣}$

∴ $٣^{س-٢}(٣^{٢} - ١) = ٨$ ∴ $٣^{س-٢} = ١$

∴ س − ٢ = ٠ ∴ س = ٢

⑮ $٣^{لو_{٤}(س + ١,٢٥)} = ٣^{-١}$

∴ $لو_{٤}$ (س + ١,٢٥) = −١

∴ $٤^{-١}$ = س + ١,٢٥ ∴ س = −١

⑯ $لو_{١٠}$ س − ٢ = ±٢

∴ $لو_{١٠}$ س − ٢ = ٢ ومنها $لو_{١٠}$ س = ٤

∴ $س = ١٠^{٤}$ أ، $لو_{١٠}$ س − ٢ = −٢

ومنها $لو_{١٠}$ س = ٠ ∴ س = ١

٥

① $س^{٣} = ١٢٥ = ٥^{٣}$ ∴ س = ٥

∴ مجموعة الحل = {٥}

② $س^{٥} = ٢$ ∴ $س = \sqrt[٥]{٢}$

∴ مجموعة الحل = {$\sqrt[٥]{٢}$}

③ $س^{-٢} = ٣$ ∴ $س^{٢} = \frac{١}{٣}$

∴ $س = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ويرفض الحل السالب)

∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{\sqrt{٣}}$}

④ $س^{-\frac{٣}{٤}} = \frac{١}{١٠٠٠}$

∴ $س = (١٠^{-٣})^{-\frac{٤}{٣}} = ١٠٠٠٠$

∴ مجموعة الحل = {١٠٠٠٠}

⑤ $(-س)^{٤} = ٨١ = ٣^{٤}$

∴ س = −٣ (ويرفض الحل الموجب)

∴ مجموعة الحل = {−٣}

⑥ $(س - ١)^{٣} = ٢٧ = ٣^{٣}$ ∴ س − ١ = ٣

∴ س = ٤ ∴ مجموعة الحل = {٤}

⑦ $(س - ١)^{٢} = ٧ - س$

∴ $س^{٢} - ٢س + ١ = ٧ - س$

∴ $س^{٢} - س - ٦ = ٠$

∴ (س + ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٢ (مرفوض) أ، س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

⑧ $(\frac{٢}{س})^{-٣} = ٦٤$ ∴ $(\frac{س}{٢})^{٣} = ٤^{٣}$

∴ $\frac{س}{٢} = ٤$ ∴ س = ٨

∴ مجموعة الحل = {٨}

⑨ $س^{٢} = ٥س$ ∴ $س^{٢} - ٥س = ٠$

∴ س (س − ٥) = ٠ ∴ س = ٠ (مرفوض)

أ، س = ٥

∴ مجموعة الحل = {٥}

⑩ $س^{٥س} = س^{٦}$ ∴ ٥ س = ٦

∴ $س = \frac{٦}{٥}$ مع ملاحظة أن س ∈ $ح^{+}$ − {١}

∴ مجموعة الحل = {$\frac{٦}{٥}$}

⑪ $لو_{٣}$ $لو_{س}$ ٢٧ = $٩^{٠}$ = ١ ∴ $لو_{س}$ ٢٧ = ٣

∴ $س^{٣} = ٢٧ = ٣^{٣}$ ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

⑫ $س = س^{٢} - ١٢$

∴ $س^{٢} - س - ١٢ = ٠$

∴ (س − ٤) (س + ٣) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = −٣ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٤}

⑬ $س = \sqrt{س - ٢} + ٢$

∴ $\sqrt{س - ٢}$ = س − ٢ وبتربيع الطرفين

∴ $س - ٢ = س^{٢} - ٤س + ٤$

∴ $س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٢ ، ٣}

(١٤) $(لو_٣ س)^٢$ − ٨ $لو_٣$ س + ١٥ = ٠

∴ ($لو_٣$ س − ٥) ($لو_٣$ س − ٣) = ٠

∴ $لو_٣$ س = ٥ أ، $لو_٣$ س = ٣

∴ س = $٣^٥$ = ٢٤٣ أ، س = $٣^٣$ = ٢٧

∴ مجموعة الحل = {٢٤٣ ، ٢٧}

٦

(١) $٤^س$ = ٨ $\sqrt{٢}$ ∴ $٢^{٢س} = ٢^{\frac{٧}{٢}}$

∴ ٢ س = $\frac{٧}{٢}$ ∴ س = $\frac{٧}{٤}$

(٢) $(\sqrt{٥})^{س^٢}$ = ٦٢٥ $\sqrt{٥}$ = $(\sqrt{٥})^٩$

∴ $س^٢$ = ٩ ∴ س = ± ٣

(٣) $(٠,٣)^{س^{-٢}}$ = ٠,٠٩ = $(٠,٣)^٢$

∴ $س^{-٢}$ = ٢ ∴ $س^٢ = \frac{١}{٢}$

∴ س = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(٤) $لو_٢$ ($٢^س$ − ٤) = ٥ − س

∴ $٢^{٥ - س}$ = $٢^س$ − ٤ بالضرب × $٢^س$

∴ $٢^٥$ = $٢^{٢س}$ − ٤ × $٢^س$

∴ $٢^{٢س}$ − ٤ × $٢^س$ − ٣٢ = ٠

∴ ($٢^س$ − ٨) ($٢^س$ + ٤) = ٠

∴ $٢^س$ = ٨ أ، $٢^س$ = −٤ (مرفوض)

∴ $٢^س = ٢^٣$ ∴ س = ٣

(٥) $٢^٤$ = ١٣ + $لو_٢$ (س − ١)

∴ $لو_٢$ (س − ١) = ٣ ∴ $٢^٣$ = س − ١

∴ س = ٩

(٦) ٣ = $\frac{س^٢}{٢ س - ٣}$ ∴ $س^٢$ − ٦ س + ٩ = ٠

∴ $(س - ٣)^٢$ = ٠ ∴ س = ٣

٧

(١) ٠,٤٩٨٣ (٢) ٤,٧٥٤٩ (٣) −٢,١٨٩٣

٨

(١) ١,٧١٥٩ (٢) ٢٥,٨٢٢٦ (٣) ٠,٠٥٠١٢

٩

(١) ∵ $لو_س$ ١٦ = ص ∴ $س^ص$ = ١٦

وبالتعويض فى المعادلة الأولى

∴ ١٦ = ٥ س − ٤ ∴ س = ٤

∴ $لو_٤$ ١٦ = ص ∴ $٤^ص$ = ١٦ = $٤^٢$

∴ ص = ٢

∴ مجموعة الحل = {(٤ ، ٢)}

(٢) ∵ $لو_ص$ ٩ = ١ ∴ ص = ٩

∴ $لو_س$ $لو_٢$ $لو_س$ ٩ = ٠

∴ $لو_٢$ $لو_س$ ٩ = $س^٠$ = ١ ∴ $لو_س$ ٩ = ٢

∴ $س^٢$ = ٩ ∴ س = ٣ (ويرفض الحل السالب)

∴ مجموعة الحل = {(٣ ، ٩)}

١٠

∵ $لو_{١٦}$ ٤٩ = أ ∴ $(١٦)^أ$ = ٤٩

∴ $(٤^أ)^٢ = ٧^٢$ ∴ $(٤^أ)^٢ = ٧^٢$

∴ $٤^أ$ = ٧

، ∵ $لو_٧$ ٢,٥ = ب ∴ $٧^ب$ = ٢,٥

∴ $٤^{أب+١} = ٤^{أب} × ٤ = (٤^أ)^ب × ٤ = ٧^ب × ٤$

= ٢,٥ × ٤ = ١٠

١١

(١) ٢ س + ١ > ٠ ∴ س > −$\frac{١}{٢}$

∴ مجال الدالة =]−$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

(٢) س > ٠ ∴ مجال الدالة =]٠ ، ∞[

(٣) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن {س > ٠ ، س ≠ ١}

أى أن : مجال الدالة =]٠ ، ∞[− {١}

(٤) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن {س > ٠ ، س − ٢ > ٠ ، س − ٢ ≠ ١} أى أن : {س > ٠ ، س > ٢ ، س ≠ ٣}

أى أن : مجال الدالة =]٢ ، ∞[− {٣}

(٥) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن {س > ٠ ، ٢ − س > ٠ ، ٢ − س ≠ ١} أى أن : {س > ٠ ، س < ٢ ، س ≠ ١}

أى أن : مجال الدالة =]٠ ، ٢[− {١}

(٦) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق {س − ٣ > ٠ ، ٥ − س > ٠ ، ٥ − س ≠ ١} أى أن : {س > ٣ ، س < ٥ ، س ≠ ٤}

أى أن : مجال الدالة =]٣ ، ٥[− {٤}

(٧) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق {$س^٢$ > ٠ ، س − ٣ > ٠ ، س − ٣ ≠ ١} أى أن : {$س^٢$ > ٠ ، س > ٣ ، س ≠ ٤}

أى أن : مجال الدالة =]٣ ، ∞[− {٤}

(٨) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق {٣ س + ١ > ٠ ، س + ٢ > ٠ ، س + ٢ ≠ ١} أى أن : {س > −$\frac{١}{٣}$ ، س > −٢ ، س ≠ −١}

أى أن : مجال الدالة =]−$\frac{١}{٣}$ ، ∞[

(٩) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق

(٣ − س) (س + ١) > ٠

−∞ − − − (−١) + + + + + + (٣) − − − ∞ (س) ، (٣−س)(س+١) ، صفر ، صفر

أى أن : مجال الدالة =]−١ ، ٣[

(١٠) الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق {(٣ − س) (س + ١) > ٠ ، س > ٠ ، س ≠ ١}

−∞ − − − (−١) + + + + + + (٣) − − − ∞ (س) ، (٣−س)(س+١) ، صفر ، صفر

أى أن : مجال الدالة =]٠ ، ٣[− {١}

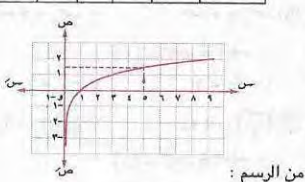
١٢

∵ منحنى الدالة يمر بالنقطة (٨١ ، ٤)

∴ ٤ = $لو_أ$ ٨١ ∴ $أ^٤$ = ٨١

∴ أ = ٣ (ويرفض الحل السالب)

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
د (س)	−٢	−١	٠	١	٢



من الرسم :

المجال = $ح^+$ ، المدى = ح

والدالة تزايدية على مجالها

، نقطة التقاطع مع محور السينات (١ ، ٠)

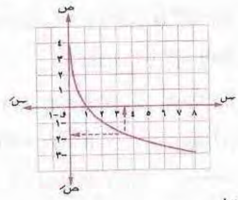
، $لو_٣$ ٥ ≃ ١,٥

١٣

∵ منحنى الدالة يمر بالنقطة $(\frac{1}{8} ، 3)$

∴ $3 = \text{لو}_{أ} \frac{1}{8}$ ∴ $أ^{3} = \frac{1}{8}$ ∴ $أ = \frac{1}{2}$

س	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤
د (س)	٢	١	٠	-١	-٢



من الرسم :

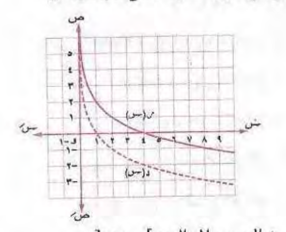
المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها

، نقطة التقاطع مع محور السينات = (١ ، ٠)

، $\text{لو}_{\frac{1}{2}} 3\frac{1}{2} \approx -1.8$

١٤

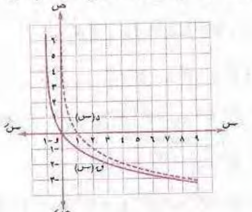
① منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة في اتجاه و ص



من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها.

② منحنى الدالة ن هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها وحدة واحدة في اتجاه و س

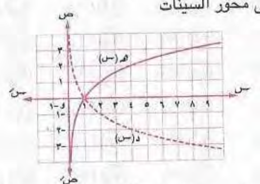


من الرسم : المجال =]-١ ، ∞[

، المدى = ح

، الدالة تناقصية على مجالها.

③ منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د بالانعكاس في محور السينات

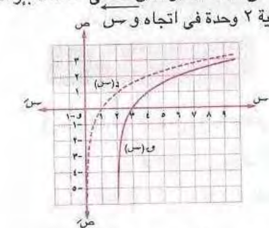


من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[، المدى = ح

، الدالة تزايدية على مجالها.

١٥

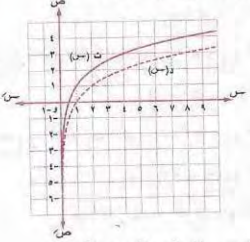
① منحنى الدالة ن هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية ٢ وحدة في اتجاه و س



من الرسم : المجال =]٢ ، ∞[

، المدى ح ، الدالة تزايدية على مجالها.

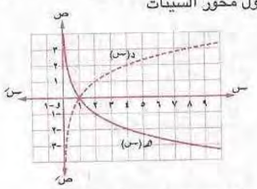
② منحنى الدالة ت هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة وحدة واحدة في اتجاه و ص



من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح ، الدالة تزايدية على مجالها.

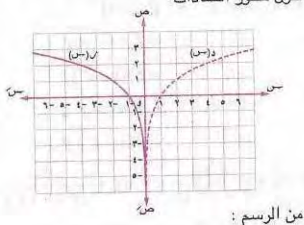
③ منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د بانعكاس حول محور السينات



من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[

، المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها.

④ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بانعكاس حول محور الصادات



من الرسم :

، المجال =]-∞ ، ٠[

، المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها.

١٦

من الرسم نجد أن مجموعة الحل = {٤}

١٧

من الرسم نجد أن مجموعة الحل = {٣}

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (ب)   ② (د)   ③ (أ)   ④ (ب)

⑤ (جـ)   ⑥ (أ)   ⑦ (ب)   ⑧ (د)

إرشادات الحل :

① ∵ $د^{-1}(5) = 14$ ∴ $د(14) = 5$

∴ $\text{لو}_{أ}(2 \times 14 + 4) = 5$

∴ $أ^{5} = 32$ ∴ $أ = 2$

② ∵ $د^{-1}(أ + 3) = 32$

∴ $د(32) = أ + 3$ ∴ $\text{لو}_{4} 32 = أ + 3$

∴ $4^{أ+3} = 32$ ∴ $2^{2أ+6} = 2^{5}$

∴ $2أ + 6 = 5$ ∴ $أ = -\frac{1}{2}$

③ $(د \circ ر)(10) = د(ر(10))$

$= د(7) = \text{لو}_{2} 8 = 3$

④ ∵ لو (س − ٥) > صفر

∴ س − ٥ > ١ ∴ س > ٦

⑤ ∵ لو$_{٣}$ لو$_{٢}$ ||س − ١| + ٥| = ١

∴ لو$_{٢}$ ||س − ١| + ٥| = ٣

∴ ||س − ١| + ٥| = ٨

∴ |س − ١| + ٥ = ± ٨

∴ |س − ١| = −١٣ (مرفوض)

أ، |س − ١| = ٣

∴ س − ١ = ± ٣ ∴ س = ١ ± ٣

∴ س = ٤ أ، س = −٢

∴ مجموعة الحل = {−٢ ، ٤}

⑥ ∵ منحنى الدالة يمر بالنقطتين

(١١ ، ٣) ، (٤ ، ٠)

∴ د (٤) = صفر ∴ لو$_{أ}$ (٤ + ب) = صفر

∴ ٤ + ب = ١ ∴ ب = −٣

، د (١١) = ٣ ∴ لو$_{أ}$ (١١ + ب) = ٣

∴ ١١ + ب = أ^{٣} ∴ أ^{٣} = ٨ ∴ أ = ٢

∴ د (س) = لو$_{٢}$ (س − ٣)

∴ د (٧) = لو$_{٢}$ (٧ − ٣) = ٢ ، د$^{-١}$ (٢) = ٧

∴ د (٧) + د$^{-١}$ (٢) = ٩

⑦ لإيجاد مجال الدالة د (س) = لو |س^{٢} − ٩|

نضع |س^{٢} − ٩| > ٠

أى أن : |(س − ٣) (س + ٣)| > ٠

س ∈ ح − {٣ ، −٣}

∴ مجال الدالة د = ح − {٣ ، −٣}

⑧ لإيجاد مجال الدالة د (س) = $\frac{\text{لو}_{٢} (\text{س} + ٣)}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٢}$

= $\frac{\text{لو}_{٢} (\text{س} + ٣)}{(\text{س} + ١) (\text{س} + ٢)}$

∴ س + ٣ > ٠ ∴ س > −٣

، س ≠ −١ ، س ≠ −٢

∴ المجال =]−٣ ، ∞[− {−١ ، −٢}

إجابات تماريـن 11

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (جـ)	③ (ب)	④ (أ)
⑤ (جـ)	⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)
⑨ (جـ)	⑩ (أ)	⑪ (ب)	⑫ (جـ)
⑬ (جـ)	⑭ (جـ)	⑮ (جـ)	⑯ (جـ)
⑰ (ب)	⑱ (ب)	⑲ (د)	⑳ (ب)
㉑ (جـ)	㉒ (أ)	㉓ (ب)	㉔ (ب)
㉕ (جـ)	㉖ (ب)	㉗ (جـ)	㉘ (أ)
㉙ (د)	㉚ (جـ)	㉛ (أ)	㉜ (د)
㉝ (أ)	㉞ (أ)	㉟ (د)	㊱ (أ)
㊲ (جـ)	㊳ (د)	㊴ (د)	㊵ (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① لو$_{٣}$ ٨١ × لو$_{٩}$ ٣ = لو$_{٣}$ ٣^{٤} × لو$_{٩}$ ٩$^{\frac{١}{٢}}$ = ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٢

② لو$_{٢}$ $\frac{١٥ × ١٤}{١٠٥}$ = لو$_{٢}$ ٢ = ١

③ لو$_{٤}$ لو$_{٢}$ لو$_{٢}$ ٢^{٢} = لو$_{٤}$ لو$_{٢}$ ٢ = لو$_{٤}$ ١ = صفر

④ ١ + لو ٣ − لو ٢ − لو ١٥

= ١ + لو $\left(\frac{٣}{٢ × ١٥}\right)$ = ١ + لو $\frac{١}{١٠}$

= ١ + لو (١٠)$^{-١}$ = ١ − ١ = صفر

⑤ ٢ لو ٢٥ + لو $\left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٥}\right)$ + ٢ لو ٣ − لو ٣٠

= لو ٦٢٥ + لو $\frac{٨}{١٥}$ + لو ٩ − لو ٣٠

= لو $\left(٦٢٥ × \frac{٨}{١٥} × ٩ × \frac{١}{٣٠}\right)$ = لو ١٠٠ = ٢

⑥ لو ٢٥ + $\frac{\text{لو } ٨ × \text{لو } ١٦}{\text{لو } ٦٤}$ = لو ٢٥ + $\frac{٣ \text{ لو } ٢ × ٤ \text{ لو } ٢}{٦ \text{ لو } ٢}$

= لو ٢٥ + ٢ لو ٢

= لو ٢٥ + لو ٤

= لو (٢٥ × ٤)

= لو ١٠٠ = ٢

⑦ $\frac{\text{لو}_{٢} ٢٥ + \text{لو}_{٢} ٤}{\text{لو}_{٢} ٣٠ - \text{لو}_{٢} ٣}$ = $\frac{\text{لو}_{٢} (٢٥ × ٤)}{\text{لو}_{٢} \frac{٣٠}{٣}}$

= $\frac{\text{لو}_{٢} ١٠٠}{\text{لو}_{٢} ١٠}$ = $\frac{٢ \text{ لو}_{٢} ١٠}{\text{لو}_{٢} ١٠}$ = ٢

⑧ $\frac{(\text{لو } ٣)^{٢} - \text{لو } ٣^{٢}}{\text{لو } ٣ - \text{لو } ١٠٠}$ = $\frac{(\text{لو } ٣)^{٢} - ٢ \text{ لو } ٣}{\text{لو } ٣ - ٢ \text{ لو } ١٠}$

= $\frac{\text{لو } ٣ (\text{لو } ٣ - ٢)}{(\text{لو } ٣ - ٢)}$ = لو ٣

⑨ لو$_{٥}$ $\frac{\text{لو}_{٣} ٣ - \text{لو}_{٣} ٢}{\text{لو}_{٣} \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٥}}$ = لو$_{٥}$ $\frac{\text{لو}_{٣} \frac{٣}{٢}}{٥ \text{ لو}_{٣} \frac{٣}{٢}}$ = لو$_{٥}$ $\frac{١}{٥}$ = −١

⑩ لو$_{٣}$ $\frac{\text{لو س}^{١٨}}{\text{لو س}^{٢}}$ = لو$_{٣}$ $\frac{١٨ \text{ لو س}}{٢ \text{ لو س}}$ = لو$_{٣}$ ٩ = ٢

⑪ لو$_{أبجـ}$ أ + لو$_{أبجـ}$ ب + لو$_{أبجـ}$ جـ

= لو$_{أبجـ}$ أبجـ = ١

⑫ $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ أ + $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ ب + ٢ لو$_{٣}$ جـ

− لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أب}}$ − لو$_{٣}$ ٣ جـ^{٢}

= لو$_{٣}$ أ$^{\frac{١}{٢}}$ + لو$_{٣}$ ب$^{\frac{١}{٢}}$ + لو$_{٣}$ جـ^{٢} − لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أب}}$

− (لو$_{٣}$ ٣ + لو$_{٣}$ جـ^{٢})

= لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أ}}$ + لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{ب}}$ + لو$_{٣}$ جـ^{٢} − لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أب}}$

− لو$_{٣}$ ٣ − لو$_{٣}$ جـ^{٢}

= لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أب}}$ − لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أب}}$ − ١ = −١

⑬ $\frac{١}{\text{لو}_{٢} ١٢}$ + $\frac{١}{\text{لو}_{٨} ١٢}$ + $\frac{١}{\text{لو}_{٩} ١٢}$

= لو$_{١٢}$ ٢ + لو$_{١٢}$ ٨ + لو$_{١٢}$ ٩

= لو$_{١٢}$ (٢ × ٨ × ٩) = لو$_{١٢}$ ١٤٤ = لو$_{١٢}$ (١٢)^{٢}

= ٢ لو$_{١٢}$ (١٢) = ٢

٢

① الطرف الأيمن = لو$_{٣}$ $\frac{(١٥)^{٢} × ٧}{٣ × ١٧٥}$ = لو$_{٣}$ ٣

= لو$_{٣}$ $\left(\sqrt{٣}\right)^{٢}$ = ٢ لو$_{٣}$ $\sqrt{٣}$

② الطرف الأيمن = لو$_{٢}$ $\frac{٣ × ٢٩٧}{١١ × ٩٨}$ − ٢ لو$_{٢}$ $\frac{٩}{٧}$

= لو$_{٢}$ $\frac{٣ × ٢٩٧ × ٧^{٢}}{١١ × ٩٨ × ٩^{٢}}$ = لو$_{٢}$ $\frac{١}{٢}$ = −١

③ الطرف الأيمن = (لو ١٠ − لو ٥) (لو ١٠٠ − لو ٢٥)

= (لو $\frac{١٠}{٥}$) (لو $\frac{١٠٠}{٢٥}$) = (لو ٢) (لو ٤)

= (لو ٢) (٢ لو ٢) = ٢ (لو ٢)^{٢}

④ الطرف الأيمن = $\frac{\text{لو } ٣^{٦} - \text{لو } ٢^{٦}}{\text{لو } ٣^{٢} - \text{لو } ٢^{٢}}$ = $\frac{٦ \text{ لو } ٣ - ٦ \text{ لو } ٢}{٢ \text{ لو } ٣ - ٢ \text{ لو } ٢}$

= $\frac{٦ (\text{لو } ٣ - \text{لو } ٢)}{٢ (\text{لو } ٣ - \text{لو } ٢)}$ = ٣

⑤ الطرف الأيمن = $\frac{(\text{لو } ٥)^{٢} - ٢ \text{ لو } ٥}{\text{لو } ٥ - ٢}$

= $\frac{(\text{لو } ٥) (\text{لو } ٥ - ٢)}{\text{لو } ٥ - ٢}$ = لو ٥

، الطرف الأيسر = لو ١٠ − لو ٢ = لو $\frac{١٠}{٢}$ = لو ٥

∴ الطرفان متساويان.

⑥ الطرف الأيمن = $\frac{\text{لو}_{٣} \text{ لو}_{٥} \text{ لو}_{٣} ٣^{٥}}{\text{لو}_{٧} \text{ لو}_{٣} \text{ لو}_{٢} ٢^{٩}}$ = $\frac{\text{لو}_{٣} \text{ لو}_{٥} ٥}{\text{لو}_{٧} \text{ لو}_{٣} ٩}$

= $\frac{\text{لو}_{٣} ١}{\text{لو}_{٧} ٢}$ = صفر

٣

① (س + ٢) لو ٣ = لو ٦

∴ س = $\frac{\text{لو ٦ − ٢ لو ٣}}{\text{لو ٣}}$ ≃ −٠,٣٧

② (٧ − ٢ س) لو ٣ = لو ١٣,٤

∴ س = $\frac{\text{٧ لو ٣ − لو ١٣,٤}}{\text{٢ لو ٣}}$ ≃ ٢,٣٢

③ (س + ١) لو ٧ = (س − ٢) لو ٣

∴ س (لو ٧ − لو ٣) = −٢ لو ٣ − لو ٧

∴ س = $\frac{\text{−٢ لو ٣ − لو ٧}}{\text{لو ٧ − لو ٣}}$ ≃ −٤,٨٩

④ (٢ س − ٣) لو ٣ = (١ − س) لو ١١

∴ س (٢ لو ٣ + لو ١١) = ٣ لو ٣ + لو ١١

∴ س = $\frac{\text{٣ لو ٣ + لو ١١}}{\text{٢ لو ٣ + لو ١١}}$ ≃ ١,٢٤

⑤ س$^{\frac{٨}{٥}}$ = ٩٤,٥   ∴ $\frac{٨}{٥}$ لو |س| = لو ٩٤,٥

∴ لو |س| = $\frac{\text{لو ٩٤,٥}}{\frac{٨}{٥}}$

∴ |س| = (١٠)$^{\frac{\text{٥ لو ٩٤,٥}}{٨}}$ ≃ ١٧,١٧

∴ س = ±١٧,١٧

⑥ ١٠$^{\text{٢س}}$ = $\frac{٥}{٧}$ ∴ ٢ س لو ١٠ = لو $\frac{٥}{٧}$

∴ ٢ س = لو $\frac{٥}{٧}$ ∴ س = $\frac{١}{٢}$ لو $\frac{٥}{٧}$ ≃ −٠,٠٧

⑦ ٧$^{\text{س − ١}}$ (٧^{٢} + ١) = ٣٠٠

∴ ٧$^{\text{س − ١}}$ = ٦   ∴ (س − ١) لو ٧ = لو ٦

∴ س = $\frac{\text{لو ٦ + لو ٧}}{\text{لو ٧}}$ ≃ ١,٩٢

⑧ بالقسمة على ٣$^{\text{س + ١}}$

∴ ($\frac{٢}{٣}$)$^{\text{س}}$ = ٢ × ٣   ∴ س لو $\frac{٢}{٣}$ = لو ٦

∴ س = $\frac{\text{لو ٦}}{\text{لو } \frac{٢}{٣}}$ ≃ −٤,٤٢

⑨ لو ٣ + (س − ١١) لو ٢ = لو ٨ + (٥ س − ١) لو ٦

∴ س (لو ٢ − ٥ لو ٦) = لو ٨ − لو ٣ + ١١ لو ٢ − لو ٦

∴ س = $\frac{\text{لو ٨ − لو ٣ + ١١ لو ٢ − لو ٦}}{\text{لو ٢ − ٥ لو ٦}}$ ≃ −٠,٨٢

⑩ ٥$^{\text{٢س}}$ − ٢٧ × ٥$^{\text{س}}$ + ٥٠ = ٠

∴ (٥$^{\text{س}}$ − ٢٥) (٥$^{\text{س}}$ − ٢) = ٠

∴ إما ٥$^{\text{س}}$ = ٥^{٢} ∴ س = ٢

أ، ٥$^{\text{س}}$ = ٢   ∴ س لو ٥ = لو ٢

∴ س = $\frac{\text{لو ٢}}{\text{لو ٥}}$ ≃ ٠,٤٣

∴ س = ٢ أ، ٠,٤٣

⑪ (٣ − ٥ س) لو ٨ − (٤ + س) لو ٧ = لو ٢

∴ س (−٥ لو ٨ − لو ٧) = لو ٢ − ٣ لو ٨ + ٤ لو ٧

∴ س = $\frac{\text{لو ٢ − ٣ لو ٨ + ٤ لو ٧}}{\text{−٥ لو ٨ − لو ٧}}$ ≃ −٠,١٨

⑫ لو$_{٥}$ (٤$^{\text{س + ١}}$) = س − ٢

∴ ٤$^{\text{س + ١}}$ = ٥$^{\text{س − ٢}}$

∴ (س + ١) لو ٤ = (س − ٢) لو ٥

∴ س لو ٤ + لو ٤ = س لو ٥ − ٢ لو ٥

∴ س (لو ٤ − لو ٥) = − لو ٤ − ٢ لو ٥

∴ س = $\frac{\text{لو ٤ + ٢ لو ٥}}{\text{لو ٥ − لو ٤}}$ ≃ ٢٠,٦٤

٤

① لو$_{٣}$ ١٥ = لو$_{٣}$ ٥ + لو$_{٣}$ ٣ = ١,٤٦٥ + ١ = ٢,٤٦٥

② لو$_{٣}$ ١٣٥ = لو$_{٣}$ ٢٧ + لو$_{٣}$ ٥ = ٣ لو$_{٣}$ ٣ + لو$_{٣}$ ٥

= ٣ + ١,٤٦٥ = ٤,٤٦٥

③ لو$_{٣}$ $\frac{٥}{٩}$ = لو$_{٣}$ ٥ − لو$_{٣}$ ٩ = لو$_{٣}$ ٥ − ٢ لو$_{٣}$ ٣

= ١,٤٦٥ − ٢ = −٠,٥٣٥

٥

① لو ٦ = لو ٢ + لو ٣ = س + ص

② لو$_{١٨}$ ١٢ = $\frac{\text{لو ١٢}}{\text{لو ١٨}}$ = $\frac{\text{لو ٤ + لو ٣}}{\text{لو ٢ + لو ٩}}$

= $\frac{\text{٢ لو ٢ + لو ٣}}{\text{لو ٢ + ٢ لو ٣}}$ = $\frac{\text{٢ س + ص}}{\text{س + ٢ ص}}$

٦

① (خطأ) والتصحيح : لو$_{\text{س}}$ س$^{\text{س}}$ = س

لكل س ∈ ح$^{+}$ − {١}

② (خطأ) والتصحيح : لو$_{\text{م}}$ س$^{\text{ن}}$ = ن لو$_{\text{م}}$ س لكل س ∈ ح$^{+}$

③ (خطأ) والتصحيح : لو$_{\text{م}}$ س ص = لو$_{\text{م}}$ س + لو$_{\text{م}}$ ص

④ (خطأ) والتصحيح : لو$_{\text{م}}$ س ص = لو$_{\text{م}}$ س + لو$_{\text{م}}$ ص

⑤ (صحيحة)   ⑥ (صحيحة)   ⑦ (صحيحة)

⑧ (خطأ) والتصحيح : لو$_{\text{م}}$ س^{٤} = ٤ لو$_{\text{م}}$ |س|

٧

① لو$_{٣}$ (س + ٦) = لو$_{٣}$ س^{٢} ∴ س + ٦ = س^{٢}

∴ س^{٢} − س − ٦ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٢ (مرفوض) أ، س = ٣

∴ م.ح = {٣}

② لو$_{٤}$ س (س + ٦) = ٣

∴ ٤^{٣} = س^{٢} + ٦ س

∴ س^{٢} + ٦ س − ٦٤ = ٠

∴ س = −٣ + $\sqrt{٧٣}$

أ، س = −٣ − $\sqrt{٧٣}$ (مرفوض)

∴ م.ح = {−٣ + $\sqrt{٧٣}$}

③ لو$_{٣}$ س^{٣} = ٣   ∴ ٣ لو$_{٣}$ س = ٣

∴ لو$_{٣}$ س = ١   ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

④ لو$_{٣}$ (س − ١) (س + ١) = لو$_{٣}$ ٨

∴ س^{٢} − ١ = ٨

∴ س^{٢} = ٩   ∴ س = ٣

أ، س = −٣ (مرفوض)   ∴ م.ح = {٣}

⑤ لو $\frac{\text{س + ٨}}{\text{س − ١}}$ = ١   ∴ $\frac{\text{س + ٨}}{\text{س − ١}}$ = ١٠

∴ ١٠ س − ١٠ = س + ٨

∴ ٩ س = ١٨   ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

⑥ لو$_{٤}$ س = لو$_{٤}$ ٤ − لو$_{٤}$ (س − ٣)

∴ لو$_{٤}$ س = لو$_{٤}$ $\frac{٤}{\text{س − ٣}}$ ∴ س = $\frac{٤}{\text{س − ٣}}$

∴ س^{٢} − ٣ س − ٤ = ٠

∴ (س + ١) (س − ٤) = ٠

∴ س = −١ (مرفوض) أ، س = ٤

∴ م.ح = {٤}

⑦ لو$_{٣}$ ٢ س^{٢} = لو$_{٣}$ ١٨   ∴ ٢ س^{٢} = ١٨

∴ س^{٢} = ٩   ∴ س = ±٣

∴ مجموعة الحل = {٣ ، −٣}

⑧ لو$_{٣}$ (٧ س^{٢} − ٤) = لو$_{٣}$ (س^{٢} × ٣)

∴ ٧ س^{٢} − ٤ = ٣ س^{٢} ∴ ٤ س^{٢} = ٤

∴ س = ١ أ، س = −١ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {١}

⑨ لو$_{٣}$ $\frac{\text{(س + ٢)}^{٥}}{\text{(س − ١)}^{٥}}$ = لو$_{٣}$ ٢^{٥} ∴ $\frac{\text{س + ٢}}{\text{س − ١}}$ = ٢

∴ س + ٢ = ٢ س − ٢   ∴ س = ٤

∴ مجموعة الحل = {٤}

⑩ لو (٨ − س) (س − ٦) = ٠

∴ ١٤ س − س^{٢} − ٤٨ = ١

∴ س^{٢} − ١٤ س + ٤٩ = ٠

∴ (س − ٧)^{٢} = ٠ ∴ س = ٧

∴ م.ح = {٧}

(١١) لو (س + ٢) (س − ٢) = لو ١٠ − لو ٢

∴ لو (س^{٢} − ٤) = لو $\frac{١٠}{٢}$ = لو ٥

∴ س^{٢} − ٤ = ٥ ∴ س^{٢} = ٩

∴ س = ٣ (والسالب مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٣}

(١٢) لو ٧ × لو ٣^{٦} = لو ٧^{٣} × لو س^{٣}

∴ ٦ لو ٧ لو ٣ = ٦ لو ٧ لو س

∴ لو ٣ = لو س ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

(١٣) لو$_{٢}$ $\frac{س^{٢} + ٦ س + ٩}{س − ١}$ = لو$_{٥}$ ٥^{٤} = ٤

∴ $\frac{س^{٢} + ٦ س + ٩}{س − ١}$ = ٢^{٤} = ١٦

∴ س^{٢} − ١٠ س + ٢٥ = ٠

∴ (س − ٥)^{٢} = صفر

∴ س = ٥ ∴ مجموعة الحل = {٥}

(١٤) لو س = $\frac{(لو ٣)^{٢} − ٣ لو ٣}{لو ٣ − لو ١٠٠٠}$ = $\frac{لو ٣ (لو ٣ − ٣)}{لو ٣ − ٣}$ = لو ٣

∴ س = ٣ ∴ مجموعة الحل = {٣}

(١٥) (لو س)^{٢} − لو س^{٢} − ٣ = ٠

∴ (لو س)^{٢} − ٢ لو س − ٣ = ٠

∴ (لو س + ١) (لو س − ٣) = ٠

∴ لو س = −١ أ، لو س = ٣

∴ س = ٠,١ أ، س = ١٠٠٠

∴ م.ح = {٠,١ ، ١٠٠٠}

(١٦) (لو س)^{٢} + ٢ لو س + ١ = (لو ٥)^{٢}

∴ (لو س + ١)^{٢} = (لو ٥)^{٢}

∴ لو س + ١ = ± لو ٥

∴ لو س = لو ٥ − ١ = لو ٥ − لو ١٠ = لو $\frac{١}{٢}$

∴ س = $\frac{١}{٢}$

أ، لو س = − لو ٥ − ١ = − لو ٥ − لو ١٠

= − لو ٥٠ = لو (٥٠)$^{-١}$

∴ س = $\frac{١}{٥٠}$

∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٥٠}$}

(١٧) لو$_{س}$ $\frac{٤ × ١٤}{٢٧}$ = ٣ لو$_{س}$ س + لو$_{س}$ ٧

= لو$_{س}$ (س^{٣} × ٧)

∴ ٧ س^{٣} = $\frac{٥٦}{٢٧}$ ∴ س^{٣} = $\frac{٨}{٢٧}$

∴ س = $\frac{٢}{٣}$

∴ مجموعة الحل = {$\frac{٢}{٣}$}

(١٨) لو ($\sqrt[٣]{٣ س − ١}$ × $\sqrt[٣]{س − ٢}$) = لو ٢٠ − لو ١٠

∴ لو $\sqrt[٣]{(٣ س − ١) (س − ٢)}$ = لو ٢

∴ $\sqrt[٣]{(٣ س − ١) (س − ٢)}$ = ٢

∴ (٣ س − ١) (س − ٢) = ٢^{٣}

∴ ٣ س^{٢} − ٧ س − ٦ = ٠

∴ (٣ س + ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = − $\frac{٢}{٣}$ (مرفوض) أ، س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

٨

(١) $\frac{لو س}{لو ٢}$ = $\frac{لو ٩}{لو ٤}$ ∴ $\frac{لو س}{لو ٢}$ = $\frac{٢ لو ٣}{٢ لو ٢}$

∴ لو س = لو ٣ ∴ س = ٣

∴ م.ح = {٣}

(٢) بأخذ لوغاريتم للطرفين

∴ لو ٣$^{لو س}$ = لو ٢$^{لو ٣}$

∴ لو س لو ٣ = لو ٣ لو ٢ ∴ لو س = لو ٢

∴ س = ٢ ∴ م.ح = {٢}

(٣) بأخذ لوغاريتم للطرفين

∴ لو س$^{لو س}$ = لو ١٠

∴ لو س لو س = ١ ∴ (لو س)^{٢} = ١

∴ لو س = ١ أ، لو س = −١

∴ س = ١٠ أ، س = ٠,١

∴ م.ح = {١٠ ، ٠,١}

(٤) $\frac{لو س}{لو ٣}$ = $\frac{لو ٣}{لو س}$ ∴ (لو س)^{٢} = (لو ٣)^{٢}

∴ لو س = لو ٣ ومنها س = ٣

أ، لو س = − لو ٣ = لو ٣$^{-١}$

ومنها س = $\frac{١}{٣}$ ∴ م.ح = {٣ ، $\frac{١}{٣}$}

(٥) (س)$^{٢ لو_{س} س}$ = ٩ لو ١٠ ∴ س^{٢} = ٩

∴ س = ٣ أ، س = −٣ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٣}

(٦) ٤$^{لو س}$ × ٥$^{لو س}$ = ٨٠٠٠

∴ ٢٠$^{لو س}$ = ٨٠٠٠ ∴ ٢٠$^{لو س}$ = ٢٠^{٣}

∴ لو س = ٣ ∴ س = ١٠٠٠

∴ مجموعة الحل = {١٠٠٠}

(٧) ٢$^{(لو س)^{٢}}$ × ٢^{٦} = ٢$^{٥ لو س}$

∴ (لو س)^{٢} + ٦ = ٥ لو س

∴ (لو س)^{٢} − ٥ لو س + ٦ = ٠

∴ (لو س − ٢) (لو س − ٣) = ٠

∴ لو س = ٢ ومنها س = ١٠٠

أ، لو س = ٣ ومنها س = ١٠٠٠

∴ مجموعة الحل = {١٠٠ ، ١٠٠٠}

(٨) بالضرب × ٢ لو س

∴ ٢ (لو س)^{٢} − ٣ لو س − ٢ = ٠

∴ (٢ لو س + ١) (لو س − ٢) = ٠

∴ لو س = − $\frac{١}{٢}$ ومنها س = $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$

أ، لو س = ٢ ومنها س = ١٠٠

∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ، ١٠٠}

(٩) بفرض أن لو$_{٢}$ س = ك ∴ لو$_{س}$ ٢ = $\frac{١}{ك}$

∴ ك + $\frac{١}{ك}$ = ٢ ∴ ك^{٢} − ٢ ك + ١ = ٠

∴ (ك − ١)^{٢} = ٠ ∴ ك = ١

∴ لو$_{٢}$ س = ١ ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

(١٠) بفرض أن لو س = ك ∴ لو$_{س}$ ١٠ = $\frac{١}{ك}$

∴ لو س − ٢ لو$_{س}$ ١٠ = ١

∴ ك − $\frac{٢}{ك}$ = ١ ∴ ك^{٢} − ك − ٢ = ٠

∴ (ك + ١) (ك − ٢) = ٠

∴ ك = −١ أ، ك = ٢

∴ لو س = −١ أ، لو س = ٢

∴ س = ١٠$^{-١}$ = $\frac{١}{١٠}$ أ، س = ١٠^{٢} = ١٠٠

∴ م.ح = {$\frac{١}{١٠}$ ، ١٠٠}

(١١) لو $\frac{س}{٢}$ × لو $\left(\frac{س}{٢}\right)^{-١}$ = −١

∴ − $\left(لو \frac{س}{٢}\right)^{٢}$ = −١ ∴ $\left(لو \frac{س}{٢}\right)^{٢}$ = ١

∴ لو $\frac{س}{٢}$ = ١ ومنها $\frac{س}{٢}$ = ١٠

∴ س = ٢٠

أ، لو $\frac{س}{٢}$ = −١ ومنها $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{١٠}$

∴ س = ٠,٢

∴ مجموعة الحل = {٢٠ ، ٠,٢}

⑫ (لو س)^{٢} = ٩ لو س

∴ (لو س)^{٢} − ٩ لو س = ٠

∴ لو س ((لو س)^{٢} − ٩) = ٠

∴ لو س (لو س − ٣) (لو س + ٣) = ٠

∴ لو س = ٠ ومنها س = ١

أ، لو س = ٣ ومنها س = ١٠٠٠

أ، لو س = −٣ ومنها س = ٠,٠٠١

∴ مجموعة الحل = {١ ، ١٠٠٠ ، ٠,٠٠١}

⑬ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ لو س لو س = لو (١٠٠ س)

∴ (لو س)^{٢} = لو ١٠٠ + لو س

∴ (لو س)^{٢} − لو س − ٢ = ٠

∴ (لو س − ٢) (لو س + ١) = ٠

∴ لو س = ٢ أ، لو س = −١

∴ س = ١٠٠ أ، س = $\frac{١}{١٠}$

∴ م.ح = {١٠٠ ، $\frac{١}{١٠}$}

⑭ (لو س + ٢) (لو س − لو ١٠٠) = ٥

∴ (لو س + ٢) (لو س − ٢) = ٥

∴ (لو س)^{٢} − ٤ = ٥ ∴ (لو س)^{٢} = ٩

∴ لو س = ٣ ومنها س = ١٠٠٠

أ، لو س = −٣ ومنها س = ٠,٠٠١

∴ مجموعة الحل = {١٠٠٠ ، ٠,٠٠١}

⑮ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٣}}$ + $\frac{\text{لو س}^{٢}}{\text{لو ٩}}$ + ٣ = ٠

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٣}}$ + $\frac{\text{٢ لو س}}{\text{٢ لو ٣}}$ = −٣ (مع شطب ٢)

∴ $\frac{\text{٢ لو س}}{\text{لو ٣}}$ = −٣ ∴ لو س = $\frac{-٣}{٢}$ لو ٣

∴ لو س = لو ٣$^{-\frac{٣}{٢}}$ = لو $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$

∴ س = $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$

∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$}

⑯ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}}$ = $\frac{\text{لو (س + ٦)}}{\text{لو ٤}}$

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}}$ = $\frac{\text{لو (س + ٦)}}{\text{٢ لو ٢}}$

∴ ٢ لو س = لو (س + ٦)

∴ س^{٢} = س + ٦ ∴ س^{٢} − س − ٦ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = −٢ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٣}

⑰ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}}$ + $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٤}}$ = $\frac{-٣}{٢}$

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}}$ + $\frac{\text{لو س}}{\text{٢ لو ٢}}$ = $\frac{-٣}{٢}$

∴ $\frac{\text{٣ لو س}}{\text{٢ لو ٢}}$ = $\frac{-٣}{٢}$ ∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}}$ = −١

∴ لو س = لو ٢$^{-١}$ ∴ س = $\frac{١}{٢}$

∴ م.ح = {$\frac{١}{٢}$}

⑱ ∵ $\sqrt{\text{لو}_{٢}\text{ س}}$ = لو$_{٢}$ $\sqrt{\text{س}}$ بالتربيع

∴ لو$_{٢}$ س = لو$_{٢}$ $\sqrt{\text{س}}$ × لو$_{٢}$ $\sqrt{\text{س}}$

= لو$_{٢}$ س$^{\frac{١}{٢}}$ × لو$_{٢}$ س$^{\frac{١}{٢}}$

∴ لو$_{٢}$ س = $\frac{١}{٤}$ (لو$_{٢}$ س)^{٢}

∴ (لو$_{٢}$ س)^{٢} − ٤ لو$_{٢}$ س = ٠

∴ لو$_{٢}$ س (لو$_{٢}$ س − ٤) = ٠

∴ لو$_{٢}$ س = ٠ أ، لو$_{٢}$ س = ٤

∴ س = ٢^{٠} = ١ أ، س = ٢^{٤} = ١٦

∴ م.ح = {١ ، ١٦}

⑲ بالتربيع للطرفين

∴ س$^{\text{لو} \sqrt{\text{س}}}$ = ١٠٠ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ لو $\sqrt{\text{س}}$ لو س = ٢

∴ $\frac{١}{٢}$ (لو س)^{٢} = ٢ ∴ (لو س)^{٢} = ٤

∴ لو س = ٢ أ، لو س = −٢

∴ س = ١٠٠ أ، س = $\frac{١}{١٠٠}$

∴ م.ح = {١٠٠ ، $\frac{١}{١٠٠}$}

⑳ $\sqrt{\text{لو} (٩١ + ٣^{\sqrt{\frac{س}{٢}}})}$ = $\sqrt{٢}$

∴ لو (٩١ + ٣$^{\sqrt{\frac{س}{٢}}}$) = ٢

∴ ٩١ + ٣$^{\sqrt{\frac{س}{٢}}}$ = ١٠^{٢} = ١٠٠

∴ ٣$^{\sqrt{\frac{س}{٢}}}$ = ٩ = ٣^{٢} ∴ $\sqrt{\frac{س}{٢}}$ = ٢

∴ $\frac{س}{٢}$ = ٤ ∴ س = ٨

∴ مجموعة الحل = {٨}

㉑ لو ١ − لو (٢^{س} + س − ١) = س (لو ٥ − لو ١٠)

∴ − لو (٢^{س} + س − ١) = س لو $\frac{١}{٢}$

∴ − لو (٢^{س} + س − ١) = − س لو ٢

∴ لو (٢^{س} + س − ١) = لو ٢^{س}

∴ ٢^{س} + س − ١ = ٢^{س}

∴ س − ١ = ٠ ∴ س = ١

∴ م.ح = {١}

㉒ ∵ لو$_{٢٧}$ (س − ٢) + لو$_{٣}$ (س − ٢) = ٤

∴ $\frac{\text{لو (س − ٢)}}{\text{لو ٢٧}}$ + $\frac{\text{لو (س − ٢)}}{\text{لو ٣}}$ = ٤

∴ $\frac{\text{لو (س − ٢)}}{\text{٣ لو ٣}}$ + $\frac{\text{لو (س − ٢)}}{\text{لو ٣}}$ = ٤

∴ $\frac{\text{لو (س − ٢) + ٣ لو (س − ٢)}}{\text{٣ لو ٣}}$ = ٤

∴ ٤ لو (س − ٢) = ١٢ لو ٣

∴ لو (س − ٢) = ٣ لو ٣ = لو ٢٧

∴ س − ٢ = ٢٧ ∴ س = ٢٩

∴ مجموعة الحل = {٢٩}

٩

① من هندسة الشكل

$\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٦}}$ = $\frac{\text{لو ٤٩}}{\text{لو ٧}}$ ∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٦}}$ = $\frac{\text{٢ لو ٧}}{\text{لو ٧}}$

∴ ٢ لو ٦ = لو س ∴ س = ٣٦

② م ء = لو$_{٨١}$ ٢٤٣ = لو$_{٨١}$ (٨١)$^{\frac{٥}{٤}}$ = $\frac{٥}{٤}$ لو$_{٨١}$ ٨١ = $\frac{٥}{٤}$

، ∵ م ء = $\frac{١}{٣}$ أ ء

∴ أ ء = $\frac{١٥}{٤}$ ، أ ء = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

∴ ب حـ = ٢ × $\frac{١٥}{٤}$ = ٧,٥ سم

③ ق (∠ أ) = ٩٠° ، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{حـ ب}}$

∴ (أ حـ)^{٢} = حـ ء × حـ ب

∴ (٥$\sqrt{٣}$)^{٢} = لو$_{س}$ ٢٧ × (لو$_{س}$ ٢٧ + لو$_{س}$ ٣)

∴ ٧٥ = لو$_{س}$ ٢٧ × لو$_{س}$ ٨١

∴ ٧٥ = ٣ لو$_{س}$ ٣ × ٤ لو$_{س}$ ٣

∴ ٧٥ = ١٢ (لو$_{س}$ ٣)^{٢}

∴ (لو$_{س}$ ٣)^{٢} = $\frac{٧٥}{١٢}$ = $\frac{٢٥}{٤}$

∴ لو$_{س}$ ٣ = $\frac{٥}{٢}$ ومنها س$^{\frac{٥}{٢}}$ = ٣

∴ س = ٣$^{\frac{٢}{٥}}$ ≃ ١,٦

أ، لو$_{س}$ ٣ = $\frac{-٥}{٢}$ ومنها س$^{-\frac{٥}{٢}}$ = ٣

∴ س = ($\frac{١}{٣}$)$^{\frac{٢}{٥}}$ ≃ ٠,٦

④ ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ أ ∴ $\frac{\text{حـ أ}}{\text{أ ب}}$ = $\frac{\text{حـ ء}}{\text{ء ب}}$

∴ $\frac{\text{لو}_{٢}\text{ ٥}}{\text{لو}_{٤}\text{ س}}$ = $\frac{\text{لو ب}}{\text{لو ب}^{٢}}$ ∴ $\frac{\text{لو}_{٢}\text{ ٥}}{\text{لو}_{٤}\text{ س}}$ = $\frac{\text{لو ب}}{\text{٢ لو ب}}$

∴ ٢ لو$_{٢}$ ٥ = لو$_{٤}$ س ∴ لو$_{٢}$ ٢٥ = لو$_{٤}$ س

∴ $\frac{\text{لو ٢٥}}{\text{لو ٢}}$ = $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٤}}$ ∴ $\frac{\text{لو ٢٥}}{\text{لو ٢}}$ = $\frac{\text{لو س}}{\text{٢ لو ٢}}$

∴ لو س = ٢ لو ٢٥ = لو ٦٢٥

∴ س = ٦٢٥

١٠

① ∵ لو ص^{٣} = ٣ − لو ١٢٥

∴ لو ص^{٣} = لو ١٠٠٠ − لو ١٢٥ = لو $\frac{١٠٠٠}{١٢٥}$

∴ ص^{٣} = ٨ ∴ ص = ٢

، ∵ لو س ص = ١ − لو ٥ وبالتعويض عن ص = ٢

∴ لو ٢ س = ١ − لو ٥ = لو ١٠ − لو ٥ = لو ٢

∴ ٢ س = ٢ ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٢)}

② ∵ لو$_{٣}$ (س ص) + ٢ = ٢ + لو$_{٣}$ ٩

∴ لو$_{٣}$ (س ص) = لو$_{٣}$ ٩ ∴ س ص = ٩

، ∵ س = ١٠ − ص

∴ (١٠ − ص) ص = ٩

∴ ص^{٢} − ١٠ ص + ٩ = ٠

∴ (ص − ٩) (ص − ١) = ٠

∴ ص = ٩ ومنها س = ١ أ، ص = ١ ومنها س = ٩

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٩) ، (٩ ، ١)}

③ ∵ ٣ لو س + ٢ لو ص = ١١ (١)

، ٢ لو س − ٣ لو ص = ٣ (٢)

وبضرب (١) × ٣ ، (٢) × ٢ والجمع

∴ ١٣ لو س = ٣٩ ∴ لو س = ٣

∴ س = ١٠٠٠ وبالتعويض فى (١)

∴ ٣ لو ١٠٠٠ + ٢ لو ص = ١١

∴ ٩ + ٢ لو ص = ١١ ∴ لو ص = ١

∴ ص = ١٠

∴ مجموعة الحل = {(١٠٠٠ ، ١٠)}

١١

① الطرف الأيمن = لو$_{٣}$ $\frac{\text{س}^{٥} \times \text{ص}^{٤}}{\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٢}}$ = لو$_{٣}$ س^{٢} ص^{٢}

= لو$_{٣}$ (س ص)^{٢} = ٢ لو$_{٣}$ س ص

= ٢ لو$_{٣}$ ٩ $\sqrt{٣}$ = ٢ لو$_{٣}$ ٣$^{\frac{٥}{٢}}$ = ٥

② ∵ $\frac{١}{٣}$ لو أ = $\frac{١}{٥}$ لو ب = لو حـ ∴ حـ = أ$^{\frac{١}{٣}}$

∴ أ = حـ^{٣} ، حـ = ب$^{\frac{١}{٥}}$ ∴ ب = حـ^{٥}

∴ أ ب = حـ^{٣} × حـ^{٥} = حـ^{٨}

③ ∵ لو $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ لو (س ص) = لو (س ص)$^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٣}$ = (س ص)$^{\frac{١}{٢}}$ وبتربيع الطرفين

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص = ٩ س ص

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ٧ س ص

وبالقسمة على س ص : ∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ + $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = ٧

④ ∵ ٣$^{\text{لو}_{أ}\,\text{س}}$ = أ وبأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس أ

∴ لو$_{أ}$ س لو$_{أ}$ ٣ = ١

∴ لو$_{أ}$ س معكوس ضربى للعدد لو$_{أ}$ ٣

، عندما أ = ٩ ∴ لو$_{٩}$ س لو$_{٩}$ ٣ = ١

∴ لو$_{٩}$ س لو$_{٩}$ ٩$^{\frac{١}{٢}}$ = ١ ∴ $\frac{١}{٢}$ لو$_{٩}$ س = ١

∴ لو$_{٩}$ س = ٢

⑤ لو$_{أ^٢}$ ب^{٢} = $\frac{\text{لو ب}^{٢}}{\text{لو أ}^{٢}}$ = $\frac{\text{٢ لو ب}}{\text{٢ لو أ}}$ = $\frac{\text{لو ب}}{\text{لو أ}}$ = لو$_{أ}$ ب

∴ لو$_{أ}$ ب^{٢} + لو$_{أ^٢}$ ب^{٤} = ٢ لو$_{أ}$ ب + لو$_{أ}$ ب^{٢}

= ٢ لو$_{أ}$ ب + ٢ لو$_{أ}$ ب = ٤ لو$_{أ}$ ب

⑥ لو $\frac{\text{س}^{٣} \times \text{ص}^{٤}}{\text{س}\,\text{ص}^{٢}}$ = ٢ لو ٦

∴ لو س^{٢} ص^{٢} = لو ٣٦

∴ س^{٢} ص^{٢} = ٣٦

∴ س ص = ٦ ∴ س = $\frac{٦}{\text{ص}}$

⑦ الطرف الأيمن = ٢ لو (س + ص)

= لو (س + ص)^{٢}

= لو (س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢})

= لو (١٠ س ص)

= لو ١٠ + لو س + لو ص

= ١ + لو س + لو ص

⑧ لو (س + ص) = $\frac{١}{٢}$ لو (س ص) + لو ٢

∴ لو (س + ص) − لو ٢ = $\frac{١}{٢}$ لو (س ص)

∴ لو $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$ = لو (س ص)$^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$ = س$^{\frac{١}{٢}}$ ص$^{\frac{١}{٢}}$ بالتربيع

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص = ٤ س ص

∴ س^{٢} − ٢ س ص + ص^{٢} = ٠

∴ (س − ص)^{٢} = ٠ ∴ س − ص = ٠

∴ س = ص

⑨ ∵ لو س ص^{٣} = ١ ∴ س ص^{٣} = ١٠

∴ س = $\frac{١٠}{\text{ص}^{٣}}$ (١)

، ∵ لو س^{٢} ص = ١ ∴ س^{٢} ص = ١٠

ومن معادلة (١) :

∴ $\frac{١٠٠}{\text{ص}^{٦}}$ × ص = ١٠ ∴ $\frac{١٠}{\text{ص}^{٥}}$ = ١

∴ ص^{٥} = ١٠ ∴ ص = ١٠$^{\frac{١}{٥}}$

ومن (١) : س = ١٠$^{\frac{٢}{٥}}$

∴ لو س ص = لو (١٠$^{\frac{١}{٥}}$ × ١٠$^{\frac{٢}{٥}}$)

= لو ١٠$^{\frac{٣}{٥}}$ = $\frac{٣}{٥}$ لو ١٠ = $\frac{٣}{٥}$

⑩ الطرف الأيسر = $\frac{١}{\text{لو}_{\text{س}}\,\text{ص}}$ = $\frac{١}{\frac{\text{لو ص}}{\text{لو س}}}$ = $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ص}}$

= لو$_{\text{ص}}$ س

لو$_{٣}$ س + ٣ لو$_{\text{س}}$ ٣ = ٤

بفرض أن لو$_{٣}$ س = ك

∴ ك + $\frac{٣}{\text{ك}}$ = ٤ ∴ ك^{٢} + ٣ = ٤ ك

∴ ك^{٢} − ٤ ك + ٣ = ٠

∴ (ك − ١) (ك − ٣) = ٠

∴ ك = ١ أ، ك = ٣

∴ لو$_{٣}$ س = ١ أ، لو$_{٣}$ س = ٣

∴ س = ٣ أ، س = ٢٧

∴ م.ح = {٣ ، ٢٧}

⑪ ∵ لو$_{\text{س}}$ ص = $\frac{١}{\text{لو}_{\text{ص}}\,\text{س}}$

، ∵ $\frac{٤}{\text{لو}_{\text{س}}\,\text{ص}}$ + $\frac{٧}{\text{لو}_{\text{ع}}\,\text{ص}}$ = ٣ لو$_{\text{ص}}$ ع

∴ ٤ لو$_{\text{ص}}$ س + ٧ لو$_{\text{ص}}$ ع = ٣ لو$_{\text{ص}}$ ع

∴ س^{٤} × ع^{٧} = ع^{٣}

∴ س^{٤} ع^{٤} = ١ ∴ س ع = ١

⑫ ∵ ص = أ$^{\text{لو}_{أ}\,\text{س}}$

وبأخذ اللوغاريتم للأساس أ للطرفين

∴ لو$_{أ}$ ص = لو$_{أ}$ س لو$_{أ}$ أ

∴ لو$_{أ}$ ص = لو$_{أ}$ س ∴ ص = س

∴ ٣$^{\frac{١}{٢}\,\text{لو}_{٣}\,٤٩}$ = ٣$^{\text{لو}_{٣}\sqrt{٤٩}}$ = ٣$^{\text{لو}_{٣}\,٧}$ = ٧

⑬ لو$_{أ^{\text{ص}}}$ أ$^{\text{س}}$ = $\frac{\text{لو أ}^{\text{س}}}{\text{لو أ}^{\text{ص}}}$ = $\frac{\text{س لو أ}}{\text{ص لو أ}}$ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

∴ لو$_{\sqrt[٣]{٥}}$ ١٢٥ = لو$_{(٥)^{\frac{١}{٣}}}$ (٥)^{٣} = $\frac{٣}{\frac{١}{٣}}$ = ٩

، لو$_{٨}$ $\sqrt{٢}$ = لو$_{(٢)^{٣}}$ (٢)$^{\frac{١}{٢}}$ = $\frac{\frac{١}{٢}}{٣}$ = $\frac{١}{٦}$

∴ لو$_{\sqrt[٣]{٥}}$ ١٢٥ × لو$_{٨}$ $\sqrt{٢}$ = ٩ × $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٣}{٢}$

(١٤) بوضع $لو_{ب}\ أ = س$ $\therefore ب^{س} = أ$

$\therefore س\ لو\ ب = لو\ أ$ $\therefore س = \frac{لو\ أ}{لو\ ب}$

$\therefore لو_{ب}\ أ = \frac{لو\ أ}{لو\ ب}$

الطرف الأيمن $= \frac{١}{لو_{أ}\ أ + لو_{أ}\ ب} + \frac{١}{لو_{ب}\ أ + لو_{ب}\ ب}$

$= \frac{١}{١ + \frac{لو\ ب}{لو\ أ}} + \frac{١}{\frac{لو\ أ}{لو\ ب} + ١}$

$= \frac{لو\ أ}{لو\ أ + لو\ ب} + \frac{لو\ ب}{لو\ أ + لو\ ب}$

$= \frac{لو\ أ + لو\ ب}{لو\ أ + لو\ ب} = ١$

(١٥) $لو_{ج} \frac{أ \times ب \times ٤}{(أ + ب)^{٢}} = ٠$ $\therefore \frac{٤\ أ\ ب}{(أ + ب)^{٢}} = ١$

$\therefore (أ + ب)^{٢} = ٤\ أ\ ب$

$\therefore أ^{٢} + ٢\ أ\ ب + ب^{٢} = ٤\ أ\ ب$

$\therefore أ^{٢} - ٢\ أ\ ب + ب^{٢} = ٠$

$\therefore (أ - ب)^{٢} = ٠$ $\therefore أ - ب = ٠$

(١٦) $س^{٢\ لو\ س} \times س^{٣} = ١٠^{٥}$

$\therefore لو\ (س^{٢\ لو\ س} \times س^{٣}) = ٥\ لو\ ١٠$

$\therefore لو\ س^{٢\ لو\ س} + لو\ س^{٣} = ٥$

$\therefore ٢\ لو\ س\ لو\ س + ٣\ لو\ س = ٥$

$\therefore ٢\ (لو\ س)^{٢} + ٣\ لو\ س - ٥ = ٠$

$\therefore (٢\ لو\ س + ٥)(لو\ س - ١) = ٠$

$\therefore لو\ س = -\frac{٥}{٢}$ ومنها $س = ١٠^{-\frac{٥}{٢}} = \frac{١}{١٠٠\sqrt{١٠}}$

أ، $لو\ س = ١$ ومنها $س = ١٠$

(١٧) $ص - \frac{١}{ص} = ١$ $\therefore ص^{٢} - ص - ١ = ٠$

$\therefore ص = \frac{١ \pm \sqrt{١ - ٤ \times ١ \times (-١)}}{٢ \times ١} = \frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

$\therefore أ^{س} = \frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$ $\therefore س\ لو_{م}\ أ = لو_{م} \frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

$\therefore س = لو_{م} \frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ (ويرفض الحل الآخر)

(١٨) $د\ (س + ١) + د\ (س - ١) = د\ (٣)$

$\therefore لو\ (س + ١)^{٢} + لو\ (س - ١)^{٢} = لو\ ٣^{٢}$

$\therefore لو\ (س + ١)^{٢}\ (س - ١)^{٢} = لو\ ٩$

$\therefore (س^{٢} - ١)^{٢} = ٩$

$\therefore س^{٢} - ١ = ٣$

أ، $س^{٢} - ١ = -٣$ (مرفوض)

$\therefore س^{٢} = ٤$ $\therefore س = \pm ٢$

$\therefore$ م.ح $= \{٢ ، -٢\}$

(١٩) $د\ (-س) = لو\ (\sqrt{(-س)^{٢} + ١} - (-س))$

$= لو\ (\sqrt{س^{٢} + ١} + س)$

بالضرب في المرافق

$= لو\ [(\sqrt{س^{٢} + ١} + س) \times \frac{(\sqrt{س^{٢} + ١} - س)}{\sqrt{س^{٢} + ١} - س}]$

$= لو\ (\frac{س^{٢} + ١ - س^{٢}}{\sqrt{س^{٢} + ١} - س})$

$= لو\ (\frac{١}{\sqrt{س^{٢} + ١} - س})$

$= لو\ (\sqrt{س^{٢} + ١} - س)^{-١}$

$= -لو\ (\sqrt{س^{٢} + ١} - س) = -د\ (س)$

$\therefore د\ (-س) = -د\ (س)$

$\therefore$ الدالة فردية.

(٢٠) $لو\ ٤^{٤٧} = ٢٨,٣$

$\therefore ٢٨ < لو\ ٤^{٤٧} < ٢٩$

$\therefore لو\ ١٠^{٢٨} < لو\ ٤^{٤٧} < لو\ ١٠^{٢٩}$

$\therefore ١٠^{٢٨} < ٤^{٤٧} < ١٠^{٢٩}$

$\therefore$ عدد أرقام العدد $٤^{٤٧} = ٢٩$ رقمًا

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

(١) (أ)	(٢) (د)	(٣) (ج)	(٤) (د)	(٥) (ب)
(٦) (ج)	(٧) (ج)	(٨) (ج)	(٩) (أ)	(١٠) (د)
(١١) (د)	(١٢) (د)	(١٣) (ج)	(١٤) (ج)	(١٥) (ج)

إرشادات لحل رقم ١

(١) $\because لو\ س = ع + لو\ ص$

$\therefore لو\ س - لو\ ص = ع$ $\therefore لو \frac{س}{ص} = ع$

$\therefore \frac{س}{ص} = (١٠)^{ع}$ $\therefore س = ص \times (١٠)^{ع}$

(٢) المقدار $= \frac{١}{لو_{ب}\ ب + لو_{ب}\ أ + لو_{ب}\ ج}$

$+ \frac{١}{لو_{ج}\ ج + لو_{ج}\ أ + لو_{ج}\ ب}$

$+ \frac{١}{لو_{أ}\ أ + لو_{أ}\ ب + لو_{أ}\ ج}$

$= \frac{١}{لو_{ب}\ أ\ ب\ ج} + \frac{١}{لو_{ج}\ أ\ ب\ ج} + \frac{١}{لو_{أ}\ أ\ ب\ ج}$

$= لو_{أ\ ب\ ج}\ ب + لو_{أ\ ب\ ج}\ ج + لو_{أ\ ب\ ج}\ أ$

$= لو_{أ\ ب\ ج}\ أ\ ب\ ج = ١$

(٣) $\because (٢٥)^{س} - ١٢ \times (٥)^{س} + ٢٧ = ٠$

$\therefore (٥^{س} - ٩)\ (٥^{س} - ٣) = ٠$

$\therefore ٥^{س} - ٩ = ٠$ ، ومنها $٥^{س} = ٩$

$\therefore س = لو_{٥}\ ٩$

أ، $٥^{س} - ٣ = ٠$ ، ومنها $٥^{س} = ٣$

$\therefore س = لو_{٥}\ ٣$

$\therefore$ مجموع الجذرين $= لو_{٥}\ ٩ + لو_{٥}\ ٣ = لو_{٥}\ ٢٧$

(٤) بوضع $٣^{لو\ س} = ص$ (بأخذ لوغاريتم الطرفين)

$\therefore لو\ س\ لو\ ٣ = لو\ ص$

أي $لو\ ٣\ لو\ س = لو\ ص$ $\therefore لو\ س^{لو\ ٣} = لو\ ص$

$\therefore س^{لو\ ٣} = ص$ أي أن $٣^{لو\ س} = س^{لو\ ٣}$

(٥) $\because لو_{ج}\ لو_{ب}\ لو_{أ}\ أ^{ب^{ج}}$

$= لو_{ج}\ لو_{ب}\ (ب^{ج}\ لو_{أ}\ أ) = لو_{ج}\ لو_{ب}\ ب^{ج}$

$= لو_{ج}\ (ج\ لو_{ب}\ ب) = لو_{ج}\ ج = ١$

(٦) $\because ب^{س} - ٢\ ب^{-س} = ١$

$\therefore ب^{٢س} - ب^{س} - ٢ = ٠$

$\therefore (ب^{س} + ١)\ (ب^{س} - ٢) = ٠$

$\therefore ب^{س} = -١$ (مرفوض) أ، $ب^{س} = ٢$

ومنها $س = لو_{ب}\ ٢$

(٧) $\because \frac{١}{لو_{٢}\ س} + \frac{١}{لو_{٤}\ س} + \frac{١}{لو_{٨}\ س} + \frac{١}{لو_{١٦}\ س} = ٥$

$\therefore لو_{س}\ ٢ + لو_{س}\ ٤ + لو_{س}\ ٨ + لو_{س}\ ١٦ = ٥$

$\therefore لو_{س}\ (٢ \times ٤ \times ٨ \times ١٦) = ٥$

$\therefore لو_{س}\ ١٠٢٤ = ٥$

$\therefore س^{٥} = ١٠٢٤ = (٤)^{٥}$ $\therefore س = ٤$

(٨) $\because لو\ ١ =$ صفر ، $لو\ ١٠ = ١$

، $\therefore لو\ أ \in]٠ ، ١[$ $\therefore أ \in]١ ، ١٠[$

(٩) برسم منحنى الدالة $د\ (أ) = لو_{٣}\ أ$

نجد أن إذا كانت $أ \in]٠ ، ٩[$

فإن: $لو_{٣}\ أ \in]-\infty ، ٢[$

(١٠) $\because ٢^{لو_{٢}\ (س + ٤)} + ٣^{لو_{٣}\ (س + ٥)} = (٢٥)^{لو_{٥}\ ٧}$

$\therefore (س + ٤) + (س + ٥) = ٥^{٢\ لو_{٥}\ ٧}$

$= ٥^{لو_{٥}\ ٤٩} = ٤٩$

$\therefore ٢\ س + ٩ = ٤٩$ $\therefore ٢\ س = ٤٠$

$\therefore س = ٢٠$ $\therefore$ م.ح $= \{٢٠\}$

(١١) $\because لو_{ص}\ س = لو_{س}\ ص$

$\therefore لو_{ص}\ س = \frac{١}{لو_{ص}\ س}$ $\therefore (لو_{ص}\ س)^{٢} = ١$

$\therefore لو_{ص}\ س = \pm ١$

$\therefore س = ص$ أ، $س = ص^{-١} = \frac{١}{ص}$

$\therefore$ الإجابتين أ ، ب صحيحتين

$\therefore$ الإجابة رقم (د)

(١٢) $\because ٣^{أ} = ٥^{ب}$ $\therefore أ\ لو\ ٣ = ب\ لو\ ٥$

$\therefore \frac{أ}{ب} = \frac{لو\ ٥}{لو\ ٣} = لو_{٣}\ ٥$

، $\because ٣^{أ} = ٧^{ج}$ $\therefore أ\ لو\ ٣ = ج\ لو\ ٧$

$\therefore \frac{أ}{ج} = \frac{لو\ ٧}{لو\ ٣} = لو_{٣}\ ٧$

$\therefore \frac{أ}{ب} + \frac{أ}{ج} = لو_{٣}\ ٥ + لو_{٣}\ ٧ = لو_{٣}\ ٣٥$

(١٣) ∵ $\text{لو}_{٢}\,\text{س} + \text{لو}_{٤}\,\text{س} + \text{لو}_{٨}\,\text{س} = ١١$

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} + \frac{\text{لو س}}{\text{لو ٤}} + \frac{\text{لو س}}{\text{لو ٨}} = ١١$

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} + \frac{\text{لو س}}{\text{٢ لو ٢}} + \frac{\text{لو س}}{\text{٣ لو ٢}} = ١١$

∴ $\frac{\text{٦ لو س + ٣ لو س + ٢ لو س}}{\text{٦ لو ٢}} = ١١$

∴ ١١ لو س = ١١ × ٦ لو ٢

∴ لو س = ٦ لو ٢ = لو $٢^{٦}$ = لو ٦٤

∴ س = ٦٤

(١٤) ∵ $\text{لو}_{٢}\,٣ \times \text{لو}_{٣}\,٤ \times \text{لو}_{٤}\,٥ \times ... \times \text{لو}_{ن}(ن+١) = ١٠$

∴ $\frac{\text{لو ٣}}{\text{لو ٢}} \times \frac{\text{لو ٤}}{\text{لو ٣}} \times \frac{\text{لو ٥}}{\text{لو ٤}} \times ... \times \frac{\text{لو (ن + ١)}}{\text{لو ن}} = ١٠$

∴ لو (ن + ١) = ١٠ لو ٢

∴ لو (ن + ١) = لو $٢^{١٠}$

∴ ن + ١ = ١٠٢٤ ∴ ن = ١٠٢٣

(١٥) ∵ د (س) = لو $٢^{\text{س}}$ ∴ د (س) = س لو ٢

∴ د (س) دالة خطية يمثلها خط مستقيم ميله = لو ٢

∴ الإجابة رقم (جـ)

٢

(١) المقدار = $\text{لو}_{٣}\left(\frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٥} \times ..... \times \frac{٨٠}{٨١}\right)$

$= \text{لو}_{٣}\left(\frac{١}{٨١}\right) = \text{لو}_{٣}\,٣^{-٤} = -٤$

(٢) المقدار = لو ظا ١° + لو ظا ٢° + ... + لو ظا ٤٥° + ... + لو ظا ٨٨° + لو ظا ٨٩°

= لو (ظا ١° ظا ٢° ... ظا ٤٥° ... ظا ٨٨° ظا ٨٩°)

= لو (ظا ١° ظا ٢° ... ظا ٤٥° ... ظتا ٢° ظتا ١°)

= لو ظا ٤٥° = لو ١ = صفر

(٣) المقدار = لو ظا ١° × لو ظا ٢° × ... لو ظا ٤٥° × ... × لو ظا ٧٣°

= لو ظا ١° × لو ظا ٢° × ... × لو ١ × ... × لو ظا ٧٣°

= صفر

٣ ∵ $\text{لو}_{ب^{٢}}\,\text{س}^{٢} = \frac{\text{لو س}^{٢}}{\text{لو ب}^{٢}} = \frac{\text{٢ لو س}}{\text{٢ لو ب}} = \frac{\text{لو س}}{\text{لو ب}}$

$= \text{لو}_{ب}\,\text{س}$

، ∵ $\text{لو}_{ب^{٣}}\,\text{س}^{٣} = \frac{\text{لو س}^{٣}}{\text{لو ب}^{٣}} = \frac{\text{٣ لو س}}{\text{٣ لو ب}} = \frac{\text{لو س}}{\text{لو ب}}$

$= \text{لو}_{ب}\,\text{س}$ وهكذا

$\text{لو}_{ب^{ن}}\,\text{س}^{ن} = \frac{\text{لو س}^{ن}}{\text{لو ب}^{ن}} = \frac{\text{ن لو س}}{\text{ن لو ب}} = \frac{\text{لو س}}{\text{لو ب}}$

$= \text{لو}_{ب}\,\text{س}$

∴ $\text{لو}_{ب}\,\text{س} + \text{لو}_{ب^{٢}}\,\text{س}^{٢} + \text{لو}_{ب^{٣}}\,\text{س}^{٣} + ... + \text{لو}_{ب^{ن}}\,\text{س}^{ن}$

$= \text{لو}_{ب}\,\text{س} + \text{لو}_{ب}\,\text{س} + \text{لو}_{ب}\,\text{س} + ... + \text{لو}_{ب}\,\text{س}$

$= \text{ن لو}_{ب}\,\text{س} = \text{لو}_{ب}\,\text{س}^{ن}$

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الثانية

١

الزيادة فى طول نصف القطر

$= \left(\frac{٣ \times ٣٦\,\pi}{٤\,\pi}\right)^{\frac{١}{٣}} - \left(\frac{٣ \times \frac{٣٢}{٣}\,\pi}{٤\,\pi}\right)^{\frac{١}{٣}}$

$= (٢٧)^{\frac{١}{٣}} - (٨)^{\frac{١}{٣}} = ١$ وحدة طول.

٢

(١) $\text{حـ}_{١٠}$ (مجموع العشرة أعداد الأولى)

$= ٢\,(٢^{١٠} - ١) = ٢^{١١} - ٢ = ٢٠٤٦$

(٢) $\text{حـ}_{ن} = ١٣١٠٧٠$

∴ $٢\,(٢^{ن} - ١) = ١٣١٠٧٠$

∴ $٢^{ن} - ١ = ٦٥٥٣٥$ ∴ $٢^{ن} = ٦٥٥٣٦$

∴ $٢^{ن} = ٢^{١٦}$ ∴ ن = ١٦

∴ عدد الحدود = ١٦ حدًا

٣

(١) د (٠) = ٧٠ − ٤ $\text{لو}_{٢}$ ١ = ٧٠ درجة

(٢) د (٧) = ٧٠ − ٤ $\text{لو}_{٢}$ ٨ = ٥٨ درجة

٤

(١) د (٠) = ٨٥ − ٢٥ لو ١ = ٨٥ ٪

(٢) د (٣) = ٨٥ − ٢٥ لو ٤ ≃ ٦٩,٩٥ ٪

(٣) د (١٢) = ٨٥ − ٢٥ لو ١٣ ≃ ٥٧,١٥ ٪

٥

(١) د (٣٦٠٠) = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٣٦٠٠ = ٣٦٠ جنيهًا.

(٢) د (٨٠٠٠) = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٨٠٠٠ + ١٠٠ لو (٨٠٠٠ − ٤٩٩٩)

= ١١٤٧,٧٢٦٦ جنيهًا.

٦

(١) الرقم الهيدروچينى = − لو $١٠^{-٣}$

= ٣ لو ١٠ = ٣

(٢) عندما يكون الرقم الهيدروچينى = ٩

∴ ٩ = − لو (H^{+}) ∴ لو (H^{+}) = −٩

∴ $H^{+} = ١٠^{-٩}$

أى أن تركيز الهيدروچين = $١٠^{-٩}$

٧

(١) أ هو عدد السكان الابتدائى ، ن عدد السنوات

∴ عدد السكان بعد ن سنة = أ $\left(١ + \frac{٧}{١٠٠}\right)^{ن}$

= أ $(١,٠٧)^{ن}$

∴ عدد السكان بعد عام = أ (١,٠٧)

(٢) عندما يتضاعف عدد السكان :

∴ ٢ أ = أ $(١,٠٧)^{ن}$ ∴ ٢ = $(١,٠٧)^{ن}$

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ ن لو ١,٠٧ = لو٢ ∴ ن ≃ ١٠ سنوات.

٨

ع = $١٠^{٥}\,(١,٣)^{ن - ٢٠١٠}$

(١) عام ٢٠١٥ يكون عدد السكان

ع = $١٠^{٥}\,(١,٣)^{٢٠١٥ - ٢٠١٠}$ = ٣٧١٢٩٣ نسمة.

(٢) عندما يصبح عدد السكان ١,٤ مليون نسمة

∴ ١,٤ × $١٠^{٦}$ = $١٠^{٥}\,(١,٣)^{ن - ٢٠١٠}$

∴ $(١,٣)^{ن - ٢٠١٠} = ١٤$

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ (ن − ٢٠١٠) لو ١,٣ = لو ١٤

∴ ن − ٢٠١٠ ≃ ١٠ ∴ ن ≃ ٢٠٢٠

٩

(١) ∵ د = لو $\frac{\text{ش}}{\text{ش}_{.}}$

∴ د = لو $\frac{١,٥ \times ١٠^{٦}\,\text{ش}_{.}}{\text{ش}_{.}}$ = لو (١,٥ × $١٠^{٦}$)

≃ ٦,٢

أى أن الزلزال درجته على مقياس ريختر = ٦,٢

(٢) عندما تكون درجة الزلزال (د) = ٨

∴ ٨ = لو $\frac{\text{ش}}{\text{ش}_{.}}$ ∴ $\frac{\text{ش}}{\text{ش}_{.}} = ١٠^{٨}$

∴ ش = $١٠^{٨}$ ش.

أى أن شدة الزلزال تعادل $١٠^{٨}$ مرة قدر الشدة الابتدائية.

١٠

∵ ك = $\text{ك}_{.}\,(٠,٩)^{ن}$

∴ $\frac{٤٠}{١٠٠}\,\text{ك}_{.} = \text{ك}_{.}\,(٠,٩)^{ن}$

∴ ٠,٤ = $(٠,٩)^{ن}$ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ ن لو ٠,٩ = لو ٠,٤

∴ ن = $\frac{\text{لو ٠,٤}}{\text{لو ٠,٩}}$ ≃ ٩ سنوات.

١١

بفرض أن الكفاءة الابتدائية للآلة أ

∴ أ = $\text{أ}_{.}\left(١ - \frac{٥}{١٠٠}\right)^{ن}$

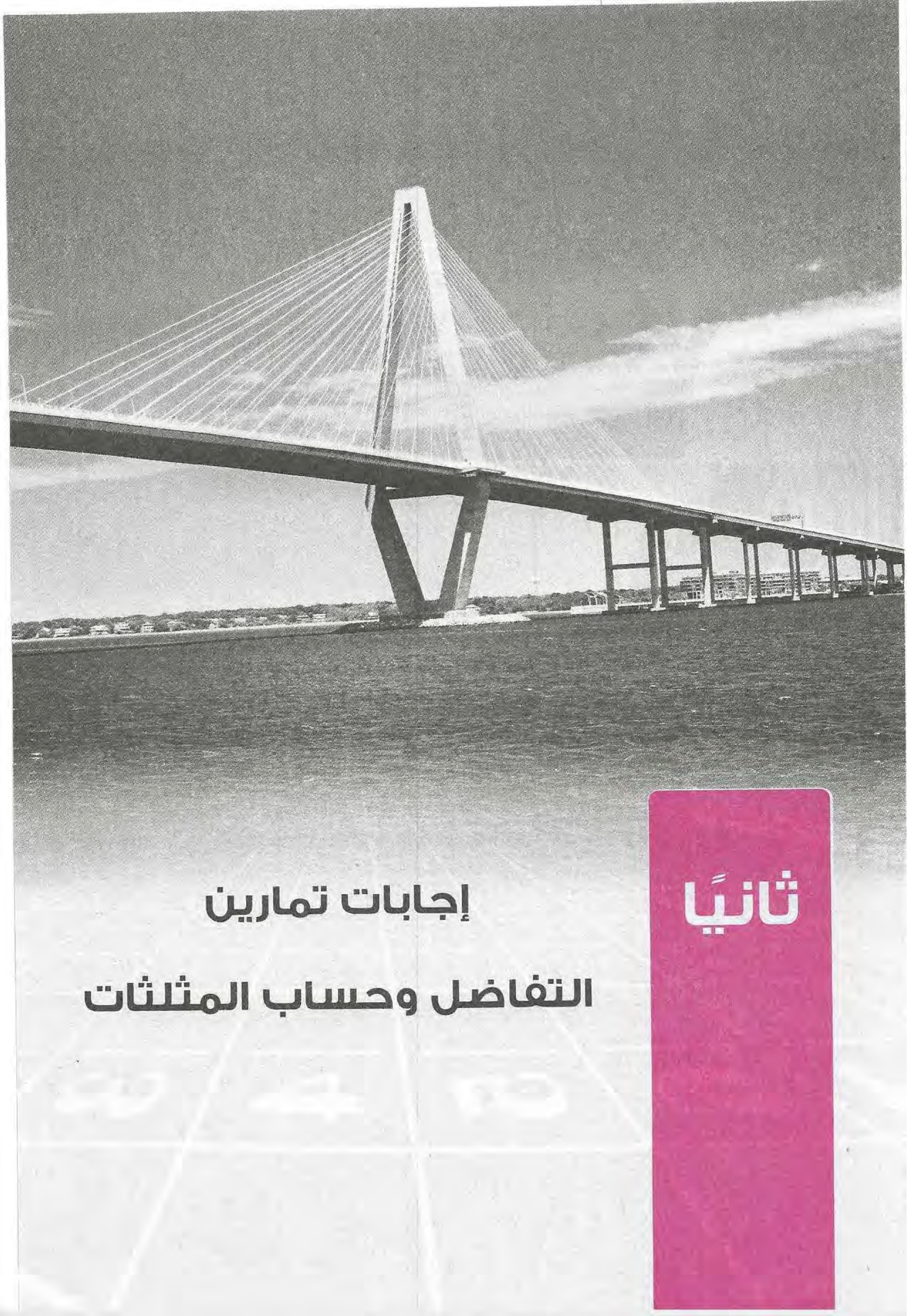
عندما تتوقف الآلة عن التشغيل

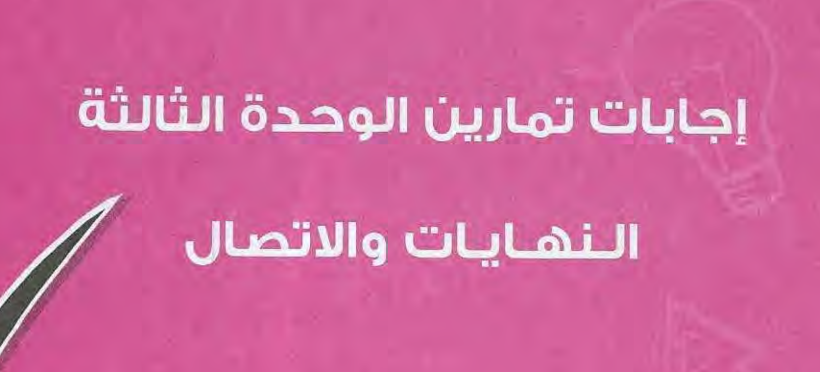
∴ $\frac{٦٠}{١٠٠}\,\text{أ}_{.} = \text{أ}_{.}\,(٠,٩٥)^{ن}$

∴ ٠,٦ = $(٠,٩٥)^{ن}$ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ ن لو ٠,٩٥ = لو ٠,٦

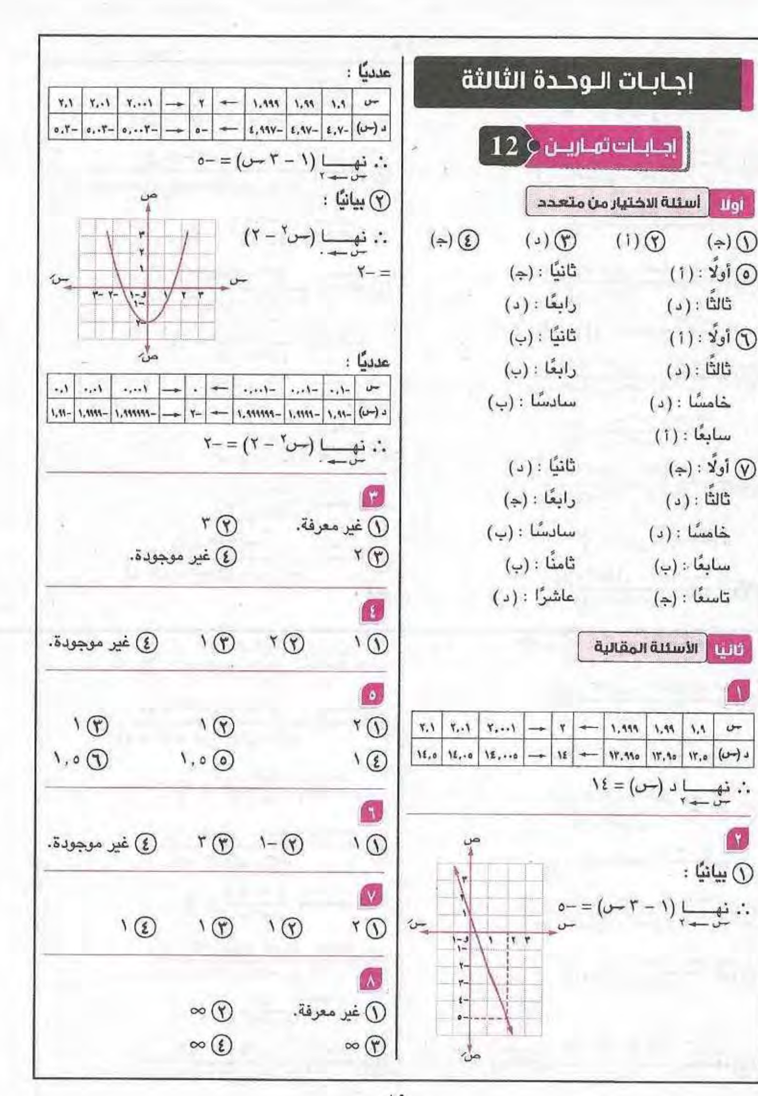
∴ ن ≃ ١٠ سنوات


ثانيًا
إجابات تمارين
التفاضل وحساب المثلثات



إجابات تمارين الوحدة الثالثة

النهايات والاتصال



إجابات الوحدة الثالثة

إجابات تمارين 12

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)　② (أ)　③ (د)　④ (جـ)

⑤ أولًا : (أ)　ثانيًا : (جـ)
ثالثًا : (د)　رابعًا : (د)

⑥ أولًا : (أ)　ثانيًا : (ب)
ثالثًا : (د)　رابعًا : (ب)
خامسًا : (د)　سادسًا : (ب)
سابعًا : (أ)

⑦ أولًا : (جـ)　ثانيًا : (د)
ثالثًا : (د)　رابعًا : (جـ)
خامسًا : (د)　سادسًا : (ب)
سابعًا : (ب)　ثامنًا : (ب)
تاسعًا : (جـ)　عاشرًا : (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د (س)	١٣,٥	١٣,٩٥	١٣,٩٩٥	←	١٤	→	١٤,٠٠٥	١٤,٠٥	١٤,٥

∴ نهـــا$_{س \to ٢}$ د (س) = ١٤

٢

① بيانيًا :

∴ نهـــا$_{س \to ٢}$ (١ − ٣ س) = −٥

عدديًا :

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	←	٢	→	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د (س)	−٤,٧	−٤,٩٧	−٤,٩٩٧	←	−٥	→	−٥,٠٠٣	−٥,٠٣	−٥,٣

∴ نهـــا$_{س \to ٢}$ (١ − ٣ س) = −٥

② بيانيًا :

∴ نهـــا$_{س \to ٠}$ (س^{٢} − ٢)
= −٢

عدديًا :

س	−٠,١	−٠,٠١	−٠,٠٠١	←	٠	→	٠,٠٠١	٠,٠١	٠,١
د (س)	−١,٩٩	−١,٩٩٩٩	−١,٩٩٩٩٩٩	←	−٢	→	−١,٩٩٩٩٩٩	−١,٩٩٩٩	−١,٩٩

∴ نهـــا$_{س \to ٠}$ (س^{٢} − ٢) = −٢

٣

① غير معرفة.　② ٣
③ ٢　④ غير موجودة.

٤

① ١　② ٢　③ ١　④ غير موجودة.

٥

① ٢　② ١　③ ١
④ ١　⑤ ١,٥　⑥ ١,٥

٦

① ١　② −١　③ ٣　④ غير موجودة.

٧

① ٢　② ١　③ ١　④ ١

٨

① غير معرفة.　② ∞
③ ∞　④ ∞

٩

① غير معرفة.　② ∞
③ −∞　④ غير موجودة.

١٠

① ١　② ١　③ ٤　④ غير موجودة.
⑤ غير معرفة.　⑥ ٣　⑦ ٣　⑧ ٣

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (جـ)　② (جـ)　③ (د)　④ (أ)
⑤ (د)　⑥ (أ)　⑦ (جـ).

إرشادات الحل :

① لاحظ أن كلًا من الأشكال (أ) ، (ب) ، (د) تحتوى على قفزة عند س = ٣ وبالتالى لا توجد للدالة نهاية عند س = ٣

أما شكل (جـ) يحتوى علي فجوة عند س = ٣ وبالتالى توجد للدالة نهاية عند س = ٣

② عندما س ← ٠

∴ طول الوتر $\overline{أب}$ ← طول القطر (٢ نق)

أى أن : ص ← ١٠

③ عندما θ ← $\frac{\pi}{٢}$

∴ ص ← $\sqrt{(١٠)^{٢} + (١٠)^{٢}}$

أى أن : ص ← ١٠ $\sqrt{٢}$

④ ∵ المنحنى يقطع محور السينات عند س = ٣

∴ المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ٠)

، ∵ الدالة كثيرة حدود

∴ نهـــا$_{س \to ٣}$ د (س) = صفر

⑤ ∵ المنحنى يقطع محور الصادات عند ص = ٣

∴ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٣)

، ∵ الدالة كثيرة حدود.

∴ نهـــا$_{س \to ٠}$ د (س) = ٣

⑥ ∵ نهـــا$_{س \to ٠}$ د (س)

= نهـــا$_{س \to -١^{+}}$ د (س) + نهـــا$_{س \to ٢^{-}}$ د (س)

∴ ١ = −٢ + أ　　∴ أ = ٣

⑦ ∵ نهـــا$_{س \to أ^{-}}$ د (س)

= نهـــا$_{س \to -١^{-}}$ د (س) + نهـــا$_{س \to ٢^{+}}$ د (س)

∴ نهـــا$_{س \to أ^{-}}$ د (س) = −٣ + ١ = −٢

∴ جميع قيم أ ∋]−١ ، ٣]

تحقق أن نهـــا$_{س \to أ^{-}}$ د (س) = −٢

∴ أكبر قيمة للعدد أ هى ٣

إجابات تمارين 13

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ)　② (ب)　③ (جـ)　④ (أ)
⑤ (جـ)　⑥ (ب)　⑦ (ب)　⑧ (ب)
⑨ (ب)　⑩ (ب)　⑪ (أ)　⑫ (د)
⑬ (ب)　⑭ (جـ)　⑮ (د)　⑯ (ب)
⑰ (جـ)　⑱ (ب)　⑲ (جـ)　⑳ (جـ)
㉑ (ب)　㉒ (ب)　㉓ (د)　㉔ (جـ)
㉕ (أ)　㉖ (د)　㉗ (أ)　㉘ (جـ)
㉙ (ب)　㉚ (د)　㉛ (أ)　㉜ (أ)
㉝ (ب)　㉞ (جـ)　㉟ (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① نهـــا$_{س \to ٥}$ $\frac{(س - ٥)(س + ٥)}{(س - ٥)}$ = نهـــا$_{س \to ٥}$ (س + ٥)

= ١٠

② نهـــا$_{س \to ٣}$ $\frac{(س - ٣)(س - ٥)}{(س - ٣)}$ = نهـــا$_{س \to ٣}$ (س − ٥)

= −٢

(٣) $\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{س^{٢}}{س^{٢}(٣س-٢)}=\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{١}{٣س-٢}$

$=\frac{-١}{٢}$

(٤) $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\frac{٥(س-٢)}{٤(س-٢)}=\frac{٥}{٤}$

(٥) $\underset{س\to٤}{\text{نها}}\frac{٤(س-٤)(س+٤)}{(س-٤)}$

$=\underset{س\to٤}{\text{نها}}٤(س+٤)=٣٢$

(٦) $\underset{س\to٤}{\text{نها}}\frac{٢(س-٤)}{(س-٤)(س+٣)}$

$=\underset{س\to٤}{\text{نها}}\frac{٢}{س+٣}=\frac{٢}{٧}$

(٧) $\underset{س\to-٣}{\text{نها}}\frac{(س+٣)(س+١)}{(س-٣)(س+٣)}$

$=\underset{س\to-٣}{\text{نها}}\frac{س+١}{س-٣}=\frac{-٢}{-٦}=\frac{١}{٣}$

(٨) $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\frac{س(س-٢)}{(س-٢)(س+١)}$

$=\underset{س\to٢}{\text{نها}}\frac{س}{س+١}=\frac{٢}{٣}$

(٩) $\underset{س\to-١}{\text{نها}}\frac{(س-٤)(س+١)}{(س-٢)(س+١)}$

$=\underset{س\to-١}{\text{نها}}\frac{س-٤}{س-٢}=\frac{٥}{٣}$

(١٠) $\underset{س\to\frac{١}{٢}}{\text{نها}}\frac{(٢س-١)(س-٢)}{(٢س-١)}$

$=\underset{س\to\frac{١}{٢}}{\text{نها}}(س-٢)=-\frac{٣}{٢}$

(١١) $\underset{س\to٩}{\text{نها}}\frac{-(س-٩)}{(س-٩)(س+٩)}$

$=\underset{س\to٩}{\text{نها}}\frac{-١}{س+٩}=\frac{-١}{١٨}$

(١٢) $\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{(٣س+٤)(س-١)}{(س-١)(س+١)}$

$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{٣س+٤}{س+١}=\frac{٧}{٢}$

(١٣) $\underset{س\to\frac{٣}{٤}}{\text{نها}}\frac{(٤س-٣)(٤س+٣)}{٢(٤س-٣)}$

$=\underset{س\to\frac{٣}{٤}}{\text{نها}}\frac{٤س+٣}{٢}=٣$

(١٤) $\underset{س\to٣}{\text{نها}}\frac{(٢س+١)(س-٣)}{(٢س+٣)(س-٣)}$

$=\underset{س\to٣}{\text{نها}}\frac{٢س+١}{٢س+٣}=\frac{٧}{٩}$

(١٥) $\underset{س\to٣}{\text{نها}}\frac{(س-٣)(س+٥)}{٥(س-٣)(س+٣)}$

$=\underset{س\to٣}{\text{نها}}\frac{س+٥}{٥(س+٣)}=\frac{٤}{١٥}$

(١٦) $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\frac{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}{٣(س-٢)(س+٢)}$

$=\underset{س\to٢}{\text{نها}}\frac{س^{٢}+٢س+٤}{٣(س+٢)}=\frac{١٢}{١٢}=١$

٢

(١) $\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{(س+٢-٢)(س+٢+٢)}{س(س+١)}$

$=\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{س+٤}{س+١}=٤$

(٢) $\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{٤س^{٢}-٤س}{٥س}$

$=\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{٤س(س-١)}{٥س}$

$=\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{٤(س-١)}{٥}=\frac{-٤}{٥}$

(٣) $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\frac{(س-٣-١)(س-٣+١)}{(س-٢)(٢س+١)}$

$=\underset{س\to٢}{\text{نها}}\frac{س-٤}{٢س+١}=\frac{-٢}{٥}$

(٤) $\underset{س\to-٢}{\text{نها}}\frac{(س+٢+١)[(س+٢)^{٢}-(س+٢)+١]}{٢س(س+٣)}$

$=\underset{س\to-٢}{\text{نها}}\frac{(س+٢)^{٢}-(س+٢)+١}{٢س}=\frac{-١}{٢}$

(٥) $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\frac{(س^{٢}-٤)(س^{٢}+٥)}{س-٢}$

$=\underset{س\to٢}{\text{نها}}\frac{(س-٢)(س+٢)(س^{٢}+٥)}{(س-٢)}$

$=\underset{س\to٢}{\text{نها}}(س+٢)(س^{٢}+٥)=٣٦$

(٦) $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\frac{(س-٢)^{٢}(س+٢)^{٢}}{(س-٢)}$

$=\underset{س\to٢}{\text{نها}}(س-٢)(س+٢)^{٢}=$ صفر

(٧) $\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{٢(س-١)}{(س-١)^{٥}+٢(س-١)}$

$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{٢(س-١)}{(س-١)\left[(س-١)^{٤}+٢\right]}$

$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{٢}{(س-١)^{٤}+٢}=١$

(٨) $\underset{س\to-٢}{\text{نها}}\frac{(س+٢)}{(س+٢)(س-٢)(س^{٢}+٤)}$

$=\underset{س\to-٢}{\text{نها}}\frac{١}{(س-٢)(س^{٢}+٤)}$

$=-\frac{١}{٣٢}$

(٩) $\underset{س\to٩}{\text{نها}}\frac{(\sqrt{س}-٣)(\sqrt{س}+٤)}{(\sqrt{س}-٣)(\sqrt{س}+٣)}$

$=\underset{س\to٩}{\text{نها}}\frac{\sqrt{س}+٤}{\sqrt{س}+٣}=\frac{٧}{٦}$

(١٠) $\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{١}{س}\times\frac{٢-(س+٢)}{٢(س+٢)}$

$=\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{-س}{٢س(س+٢)}$

$=\underset{س\to٠}{\text{نها}}\frac{-١}{٢(س+٢)}=\frac{-١}{٤}$

(١١) $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\frac{س^{٣}(س-٢)-٦(س-٢)}{(س-٢)(س+٣)}$

$=\underset{س\to٢}{\text{نها}}\frac{(س-٢)(س^{٣}-٦)}{(س-٢)(س+٣)}$

$=\underset{س\to٢}{\text{نها}}\frac{س^{٣}-٦}{س+٣}=\frac{٢}{٥}$

(١٢) $\underset{س\to٣}{\text{نها}}\frac{٥}{س}+\underset{س\to٣}{\text{نها}}\frac{س(س-٣)}{س-٣}$

$=\frac{٥}{٣}+٣=\frac{١٤}{٣}$

(١٣) $\underset{س\to-١}{\text{نها}}\frac{س^{٢}-٣س-٤}{س^{٢}-١}$

$=\underset{س\to-١}{\text{نها}}\frac{(س+١)(س-٤)}{(س+١)(س-١)}$

$=\underset{س\to-١}{\text{نها}}\frac{س-٤}{س-١}=\frac{٥}{٢}$

(١٤) $\underset{س\to١}{\text{نها}}\left(\frac{١}{س-١}-\frac{٣}{(س-١)(س^{٢}+س+١)}\right)$

$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\left(\frac{س^{٢}+س+١-٣}{(س-١)(س^{٢}+س+١)}\right)$

$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{(س-١)(س+٢)}{(س-١)(س^{٢}+س+١)}$

$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{س+٢}{س^{٢}+س+١}=١$

٣

* باستخدام القسمة المطولة أو القسمة التركيبية فى المسائل التالية نقسم كلاً من البسط والمقام على العامل الصفرى فنجد أن :

(١) $\underset{س\to٤}{\text{نها}}\frac{(س-٤)(س^{٢}+٤س+١)}{س-٤}$

$=\underset{س\to٤}{\text{نها}}(س^{٢}+٤س+١)=٣٣$

(٢) $\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{(س-١)(س^{٢}+س-١)}{(س-١)(س+٢)}$

$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{س^{٢}+س-١}{س+٢}=\frac{١}{٣}$

(٣) $\underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{س(س-٤)(س^{٢}+٤س-٥)}{(س-٤)}$

$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}} س(س^{٢}+٤س-٥) = ١٠٨$

(٤) $\underset{س\to -٢}{\text{نها}} \frac{(س+٢)(٢س^{٢}-س+٢)}{(س+٢)(س^{٢}-٢س+٤)}$

$= \underset{س\to -٢}{\text{نها}} \frac{(٢س^{٢}-س+٢)}{س^{٢}-٢س+٤} = \frac{١٢}{١٢} = ١$

(٥) $\underset{س\to -٢}{\text{نها}} \frac{(س+٢)^{٢}}{(س-٣)(س+٢)^{٢}}$

$= \underset{س\to -٢}{\text{نها}} \frac{١}{س-٣} = \frac{-١}{٥}$

(٦) $\underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{(س-١)^{٢}(س-٣)}{س(س-١)^{٢}}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{س-٣}{س} = -٢$

٤

(١) $\underset{س\to ٩}{\text{نها}} \frac{(\sqrt{س}-٣)(\sqrt{س}+٣)}{(س-٩)(\sqrt{س}+٣)}$

$= \underset{س\to ٩}{\text{نها}} \frac{س-٩}{(س-٩)(\sqrt{س}+٣)}$

$= \underset{س\to ٩}{\text{نها}} \frac{١}{\sqrt{س}+٣} = \frac{١}{٦}$

(٢) $\underset{س\to ٥}{\text{نها}} \frac{(\sqrt{س-١}-٢)(\sqrt{س-١}+٢)}{(س-٥)(\sqrt{س-١}+٢)}$

$= \underset{س\to ٥}{\text{نها}} \frac{س-١-٤}{(س-٥)(\sqrt{س-١}+٢)}$

$= \underset{س\to ٥}{\text{نها}} \frac{١}{\sqrt{س-١}+٢} = \frac{١}{٤}$

(٣) $\underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{س+١}{\sqrt{س+٥}-٢} \times \frac{\sqrt{س+٥}+٢}{\sqrt{س+٥}+٢}$

$= \underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{(س+١)(\sqrt{س+٥}+٢)}{س+٥-٤}$

$= \underset{س\to -١}{\text{نها}} (\sqrt{س+٥}+٢) = ٤$

(٤) $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\sqrt{٣-٢س}-\sqrt{٣})(\sqrt{٣-٢س}+\sqrt{٣})}{س(\sqrt{٣-٢س}+\sqrt{٣})}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{٣-٢س-٣}{س[\sqrt{٣-٢س}+\sqrt{٣}]}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{-٢}{\sqrt{٣-٢س}+\sqrt{٣}} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$

(٥) $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\sqrt{٢س+٩}-٣)(\sqrt{٢س+٩}+٣)}{س(س+١)(\sqrt{٢س+٩}+٣)}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢س+٩-٩}{س(س+١)(\sqrt{٢س+٩}+٣)}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢}{(س+١)(\sqrt{٢س+٩}+٣)} = \frac{١}{٣}$

(٦) $\underset{س\to ٥}{\text{نها}} \frac{س(س-٥)}{(\sqrt{س+٤}-٣)} \times \frac{(\sqrt{س+٤}+٣)}{(\sqrt{س+٤}+٣)}$

$= \underset{س\to ٥}{\text{نها}} \frac{س(س-٥)(\sqrt{س+٤}+٣)}{س+٤-٩}$

$= \underset{س\to ٥}{\text{نها}} س(\sqrt{س+٤}+٣) = ٣٠$

(٧) $\underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{(س-٣)(س+٢)(\sqrt{٥س-٦}+٣)}{(\sqrt{٥س-٦}-٣)(\sqrt{٥س-٦}+٣)}$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{(س-٣)(س+٢)(\sqrt{٥س-٦}+٣)}{٥س-٦-٩}$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{(س-٣)(س+٢)(\sqrt{٥س-٦}+٣)}{٥(س-٣)}$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{(س+٢)(\sqrt{٥س-٦}+٣)}{٥} = ٦$

(٨) $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\sqrt{١+س}-\sqrt{١-س})(\sqrt{١+س}+\sqrt{١-س})}{٢س(\sqrt{١+س}+\sqrt{١-س})}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١+س-١+س}{٢س(\sqrt{١+س}+\sqrt{١-س})}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{\sqrt{١+س}+\sqrt{١-س}} = \frac{١}{٢}$

(٩) $\underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{(س-١)(\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س})}{(\sqrt{٣س-٢}-\sqrt{س})(\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س})}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{(س-١)(\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س})}{٣س-٢-س}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{(س-١)(\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س})}{٢(س-١)}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س}}{٢} = ١$

(١٠) $\underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س^{٢}+٨}-٣}{س+١} \times \frac{\sqrt{س^{٢}+٨}+٣}{\sqrt{س^{٢}+٨}+٣}$

$= \underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{س^{٢}+٨-٩}{(س+١)(\sqrt{س^{٢}+٨}+٣)}$

$= \underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{(س-١)(س+١)}{(س+١)(\sqrt{س^{٢}+٨}+٣)}$

$= \underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{س-١}{\sqrt{س^{٢}+٨}+٣} = \frac{-١}{٣}$

(١١) $\underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{(١-س)(٢+\sqrt{س^{٢}+٣})}{(٢-\sqrt{س^{٢}+٣})(٢+\sqrt{س^{٢}+٣})}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{(١-س)(٢+\sqrt{س^{٢}+٣})}{٤-س^{٢}-٣}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{(١-س)(٢+\sqrt{س^{٢}+٣})}{(١-س)(١+س)}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{٢+\sqrt{س^{٢}+٣}}{١+س} = ٢$

(١٢) $\underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{(\sqrt{س+١}-٢)(\sqrt{س+١}+٢)(\sqrt{س-٢}+١)}{(\sqrt{س-٢}-١)(\sqrt{س+١}+٢)(\sqrt{س-٢}+١)}$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{(س+١-٤)(\sqrt{س-٢}+١)}{(س-٢-١)(\sqrt{س+١}+٢)}$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س-٢}+١}{\sqrt{س+١}+٢} = \frac{١}{٢}$

(١٣) $\underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{(\sqrt{٢٤-٥س}-٢)(\sqrt{٢٤-٥س}+٢)(٣+\sqrt{س+٥})}{(٣-\sqrt{س+٥})(٣+\sqrt{س+٥})(\sqrt{٢٤-٥س}+٢)}$

$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{(٢٤-٥س-٤)(٣+\sqrt{س+٥})}{(٩-س-٥)(\sqrt{٢٤-٥س}+٢)}$

$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{٥(٤-س)(٣+\sqrt{س+٥})}{(٤-س)(\sqrt{٢٤-٥س}+٢)}$

$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{٥(٣+\sqrt{س+٥})}{\sqrt{٢٤-٥س}+٢} = \frac{٥\times ٦}{٤} = ٧,٥$

(١٤) $\underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{(س-٣)(س+\sqrt{س+٦})}{(س-\sqrt{س+٦})(س+\sqrt{س+٦})}$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{(س-٣)(س+\sqrt{س+٦})}{س^{٢}-س-٦}$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{(س-٣)(س+\sqrt{س+٦})}{(س-٣)(س+٢)}$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{س+\sqrt{س+٦}}{س+٢} = \frac{٦}{٥}$

---

٥ $\because \underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{د(س)-٥}{س-٢} = ١$ (لها وجود)

، $\because \underset{س\to ٢}{\text{نها}} (س-٢) = ٠$

$\therefore \underset{س\to ٢}{\text{نها}} د(س) - ٥ = ٠$

$\therefore \underset{س\to ٢}{\text{نها}} د(س) = \underset{س\to ٢}{\text{نها}} (٥) = ٥$

---

٦ $\because \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{د(س)}{س^{٢}} = ٥$

$\therefore د(س) = س^{٢}(ر(س))$

(١) $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} د(س) =$ صفر

(٢) $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{د(س)}{س} = \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{س^{٢}(ر(س))}{س}$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} س(ر(س))$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} س \times \underset{س\to ٠}{\text{نها}} ر(س) = ٠ \times ٥ = ٠$

7
$$\underset{\text{س}\to\text{-١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{(س + ١) (س − أ)}}{\text{(س + ١)}} = \text{٤}$$
$$\therefore \underset{\text{س}\to\text{-١}}{\text{نهـا}} \text{(س − أ)} = \text{٤}$$
$$\therefore \text{-١ − أ = ٤} \qquad \therefore \text{أ = -٥}$$

8
$$\because \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{٢}}\text{ + أ س + ب}}{\text{س − ١}} \text{ موجودة وتساوى ٥}$$
، $\because$ المقام = صفر عند س = ١

$\therefore$ البسط = صفر عند س = ١

$$\therefore \text{١ + أ + ب = ٠} \qquad \therefore \text{ب = − أ − ١}$$
$$\therefore \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{٢}}\text{ + أ س − أ − ١}}{\text{س − ١}} = \text{٥}$$
$$\therefore \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{(س}^{\text{٢}}\text{ − ١) + (أ س − أ)}}{\text{س − ١}} = \text{٥}$$
$$\therefore \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{(س − ١) (س + ١) + أ (س − ١)}}{\text{(س − ١)}} = \text{٥}$$
$$\therefore \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{(س − ١) (س + ١ + أ)}}{\text{(س − ١)}} = \text{٥}$$
$$\therefore \text{٢ + أ = ٥} \qquad \therefore \text{أ = ٣ ومنها ب = -٤}$$

9
$$\underset{\text{س}\to\text{١٠٠}}{\text{نهـا}} \text{(٠,٢ س}^{\text{٢}}\text{ + ٤٠ س + ١٥٠)}$$
= ٦١٥٠ جنيهًا

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1

(١) (أ) (٢) (د) (٣) (د) (٤) (أ)

إرشادات لحل رقم ١

$$\text{(١)} \because \text{س (د (س) + ١) = د (س) + س}^{\text{٢}}$$
$$\therefore \text{س د (س) + س = د (س) + س}^{\text{٢}}$$
$$\therefore \text{س د (س) − د (س) = س}^{\text{٢}}\text{ − س}$$
$$\therefore \text{(س − ١) د (س) = س (س − ١)}$$
$$\therefore \text{د (س)} = \frac{\text{س (س − ١)}}{\text{(س − ١)}} = \text{س}$$
$$\text{حيث س} \neq \text{١} \qquad \therefore \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \text{د (س) = ١}$$

$$\text{(٢)} \because \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{م س + ك}}\text{ − ٣}}{\text{س}}$$
موجودة وتساوى ٢

، $\because$ المقام = صفر عند س = ٠

$\therefore$ البسط = ٠ عندما س = ٠

$$\therefore \sqrt{\text{ك}} = \text{٣} \qquad \therefore \text{ك = ٩}$$
$$\text{،} \because \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{م س + ٩}}\text{ − ٣}}{\text{س}} = \text{٢}$$
$$\therefore \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt{\text{م س + ٩}}\text{ − ٣})}{\text{س}} \times \frac{(\sqrt{\text{م س + ٩}}\text{ + ٣})}{(\sqrt{\text{م س + ٩}}\text{ + ٣})} = \text{٢}$$
$$\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{م س + ٩ − ٩}}{\text{س} (\sqrt{\text{م س + ٩}}\text{ + ٣})} = \text{٢}$$
$$\therefore \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{م}}{\sqrt{\text{م س + ٩}}\text{ + ٣}} = \text{٢}$$
$$\therefore \frac{\text{م}}{\text{٦}} = \text{٢} \qquad \therefore \text{م = ١٢}$$
$$\therefore \frac{\text{م}}{\text{ك}} = \frac{\text{١٢}}{\text{٩}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$$

$$\text{(٣)} \because \text{٢} \underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \text{د (س)}$$
$$\text{− ٥} \underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \text{هـ (س) = ١٠} \qquad \text{(١)}$$
$$\text{،} \underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \text{د (س) +} \underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \text{هـ (س) = ٦} \qquad \text{(٢)}$$
وبضرب المعادلة (٢) × ٥

$$\therefore \text{٥} \underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \text{د (س)}$$
$$\text{+ ٥} \underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \text{هـ (س) = ٣٠} \qquad \text{(٣)}$$
بحل (١) ، (٣) :

$$\therefore \text{٧} \underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \text{د (س) = ٤٠}$$
$$\therefore \underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \text{د (س)} = \frac{\text{٤٠}}{\text{٧}}$$

وبالتعويض فى (٢) :

$$\therefore \underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \text{هـ (س) = ٦ −} \frac{\text{٤٠}}{\text{٧}} = \frac{\text{٢}}{\text{٧}}$$
$$\therefore \underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \frac{\text{د (س)}}{\text{هـ (س)}} = \frac{\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \text{د (س)}}{\underset{\text{س}\to\text{م}}{\text{نهـا}} \text{هـ (س)}} = \frac{\frac{\text{٤٠}}{\text{٧}}}{\frac{\text{٢}}{\text{٧}}}$$
= ٢٠

$$\text{(٤)} \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ س}^{\text{٢}}\text{ − ق (س)}}{\text{س − ٢}}$$
$$= \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ س}^{\text{٢}}\text{ − ق (س) + ٨ − ٨}}{\text{س − ٢}}$$
$$= \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ س}^{\text{٢}}\text{ − ٨}}{\text{س − ٢}} - \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق (س) − ٨}}{\text{س − ٢}}$$
$$= \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ (س − ٢) (س + ٢)}}{\text{(س − ٢)}}$$
$$- \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق (س) − ٨}}{\text{س − ٢}}$$
$$= \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}} \text{٢ (س + ٢)} - \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق (س) − ٨}}{\text{س − ٢}}$$
= ٨ − ٧ = ١

2

$$\text{(١)} \underset{\text{س}\to\text{٥}}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{(س − ٥) (س + ١)}}{\text{(س − ٥) (س − ١)}} \right]^{\text{٢}}$$
$$= \underset{\text{س}\to\text{٥}}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{س + ١}}{\text{س − ١}} \right]^{\text{٢}} = \left(\frac{\text{٣}}{\text{٢}}\right)^{\text{٢}} = \frac{\text{٩}}{\text{٤}}$$
$$\text{(٢)} \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{\text{(س − ١) (س + ٣)}}{\text{س (س − ١)}}}$$
$$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{\text{س + ٣}}{\text{س}}} = \sqrt{\text{٤}} = \text{٢}$$
$$\text{(٣)} \underset{\text{س}\to\sqrt{\text{٢}}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - \sqrt{\text{٢}}) (\text{س} + \sqrt{\text{٢}})}{(\text{س} - \sqrt{\text{٢}}) (\text{س + ٢}\sqrt{\text{٢}})}$$
$$= \underset{\text{س}\to\sqrt{\text{٢}}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} + \sqrt{\text{٢}}}{\text{س + ٢}\sqrt{\text{٢}}} = \frac{\text{٢}\sqrt{\text{٢}}}{\text{٣}\sqrt{\text{٢}}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

(٤) بالضرب بسطًا ومقامًا فى (− س³)

$$\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٧ س}^{\text{٣}}\text{ − ٢ س}^{\text{٢}}\text{ − ٥}}{\text{٤ س}^{\text{٣}}\text{ − ٣ س − ١}}$$
$$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{(س − ١) (٧ س}^{\text{٢}}\text{ + ٥ س + ٥)}}{\text{(س − ١) (٤ س}^{\text{٢}}\text{ + ٤ س + ١)}}$$
$$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٧ س}^{\text{٢}}\text{ + ٥ س + ٥}}{\text{٤ س}^{\text{٢}}\text{ + ٤ س + ١}} = \frac{\text{١٧}}{\text{٩}}$$
$$\text{(٥)} \underset{\text{طاس}\to\text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\text{(طاس) (طاس − ٣) (طاس + ١)}}{\text{(طاس) (طاس − ٣) (طاس − ١)}}$$
$$= \underset{\text{طاس}\to\text{٣}}{\text{نهـا}} \frac{\text{طاس + ١}}{\text{طاس − ١}} = \text{٢}$$
$$\text{(٦)} \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{(حتاس − ١) (حتاس − ٤)}}{\text{− (حتاس + ١) (حتاس − ١)}}$$
$$= \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{حتاس − ٤}}{\text{− (حتاس + ١)}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$$
$$\text{(٧)} \underset{\text{(س − ٤)}\to\text{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س − ٨}}{\text{س}^{\text{٢}}\text{ − ٦٤}}$$
$$= \underset{\text{س}\to\text{٨}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س − ٨}}{\text{(س − ٨) (س + ٨)}}$$
$$= \underset{\text{س}\to\text{٨}}{\text{نهـا}} \frac{\text{١}}{\text{س + ٨}} = \frac{\text{١}}{\text{١٦}}$$
$$\text{(٨)} \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{٢}}\text{ + ٣ − ٤ − ٢ (س}^{\text{٢}}\text{ − س)}}{\text{(س}^{\text{٢}}\text{ − س)} \left(\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}\text{ + ٣}}\text{ − ٢}\right)}$$
$$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{− (س − ١)}^{\text{٢}}}{\text{س (س − ١)} \left(\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}\text{ + ٣}}\text{ − ٢}\right)}$$
$$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{− (س − ١)}}{\text{س} \left(\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}\text{ + ٣}}\text{ − ٢}\right)} \times \frac{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}\text{ + ٣}}\text{ + ٢}}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}\text{ + ٣}}\text{ + ٢}}$$
$$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{− (س − ١)} \left(\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}\text{ + ٣}}\text{ + ٢}\right)}{\text{س (س}^{\text{٢}}\text{ − ١)}}$$
$$= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \frac{- \left(\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}\text{ + ٣}}\text{ + ٢}\right)}{\text{س (س + ١)}} = \frac{\text{-٤}}{\text{٢}} = \text{-٢}$$

إجابات تمارين 14

أولاً: أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (د)	③ (د)	④ (أ)
⑤ (أ)	⑥ (د)	⑦ (أ)	⑧ (جـ)
⑨ (ب)	⑩ (ب)	⑪ (ب)	⑫ (جـ)
⑬ (د)	⑭ (جـ)	⑮ (جـ)	⑯ (جـ)
⑰ (د)	⑱ (د)	⑲ (جـ)	⑳ (د)
㉑ (ب)	㉒ (ب)	㉓ (ب)	㉔ (أ)
㉕ (ب)	㉖ (أ)	㉗ (ب)	㉘ (د)
㉙ (أ)	㉚ (أ)	㉛ (ب)	㉜ (ب)

ثانياً: الأسئلة المقالية

١

① $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣} - ٢^{٣}}{\text{س} - ٢} = ٣(٢)^{٢} = ١٢$

② $\underset{\text{س}\to -٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٤} - (-٥)^{٤}}{\text{س} - (-٥)} = \frac{٤}{١}(-٥)^{٤-١}$

$= -٥٠٠$

③ $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} - \text{أ}^{٥}}{\text{س} - \text{أ}} = ٥\,\text{أ}^{٤}$

④ $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٤} - (-٣)^{٤}}{\text{س}^{٥} - (-٣)^{٥}} = \frac{٤}{٥}(-٣)^{٤-٥} = \frac{-٤}{١٥}$

⑤ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٦} - (٢)^{٦}}{\text{س}^{٧} - (٢)^{٧}} = \frac{٦}{٧}(٢)^{٦-٧} = \frac{٣}{٧}$

⑥ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٢(\text{س}^{٦} - ٦٤)}{\text{س}^{٢} - ٤}$

$= ٢\,\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٦} - (٢)^{٦}}{\text{س}^{٢} - (٢)^{٢}}$

$= ٢ \times \frac{٦}{٢}(٢)^{٦-٢} = ٩٦$

⑦ $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٦} - ٦٤}{٣(\text{س} + ٢)}$

$= \frac{١}{٣}\,\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٦} - (-٢)^{٦}}{\text{س} - (-٢)}$

$= \frac{١}{٣} \times ٦ \times (-٢)^{٥} = -٦٤$

⑧ $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}(\text{س}^{٩} + ١)}{\text{س}(\text{س}^{٦} - ١)}$

$= \underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٩} - (-١)^{٩}}{\text{س}^{٦} - (-١)^{٦}} = \frac{٩}{٦}(-١)^{٣} = -\frac{٣}{٢}$

⑨ $-١ \times \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٩} - (١)^{٩}}{\text{س}^{٧} - (١)^{٧}}$

$= -١ \times \frac{٩}{٧}(١)^{٩-٧} = \frac{-٩}{٧}$

⑩ $\underset{٢\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{(٢\text{س})^{٥} - (-١)^{٥}}{(٢\text{س})^{٦} - (-١)^{٦}} = \frac{٥}{٦}(-١)^{-١}$

$= -\frac{٥}{٦}$

⑪ $\underset{٣\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{(٣\text{س})^{٥} - (-٢)^{٥}}{(٣\text{س})^{٣} - (-٢)^{٣}}$

$= \frac{٥}{٣}(-٢)^{٥-٣} = \frac{٢٠}{٣}$

⑫ $\underset{٢\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}(١٦\text{س}^{٤} - ٨١)}{\text{س}^{٢}(٢\text{س} - ٣)}$

$= \underset{\text{س}\to \frac{٣}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}} \times \underset{٢\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(٢\text{س})^{٤} - (٣)^{٤}}{٢\text{س} - ٣}$

$= \frac{٢}{٣} \times ٤(٣)^{٣} = ٧٢$

٢

① $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٧} - (٢)^{-٧}}{\text{س} - ٢} = -٧(٢)^{-٨} = \frac{-٧}{٢٥٦}$

② $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٤} - (-١)^{-٤}}{\text{س}^{-١٨} - (-١)^{-١٨}} = \frac{-٤}{-١٨}(-١)^{١٤} = \frac{٢}{٩}$

③ $\underset{\text{س}\to \sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٧} - (\sqrt{٢})^{٧}}{\text{س}^{٢} - (\sqrt{٢})^{٢}} = \frac{٧}{٢}(\sqrt{٢})^{٥}$

$= ١٤\sqrt{٢}$

④ $\underset{\text{س}\to -\sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٨} - (-\sqrt{٢})^{٨}}{\text{س}^{٥} - (-\sqrt{٢})^{٥}} = \frac{٨}{٥}(-\sqrt{٢})^{٣}$

$= \frac{-١٦\sqrt{٢}}{٥}$

⑤ $\underset{\sqrt{٢}\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt{٢}\text{س})^{٦} - (-٣)^{٦}}{\sqrt{٢}\text{س} - (-٣)} = ٦(-٣)^{٥}$

$= -١٤٥٨$

⑥ $\underset{\text{جاس}\to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٣}\text{س} - (\frac{١}{٢})^{٣}}{\text{جاس} - (\frac{١}{٢})} = ٣(\frac{١}{٢})^{٢} = \frac{٣}{٤}$

⑦ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٥} - (٢)^{-٥}}{\text{س}^{-٧} - (٢)^{-٧}} = \frac{-٥}{-٧}(٢)^{٢} = \frac{٢٠}{٧}$

⑧ $٨ \times \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٣} - (-\frac{١}{٨})}{\text{س}^{-٨} - \frac{١}{٢٥٦}}$

$= ٨ \times \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٣} - (-٢)^{-٣}}{\text{س}^{-٨} - (-٢)^{-٨}}$

$= ٨ \times \frac{-٣}{-٨}(-٢)^{٥} = -٩٦$

⑨ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٨} - (٢)^{-٨}}{\text{س} - ٢} = \frac{-٨}{١} \times (٢)^{-٨-١}$

$= \frac{-١}{٦٤}$

⑩ $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\frac{٧}{٢}} - ٤^{\frac{٧}{٢}}}{\text{س}^{\frac{٥}{٢}} - ٤^{\frac{٥}{٢}}} = \frac{٧}{٥} \times ٤ = \frac{٢٨}{٥}$

⑪ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\frac{١}{٧}} - ١^{\frac{١}{٧}}}{\text{س} - ١} = \frac{١}{٧}$

⑫ $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - (٤)^{\frac{٣}{٢}}}{\text{س}^{٢} - (٤)^{٢}} = \frac{٣}{٤}(٤)^{-\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٨}$

⑬ $\underset{\text{س}\to ١٦}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\frac{٧}{٤}} - ١٦^{\frac{٧}{٤}}}{\text{س} - ١٦} = \frac{\frac{٧}{٤}}{١} \times (١٦)^{\frac{٧}{٤} - ١} = ١٤$

⑭ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\frac{٦}{٥}} - (١)^{\frac{٦}{٥}}}{\text{س}^{٢} - (١)^{٢}} = \frac{٣}{٥}$

⑮ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\frac{١}{٢}}\left[\text{س}^{١٠} - ١\right]}{\text{س}^{\frac{٢}{٣}}\left[\text{س}^{٤} - ١\right]}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\, \text{س}^{-\frac{١}{٦}} \times \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{١٠} - (١)^{١٠}}{\text{س}^{٤} - (١)^{٤}}$

$= ١ \times \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢}$

⑯ $\frac{١}{٢}\,\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٤} - ٢٥٦}{\text{س} - ٤}$

$= \frac{١}{٢}\,\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٤} - ٤^{٤}}{\text{س} - ٤} = \frac{١}{٢} \times ٤(٤)^{٣} = ١٢٨$

⑰ $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{\text{س}^{٤}}(\text{س}^{٨} - ١)}{\frac{١}{\text{س}^{٣}}(\text{س}^{٦} - ١)}$

$= \underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}} \times \underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٨} - (-١)^{٨}}{\text{س}^{٦} - (-١)^{٦}}$

$= -١ \times \frac{٨}{٦}(-١)^{٢} = \frac{-٤}{٣}$

⑱ $\underset{٢\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{٥}{١٦}\left[١٦\text{س}^{٤} - ١\right]}{٢\text{س} - ١}$

$= \frac{٥}{١٦}\,\underset{٢\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{(٢\text{س})^{٤} - (١)^{٤}}{٢\text{س} - ١}$

$= \frac{٥}{١٦} \times ٤(١)^{٣} = \frac{٥}{٤}$

⑲ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{١٠} - (٢)^{١٠}}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س} - ١} \times \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{١٠} - (٢)^{١٠}}{\text{س} - ٢}$

$= ١ \times ١٠(٢)^{٩} = ٥١٢٠$

⑳ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{١٧} - (١)^{١٧}}{(٣\text{س} + ٥)(\text{س} - ١)}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{١}{٣\text{س} + ٥} \times \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{١٧} - (١)^{١٧}}{\text{س} - ١}$

$= \frac{١}{٨} \times ١٧(١)^{١٦} = \frac{١٧}{٨}$

٣

① $\underset{(١+\text{س})\to ١}{\text{نهـا}} \frac{(١ + \text{س})^{١٠} - (١)^{١٠}}{(١ + \text{س})^{٧} - (١)^{٧}}$

$= \frac{١٠}{٧}(١)^{٣} = \frac{١٠}{٧}$

② $\underset{(\text{س}-٥)\to ١}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ٥)^{٧} - ١^{٧}}{(\text{س} - ٥) - ١} = ٧(١)^{٦} = ٧$

③ $\underset{(\text{س}+٣)\to ١}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + ٣)^{٥} - (١)^{٥}}{(\text{س} + ٣) - (١)} = ٥(١)^{٤} = ٥$

④ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + ٢)^{٥} - ٢^{٥}}{\text{س}} = ٥(٢)^{٤} = ٨٠$

⑤ $\frac{١}{٦}\,\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(٣ + \text{هـ})^{٤} - ٣^{٤}}{\text{هـ}}$

$= \frac{١}{٦} \times ٤(٣)^{٣} = ١٨$

⑥ $4 \underset{هـ \to 0}{\text{نهـــا}} \frac{(1 + 4هـ)^8 - (1)^8}{4هـ}$

$= 4 \underset{(1+4هـ) \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{(1 + 4هـ)^8 - (1)^8}{(1 + 4هـ) - (1)}$

$= 4 \times 8 (1)^7 = 32$

⑦ $\frac{-2}{5} \underset{س \to 0}{\text{نهـــا}} \frac{(1 - 2س)^5 - 1^5}{-2س}$

$= \frac{-2}{5} \underset{(1-2س) \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{(1 - 2س)^5 - 1^5}{(1 - 2س) - 1}$

$= \frac{-2}{5} \times 5 (1)^4 = -2$

⑧ $3 \underset{هـ \to 0}{\text{نهـــا}} \frac{(س + 3هـ)^5 - س^5}{3هـ}$

$= 3 \underset{(س+3هـ) \to س}{\text{نهـــا}} \frac{(س + 3هـ)^5 - س^5}{(س + 3هـ) - س}$

$= 3 \times 5 س^4 = 15 س^4$

⑨ $\frac{-2}{51} \underset{هـ \to 0}{\text{نهـــا}} \frac{(س - 2هـ)^{17} - س^{17}}{-2هـ}$

$= \frac{-2}{51} \underset{(س-2هـ) \to س}{\text{نهـــا}} \frac{(س - 2هـ)^{17} - س^{17}}{(س - 2هـ) - س}$

$= \frac{-2}{51} \times 17 س^{16} = \frac{-2}{3} س^{16}$

⑩ $3 \underset{(3س+2) \to -1}{\text{نهـــا}} \frac{(3س + 2)^9 - (-1)^9}{(3س + 2) - (-1)}$

$= 3 \times 9 (-1)^8 = 27$

⑪ $\frac{3}{2} \underset{س \to 0}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt[3]{1 + 3س} - 1}{3س}$

$= \frac{3}{2} \underset{(1+3س) \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{(1 + 3س)^{\frac{1}{3}} - (1)^{\frac{1}{3}}}{(1 + 3س) - (1)}$

$= \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} (1)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{2}$

⑫ $\underset{س \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt[3]{26 + س} - 3}{26 + س - 27}$

$= \underset{(26+س) \to 27}{\text{نهـــا}} \frac{(26 + س)^{\frac{1}{3}} - (27)^{\frac{1}{3}}}{(26 + س) - (27)}$

$= \frac{1}{3} (27)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{27}$

⑬ $\underset{س \to 7}{\text{نهـــا}} \frac{(س + 25)^{\frac{1}{5}} - (32)^{\frac{1}{5}}}{(س + 25) - 32}$

$= \frac{\frac{1}{5}}{1} (32)^{\frac{1}{5} - 1} = \frac{1}{80}$

⑭ $\underset{(س-4) \to -2}{\text{نهـــا}} \frac{(س - 4)^5 - (-2)^5}{(س - 4) - (-2)}$

$= (\frac{5}{1}) \times (-2)^{5-1} = 80$

⑮ $\underset{س \to -2}{\text{نهـــا}} \frac{(س + 3)^5 - 1}{(س - 2)(س + 2)}$

$= \underset{س \to -2}{\text{نهـــا}} \frac{1}{س - 2}$

$\times \underset{(س+3) \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{(س + 3)^5 - 1^5}{(س + 3) - 1}$

$= -\frac{1}{4} \times 5 \times (1)^4 = -\frac{5}{4}$

⑯ $\underset{س \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{س^{19} - 1 + س^8 - 1}{س - 1}$

$= \underset{س \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{س^{19} - (1)^{19}}{س - 1}$

$+ \underset{س \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{س^8 - (1)^8}{س - 1}$

$= 19 (1)^{18} + 8 (1)^7 = 27$

⑰ $\underset{س \to -1}{\text{نهـــا}} \frac{س^7 + 1 + س^9 + 1}{س + 1}$

$= \underset{س \to -1}{\text{نهـــا}} \frac{س^7 - (-1)^7}{س - (-1)}$

$+ \underset{س \to -1}{\text{نهـــا}} \frac{س^9 - (-1)^9}{س - (-1)}$

$= 7 (-1)^6 + 9 (-1)^8 = 16$

⑱ $\underset{س \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{س} - 1 + \sqrt[3]{س} - 1}{س - 1}$

$= \underset{س \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{(س)^{\frac{1}{2}} - (1)^{\frac{1}{2}}}{س - 1}$

$+ \underset{س \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{(س)^{\frac{1}{3}} - (1)^{\frac{1}{3}}}{س - 1}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

⑲ $\underset{س \to 2}{\text{نهـــا}} \frac{س^5 - 32 + س^2 - 4}{س - 2}$

$= \underset{س \to 2}{\text{نهـــا}} \frac{س^5 - 2^5}{س - 2} + \underset{س \to 2}{\text{نهـــا}} \frac{س^2 - 2^2}{س - 2}$

$= 5 (2)^4 + 2 (2)^1 = 84$

⑳ $\underset{س \to 5}{\text{نهـــا}} \frac{(س - 3)^5 - 2^5}{س (س - 5)}$

$= \underset{س \to 5}{\text{نهـــا}} \frac{1}{س} \times \underset{(س-3) \to 2}{\text{نهـــا}} \frac{(س - 3)^5 - 2^5}{(س - 3) - 2}$

$= \frac{1}{5} \times \frac{5}{1} (2)^{5-1} = 16$

㉑ $\underset{س \to 0}{\text{نهـــا}} \frac{1}{3 (س - 2)}$

$\times 2 \underset{(2س-3) \to -3}{\text{نهـــا}} \frac{(2س - 3)^5 - (-3)^5}{(2س - 3) - (-3)}$

$= -\frac{1}{6} \times 2 \times 5 (-3)^4 = -135$

4 ∵ $\underset{س \to أ}{\text{نهـــا}} \frac{س^{12} - أ^{12}}{س^{10} - أ^{10}} = 30$

∴ $\frac{12}{10} (أ)^2 = 30$ ∴ $أ^2 = 25$

∴ $أ = \pm 5$

5 $\underset{س \to -1}{\text{نهـــا}} \frac{س^{15} - (-1)^{15}}{س - (-1)} = 15 (-1)^{14} = 15$

، ∵ $\underset{س \to ك}{\text{نهـــا}} \frac{س^5 - ك^5}{س^3 - ك^3} = \frac{5}{3} (ك)^2$

∴ $\frac{5}{3} ك^2 = 15$ ∴ $ك = \pm 3$

6 ∵ النهاية موجودة ∴ $2^ن = 64$

∴ $ن = 6$ ∴ النهاية $= \frac{6}{1} \times 2^{6-1}$

∴ $ل = 192$

7 $\underset{س \to 2}{\text{نهـــا}} \frac{د(س) - د(2)}{س - 2}$

$= \underset{س \to 2}{\text{نهـــا}} \frac{\frac{1}{س^4} - \frac{1}{2^4}}{س - 2}$

$= \underset{س \to 2}{\text{نهـــا}} \frac{س^{-4} - 2^{-4}}{س - 2} = -4 (2)^{-5} = \frac{-1}{8}$

8

① $\underset{س \to 2}{\text{نهـــا}} \frac{س^4 - 2^4}{س^7 - 2^7} + \underset{س \to 2}{\text{نهـــا}} \frac{س^3 - 2^3}{س^5 - 2^5}$

$= \frac{4}{7} (2)^{-3} + \frac{3}{5} (2)^{-2} = \frac{31}{140}$

② $\underset{س \to 3}{\text{نهـــا}} \left(\frac{س - 2}{س^2 - 4} \times \frac{س^5 - 243}{س - 3} \right)$

$= \underset{س \to 3}{\text{نهـــا}} \frac{1}{س + 2} \times \underset{س \to 3}{\text{نهـــا}} \frac{س^5 - 3^5}{س - 3}$

$= \frac{1}{5} \times 5 \times 3^4 = 81$

③ $\left(\underset{س \to -3}{\text{نهـــا}} \frac{س^4 - (-3)^4}{س^3 - (-3)^3} \right)^3 = \left[\frac{4}{3} (-3) \right]^3$

$= -64$

④ $\underset{س \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{(س^{25} - 1)^2}{(س - 1)^2} = \underset{س \to 1}{\text{نهـــا}} \left(\frac{س^{25} - 1}{س - 1} \right)^2$

$= \left(\underset{س \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{س^{25} - (1)^{25}}{س - (1)} \right)^2$

$= \left(25 (1)^{24} \right)^2 = 625$

⑤ $\underset{س \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{(س^6 - 1)^2}{(س - 1)^2} = \left[\underset{س \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{س^6 - (1)^6}{س - (1)} \right]^2$

$= \left[6 (1)^5 \right]^2 = 36$

⑥ $\underset{س \to 2}{\text{نهـــا}} \left[\frac{(س^4 - 16)^3}{(س^3 - 8)^3} \times \frac{س^4 - 16}{س^8 - 256} \right]$

$= \underset{س \to 2}{\text{نهـــا}} \left(\frac{س^4 - 16}{س^3 - 8} \right)^3 \times \underset{س \to 2}{\text{نهـــا}} \frac{س^4 - 16}{س^8 - 256}$

$= \left(\underset{س \to 2}{\text{نهـــا}} \frac{س^4 - 2^4}{س^3 - 2^3} \right)^3 \times \underset{س \to 2}{\text{نهـــا}} \frac{س^4 - 2^4}{س^8 - 2^8}$

$= \left[\frac{4}{3} (2) \right]^3 \times \frac{4}{8} (2)^{-4} = \frac{16}{27}$

⑦ $\underset{س \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{س^{\frac{1}{3}} - (1)^{\frac{1}{3}}}{س - 1}$

$\times \underset{س \to 1}{\text{نهـــا}} \frac{س^{\frac{2}{5}} - (1)^{\frac{2}{5}}}{س - 1} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

⑧ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(١ - س)^{١٥}\left[\left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)^{١٥} - ١\right]}{(١ - س)^{٩}\left[\left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)^{٩} - ١\right]}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} (١ - س)^{٦}$

$\times \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)^{١٥} - ١}{\left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)^{٩} - ١}$

$= ١ \times \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)^{١٥} - ١}{\left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)^{٩} - ١}$

$\because س \to ٠$

$\therefore \dfrac{١ + س}{١ - س} \to ١$

$\therefore \underset{\left(\frac{١ + س}{١ - س}\right) \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)^{١٥} - (١)^{١٥}}{\left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)^{٩} - (١)^{٩}}$

$= \frac{١٥}{٩} (١)^{٦} = \frac{٥}{٣}$

⑨ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{١٢} - ١}{س^{٢} (س - ١) + (س - ١)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{١٢} - ١}{(س - ١)(س^{٢} + ١)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{س^{٢} + ١} \times \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{١٢} - (١)^{١٢}}{س - ١}$

$= \frac{١}{٢} \times ١٢ (١)^{١١} = ٦$

ثالثاً **مسائل تقيس مهارات التفكير**

① $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{\frac{١}{٢}} (س - ١)}{س^{\frac{١}{٢}} (س^{٥} - ١)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س - ١}{س^{٥} - ١^{٥}} = \frac{١}{٥} (١)^{-٤} = \frac{١}{٥}$

② $\frac{٥}{٧} \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(١ + ٥ س)^{١٠} - ١}{٥ س}$

$\times \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٧ س}{(١ + ٧ س)^{٨} - ١}$

$= \frac{٥}{٧} \underset{(١ + ٥ س) \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(١ + ٥ س)^{١٠} - (١)^{١٠}}{(١ + ٥ س) - (١)}$

$\times \underset{(١ + ٧ س) \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(١ + ٧ س) - ١}{(١ + ٧ س)^{٨} - (١)^{٨}}$

$= \frac{٥}{٧} \times ١٠ (١)^{٩} \times \frac{١}{٨} (١)^{-٧} = \frac{٢٥}{٢٨}$

③ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{س + ٨} - ٢}{س}$

$\times \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{س}{(س + ٣)^{٥} - ٢٤٣}$

$= \underset{(س + ٨) \to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ٨)^{\frac{١}{٣}} - (٨)^{\frac{١}{٣}}}{(س + ٨) - (٨)}$

$\times \underset{(س + ٣) \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ٣) - (٣)}{(س + ٣)^{٥} - (٣)^{٥}}$

$= \frac{١}{٣} (٨)^{-\frac{٢}{٣}} \times \frac{١}{٥} (٣)^{-٤} = \frac{١}{٤٨٦٠}$

④ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{٢ س - ٣} - ١}{(٢ س - ٤)}$

$\times \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ س - ٤}{\sqrt[٥]{٣ س - ٥} - ١}$

$= \underset{(٢ س - ٣) \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢ س - ٣)^{\frac{١}{٣}} - (١)^{\frac{١}{٣}}}{(٢ س - ٣) - ١}$

$\times \frac{٢}{٣} \underset{(٣ س - ٥) \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(٣ س - ٥) - ١}{(٣ س - ٥)^{\frac{١}{٥}} - (١)^{\frac{١}{٥}}}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times ٥ (١)^{\frac{٤}{٥}} = \frac{١٠}{٩}$

⑤ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(س^{٢} - ٣)^{٥} - ١}{(س - ٢)(س + ٢)} \times (س + ٢)$

$= \underset{(س^{٢} - ٣) \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(س^{٢} - ٣)^{٥} - (١)^{٥}}{(س^{٢} - ٣) - ١}$

$\times \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (س + ٢) = ٥ (١)^{٤} \times ٤ = ٢٠$

⑥ $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{(٤ س + ٥)^{٦} - ١ + ٧ س + ٧}{س + ١}$

$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{(٤ س + ٥)^{٦} - ١}{س + ١}$

$+ \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{٧ س + ٧}{س + ١}$

$= ٤ \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{(٤ س + ٥)^{٦} - ١}{٤ س + ٤}$

$+ \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} ٧ \left(\dfrac{س + ١}{س + ١}\right)$

$= ٤ \underset{(٤ س + ٥) \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(٤ س + ٥)^{٦} - (١)^{٦}}{(٤ س + ٥) - (١)} + ٧$

$= ٤ \times ٦ (١)^{٥} + ٧ = ٣١$

⑦ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(٥ س - ٤)^{١٠} - ١}{س - ١}$

$+ \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٤ س - ٤}{س - ١}$

$= ٥ \underset{(٥ س - ٤) \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(٥ س - ٤)^{١٠} - (١)^{١٠}}{(٥ س - ٤) - ١}$

$+ \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٤ (س - ١)}{(س - ١)}$

$= ٥ \times ١٠ (١)^{٩} + ٤ = ٥٤$

⑧ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٥]{س + ١} - ١ - \sqrt[٤]{س + ١} + ١}{س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٥]{س + ١} - ١}{س}$

$- \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٤]{س + ١} - ١}{س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ١)^{\frac{١}{٥}} - (١)^{\frac{١}{٥}}}{س}$

$- \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ١)^{\frac{١}{٤}} - (١)^{\frac{١}{٤}}}{س}$

$= \frac{١}{٥} (١)^{-\frac{٤}{٥}} - \frac{١}{٤} (١)^{-\frac{٣}{٤}} = \frac{-١}{٢٠}$

⑨ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ١)^{\frac{١}{٥}} - ١ - (س + ١)^{٧} + ١}{س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ١)^{\frac{١}{٥}} - (١)^{\frac{١}{٥}}}{س}$

$- \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ١)^{٧} - (١)^{٧}}{س}$

$= \frac{١}{٥} - ٧ = -٦\frac{٤}{٥}$

⑩ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٥ \sqrt{س - ١} - ٥}{س - ٢}$

$+ \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{س - ١} - ١}{س - ٢}$

$= ٥ \underset{(س - ١) \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ١)^{\frac{١}{٢}} - (١)^{\frac{١}{٢}}}{(س - ١) - (١)}$

$+ \underset{(س - ١) \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ١)^{\frac{١}{٣}} - (١)^{\frac{١}{٣}}}{(س - ١) - (١)}$

$= \frac{٥}{٢} + \frac{١}{٣} = \frac{١٧}{٦}$

⑪ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٧} - (١)^{٧}}{س - ١} + \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٩} - (١)^{٩}}{س - ١}$

$+ \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{١١} - (١)^{١١}}{س - ١} = ٧ + ٩ + ١١ = ٢٧$

⑫ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٤} (س - ١)^{٦} - س^{٤} + س^{٤} - ١٦}{س - ٢}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} س^{٤} \left[\dfrac{(س - ١)^{٦} - ١}{س - ٢}\right]$

$+ \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٤} - ١٦}{س - ٢}$

$= \left(\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} س^{٤}\right) \left(\underset{(س - ١) \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ١)^{٦} - (١)^{٦}}{(س - ١) - ١}\right)$

$+ \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٤} - ٢^{٤}}{س - ٢}$

$= ١٦ \times ٦ (١)^{٥} + ٤ (٢)^{٣} = ١٢٨$

(١٣) $$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^٥ \sqrt[٣]{\text{س}+٦} - ٢\,\text{س}^٥ + ٢\,\text{س}^٥ - ٦٤}{\text{س} - ٢}$$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^٥ \left[\sqrt[٣]{\text{س}+٦} - ٢\right]}{\text{س} - ٢}$$

$$+ \ \text{نهـا}_{\text{س}\to ٢} \frac{٢\,(\text{س}^٥ - ٣٢)}{\text{س} - ٢}$$

$$= (\text{نهـا}_{\text{س}\to ٢}\ \text{س}^٥)\left(\text{نهـا}_{(\text{س}+٦)\to ٨} \frac{(\text{س}+٦)^{\frac{١}{٣}} - (٨)^{\frac{١}{٣}}}{(\text{س}+٦) - (٨)}\right)$$

$$+ \ ٢\ \text{نهـا}_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^٥ - ٢^٥}{\text{س} - ٢}$$

$$٢^٥ \times \frac{١}{٣} \times (٨)^{\frac{١}{٣} - ١} + ٢ \times ٥ \times ٢^{٥ - ١}$$

$$= ١٦٢ \tfrac{٢}{٣}$$

إجابات تمارين 15

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د)	(٢) (ب)	(٣) (د)	(٤) (د)
(٥) (أ)	(٦) (جـ)	(٧) (د)	(٨) (جـ)
(٩) (أ)	(١٠) (جـ)	(١١) (جـ)	(١٢) (ب)
(١٣) (د)	(١٤) (أ)	(١٥) (د)	(١٦) (أ)
(١٧) (جـ)	(١٨) (د)	(١٩) (ب)	(٢٠) (ب)
(٢١) (ب)	(٢٢) (جـ)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (جـ)
(٢٥) (ب)	(٢٦) (أ)	(٢٧) (أ)	(٢٨) (د)
(٢٩) (ب)	(٣٠) (ب)	(٣١) (جـ)	(٣٢) (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) بقسمة كل من البسط والمقام على س

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{٢ - \frac{٥}{\text{س}}}{٣ + \frac{٨}{\text{س}}} = \frac{٢}{٣}$$

(٢) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٢$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{٢}{\text{س}} - \frac{٥}{\text{س}^٢}}{٣ + \frac{٨}{\text{س}^٢}} = \text{صفر}$$

(٣) بقسمة كل من البسط والمقام على س

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{٢\,\text{س} - \frac{٥}{\text{س}}}{٣ + \frac{٨}{\text{س}}} = \infty$$

(٤) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٢$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{٥}{\text{س}^٢} - \frac{٦}{\text{س}} - ٣}{٢ + \frac{١}{\text{س}} + \frac{٤}{\text{س}^٢}} = \frac{-٣}{٢}$$

(٥) عند س ⟵ ∞ فإن |س| = س

$$\therefore \text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^٣ - ٢}{\text{س}^٣ + ١}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{١ - \frac{٢}{\text{س}^٣}}{١ + \frac{١}{\text{س}^٣}} = ١$$

(٦) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{٧}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^٣}}{٤ - \frac{٨}{\text{س}^٢} + \frac{١}{\text{س}^٣}} = \frac{\text{صفر}}{٤} = \text{صفر}$$

(٧) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٤$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{٥\,\text{س}^٣ + \frac{٢}{\text{س}^٣} - \frac{١}{\text{س}^٤}}{٦ + \frac{١٣}{\text{س}^٤}} = \frac{\infty}{٦} = \infty$$

(٨) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^{١٤}$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{٥}{\text{س}^{١٤}} - \frac{٧}{\text{س}^٦} + ٣}{\frac{٧}{\text{س}^{١٤}} - ٦ + \frac{٢}{\text{س}^٨}} = \frac{-٣}{٦} = \frac{-١}{٢}$$

(٩) $$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \left(\frac{٧}{\text{س}^٢} + \frac{٢}{\text{س}} - ٣\right) = -٣$$

(١٠) $$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{٥}{\text{س}^٣} + \frac{٤}{\text{س}^٢} - ٣}{\frac{٧}{\text{س}^٣} - \frac{٢}{\text{س}^٢} + ٨} = \frac{-٣}{٨}$$

(١١) عند س ⟵ ∞ فإن : $|٢\,\text{س}|^٣ \longrightarrow (٢\,\text{س})^٣$

$$\therefore \text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{٥\,\text{س}^٣ - ٤\,\text{س}^٢ + ٢}{٧ - \text{س} + ٨\,\text{س}^٣}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{٥ - \frac{٤}{\text{س}} + \frac{٢}{\text{س}^٣}}{\frac{٧}{\text{س}^٣} - \frac{١}{\text{س}^٢} + ٨} = \frac{٥}{٨}$$

(١٢) $$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} (\text{س}^٣ + ٥\,\text{س}^٢ + ١)$$

$$= \infty + \infty + ١ = \infty$$

(١٣) $$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \left[\sqrt{\text{س}^٢ + ٥\,\text{س} + ٧} + \text{س}\right]$$

$$= \sqrt{\infty + \infty + ٧} + \infty = \infty$$

(١٤) $$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} (٥ + \text{س} - \text{س}^٢) = ٥ + \infty - \infty$$

= كمية غير معينة

$$\therefore \text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \text{س}^٢ \left(\frac{٥}{\text{س}^٢} + \frac{١}{\text{س}} - ١\right)$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \text{س}^٢ \times \text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \left(\frac{٥}{\text{س}^٢} + \frac{١}{\text{س}} - ١\right)$$

$$= \infty \times -١ = -\infty$$

٢

(١) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٢$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{٣ - \frac{٤}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}^٢}}{\left(١ + \frac{٢}{\text{س}}\right)^٢} = \frac{٣}{١} = ٣$$

(٢) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٢$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{٦ - \frac{٥}{\text{س}}}{\left(\frac{٣}{\text{س}} - ١\right)\left(\frac{٢}{\text{س}} + ١\right)} = \frac{٦}{-١} = -٦$$

(٣) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{٨ - \frac{١}{\text{س}^٢} + \frac{١}{\text{س}^٣}}{\left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)\left(٢ - \frac{٣}{\text{س}^٢}\right)} = \frac{٨}{٢} = ٤$$

(٤) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{١ - \frac{٤}{\text{س}^٢} + \frac{٥}{\text{س}^٣}}{\left(٢ - \frac{١}{\text{س}}\right)^٣} = \frac{١}{٨}$$

(٥) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{\left(٢ + \frac{٣}{\text{س}}\right)\left(٤ - \frac{٥}{\text{س}^٢}\right)}{\left(٣ - \frac{٨}{\text{س}^٢}\right)\left(٥ - \frac{٣}{\text{س}}\right)} = \frac{٨}{١٥}$$

(٦) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{\left(٢ + \frac{٣}{\text{س}}\right)\left(٥ - \frac{١}{\text{س}}\right)\left(١ - \frac{٢}{\text{س}}\right)}{١ \times \left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)\left(٣ - \frac{١}{\text{س}}\right)} = \frac{١٠}{٣}$$

(٧) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س} = \sqrt{\text{س}^٢}$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{\left(\frac{٧}{\sqrt{\text{س}}} + ١\right)\left(\frac{٣}{\sqrt{\text{س}}} + ١\right)}{٤ - \frac{٣}{\text{س}}} = \frac{١}{٤}$$

(٨) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{\left(٦ - \frac{٥}{\text{س}}\right)\left(٣ - \frac{٤}{\text{س}}\right)^٢}{\left(٣ - \frac{٢}{\text{س}}\right)^٣} = \frac{٦ \times ٩}{٢٧} = ٢$$

(٩) بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٥$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to\infty} \frac{\left(١ + \frac{٢}{\text{س}}\right)^٣ \left(\frac{٣}{\text{س}^٢} - ٢\right)}{٣\left(١ + \frac{٧}{\text{س}^٢}\right)}$$

$$= \frac{١^٣ \times -٢}{٣ \times ١} = \frac{-٢}{٣}$$

⑩ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^6 = (س^2)^3$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\left(3 - \frac{1}{س^2}\right)^3}{18 + \frac{1}{س^4} + \frac{1}{س^6}} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$$

٣

① بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^2}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{س}}{\sqrt{9 + \frac{25}{س^2}}} = \frac{2}{3}$$

② بقسمة كل من البسط والمقام على س

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{3}{س^2}}}{1} = \sqrt{4} = 2$$

③ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^2}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{س}}{\sqrt{4 + \frac{3}{س} - \frac{4}{س^2}}} = \frac{2}{2} = 1$$

④ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt[3]{س^3}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{2 - \frac{3}{س}}{\sqrt[3]{125 + \frac{5}{س^3}}} = \frac{2}{5}$$

⑤ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt[3]{س^3}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8 + \frac{5}{س^2} - \frac{2}{س^3}}}{3 + \frac{2}{س}} = \frac{2}{3}$$

⑥ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^3 = \sqrt{س^6}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{4}{س^3} - 3}{\sqrt{1 + \frac{9}{س^6}}} = -3$$

⑦ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^2} = \sqrt[3]{س^3}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{3}{س} + \frac{8}{س^2}}}{\sqrt[3]{\frac{2}{س} + 125 + \frac{2}{س^3}}} = \frac{3}{5}$$

⑧ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{س^2} = \sqrt[4]{س^4}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{س^2}}}{\sqrt[4]{1 + \frac{2}{س^4}}} = \frac{1}{1} = 1$$

⑨ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt[3]{س^3} = \sqrt[5]{س^5}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8 + \frac{1}{س^3}}}{\sqrt[5]{32 + \frac{1}{س^4}}} = \frac{2}{2} = 1$$

⑩ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt[3]{س^3} = \sqrt[4]{س^4}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8 + \frac{1}{س^3}}}{\sqrt[4]{1 - \frac{3}{س^4}}} = 2$$

⑪ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{س}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{3 - \frac{2}{س}} - \sqrt{12 + \frac{7}{س}}}{\sqrt{27 - \frac{5}{س}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$

⑫ بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^2}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{7}{س^2}} + 3}{2 + \frac{9}{س}} = \frac{5}{2}$$

⑬ بقسمة كل من البسط والمقام على

$$\sqrt[4]{س^6} = \sqrt[6]{س^9} = \sqrt{س^3}$$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[4]{1 + \frac{8}{س^6}} - \sqrt[6]{\frac{1}{س^7} + \frac{4}{س^9}}}{\sqrt{1 + \frac{9}{س^3}}} = 1$$

⑭ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^2 = س\sqrt{س^2}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{3 - \frac{1}{س} - \frac{7}{س^2}}{\left(1 + \frac{1}{س}\right)\sqrt{25 + \frac{1}{س^2}}} = \frac{3}{5}$$

٤

① $$\lim_{س \to \infty} 7 + \lim_{س \to \infty} \frac{2س^2}{(س + 3)^2}$$

$$= 7 + \lim_{س \to \infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{3}{س}\right)^2} = 7 + 2 = 9$$

② $$\lim_{س \to \infty} \frac{س}{2س + 1} + \lim_{س \to \infty} \frac{3س^2}{(س - 3)^2}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{س}} + \lim_{س \to \infty} \frac{3}{\left(1 - \frac{3}{س}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

③ $$\lim_{س \to \infty} \frac{2}{3} - \lim_{س \to \infty} \frac{3س}{2س + 7}$$

$$= \frac{2}{3} - \lim_{س \to \infty} \frac{3}{2 + \frac{7}{س}} = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{6}$$

④ $$\lim_{س \to \infty} \frac{2س^3 - 2س^3 - س}{2س^2 + 1}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{-س}{2س^2 + 1}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{-\frac{1}{س}}{2 + \frac{1}{س^2}} = \frac{\text{صفر}}{2} = \text{صفر}$$

⑤ $$\lim_{س \to \infty} \frac{(س^2 - 1)(س - 2) - (س^2 + 1)(س + 2)}{س^2 - 4}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{س^3 - 2س^2 - س + 2 - س^3 - 2س^2 - س - 2}{س^2 - 4}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{-4س^2 - 2س}{س^2 - 4}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{-4 - \frac{2}{س}}{1 - \frac{4}{س^2}} = -4$$

⑥ $$\lim_{س \to \infty} \frac{\left(\sqrt{س^2 - 2} - \sqrt{س^2 + س}\right)\left(\sqrt{س^2 - 2} + \sqrt{س^2 + س}\right)}{\sqrt{س^2 - 2} + \sqrt{س^2 + س}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{س^2 - 2 - س^2 - س}{\sqrt{س^2 - 2} + \sqrt{س^2 + س}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{-2 - س}{\sqrt{س^2 - 2} + \sqrt{س^2 + س}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{-2}{س} - 1}{\sqrt{1 - \frac{2}{س^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{س}}} = -\frac{1}{2}$$

⑦ $$\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{4س^2 + 1} - \sqrt{س^2 + 1}}{س}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{س^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{س^2}}}{1} = \frac{2 - 1}{1} = 1$$

⑧ $$\lim_{س \to \infty} \frac{\left(\sqrt{س^2 + 5س} - س\right)\left(\sqrt{س^2 + 5س} + س\right)}{\sqrt{س^2 + 5س} + س}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{س^2 + 5س - س^2}{\sqrt{س^2 + 5س} + س}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{5س}{\sqrt{س^2 + 5س} + س}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{س}} + 1} = \frac{5}{1 + 1} = \frac{5}{2}$$

⑨ $\lim_{س\to\infty} \frac{س\left(\sqrt{4س^2+1}-2س\right)\left(\sqrt{4س^2+1}+2س\right)}{\left(\sqrt{4س^2+1}+2س\right)}$

$= \lim_{س\to\infty} \frac{س\left(4س^2+1-4س^2\right)}{\left(\sqrt{4س^2+1}+2س\right)}$

$= \lim_{س\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{س^2}}+2} = \frac{1}{4}$

⑩ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{17} = (س^5)(س^2)^6$

$= (س^7)(س^2)^5$

$\lim_{س\to\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{س}\right)^5\left(1+\frac{3}{س^2}\right)^6}{\left(1+\frac{1}{س}\right)^7\left(1-\frac{5}{س^2}\right)^5}$

$= \frac{(2)^5(1)^6}{(1)^7(1)^5} = 32$

حل آخر :

$\lim_{س\to\infty} \frac{\left[س\left(2-\frac{1}{س}\right)\right]^5\left[س^2\left(1+\frac{3}{س^2}\right)\right]^6}{\left[س\left(1+\frac{1}{س}\right)\right]^7\left[س^2\left(1-\frac{5}{س^2}\right)\right]^5}$

$= \lim_{س\to\infty} \frac{س^5\left(2-\frac{1}{س}\right)^5\times س^{12}\left(1+\frac{3}{س^2}\right)^6}{س^7\left(1+\frac{1}{س}\right)^7\times س^{10}\left(1-\frac{5}{س^2}\right)^5}$

$= \lim_{س\to\infty} \frac{\cancel{س^{17}}\left(2-\frac{1}{س}\right)^5\left(1+\frac{3}{س^2}\right)^6}{\cancel{س^{17}}\left(1+\frac{1}{س}\right)^7\left(1-\frac{5}{س^2}\right)^5}$

$= \frac{(2)^5\times(1)^6}{(1)^7\times(1)^5} = 32$

⑪ بضرب كل من البسط والمقام فى مرافق البسط والمقام

∴ $\lim_{س\to\infty} \frac{\left(\sqrt{س+1}-\sqrt{س-1}\right)\left(\sqrt{س+1}+\sqrt{س-1}\right)\left(\sqrt{4س+1}+\sqrt{4س-1}\right)}{\left(\sqrt{4س+1}-\sqrt{4س-1}\right)\left(\sqrt{4س+1}+\sqrt{4س-1}\right)\left(\sqrt{س+1}+\sqrt{س-1}\right)}$

$= \lim_{س\to\infty} \frac{(س+1-س+1)\left(\sqrt{4س+1}+\sqrt{4س-1}\right)}{(4س+1-4س+1)\left(\sqrt{س+1}+\sqrt{س-1}\right)}$

$= \lim_{س\to\infty} \frac{\sqrt{4س+1}+\sqrt{4س-1}}{\sqrt{س+1}+\sqrt{س-1}}$

وبقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{س}$

∴ $\lim_{س\to\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{س}}+\sqrt{4-\frac{1}{س}}}{\sqrt{1+\frac{1}{س}}+\sqrt{1-\frac{1}{س}}} = \frac{2+2}{1+1} = 2$

٥

① بقسمة كل من البسط والمقام على $س^2$

$\lim_{س\to\infty} \left(\frac{3-\frac{5}{س}+\frac{1}{س^2}}{4-\frac{7}{س^2}}\right)^{\frac{1}{س}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{صفر} = 1$

② $\lim_{س\to\infty} \frac{س+1}{\sqrt{س^2-1}} + \lim_{س\to\infty} أ^{\frac{1}{س}}$

$= \lim_{س\to\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{س}}{\sqrt{1-\frac{1}{س^2}}}\right) + أ^{صفر} = 1+1 = 2$

③ $\lim_{س\to\infty} \frac{2-\frac{3}{س}}{\sqrt[3]{27-\frac{15}{س^2}+\frac{2}{س^3}}} + \lim_{س\to\infty} 8^{\frac{1}{س}}$

$= \frac{2}{3} + 1 = 1\frac{2}{3}$

④ $\lim_{س\to\infty} \frac{5}{\frac{1}{س^2}-1} - \lim_{س\to\infty} (13)^{\frac{1}{س}}$

$= -5 - 1 = -6$

٦

∵ النهاية موجودة وتساوى ٣

∴ درجة البسط = درجة المقام

∴ $ن = 2$

∴ $\lim_{س\to\infty} \frac{4أس^2-4س+5}{3-9س+8س^2} = 3$

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^2$

∴ $\lim_{س\to\infty} \frac{4أ-\frac{4}{س}+\frac{5}{س^2}}{\frac{3}{س^2}-\frac{9}{س}+8} = 3$

∴ $\frac{4أ}{8} = 3$ ∴ $أ = 6$

٧

$\lim_{س\to\infty} \frac{\sqrt[3]{أ+\frac{3}{س^2}}}{\sqrt{4+\frac{7}{س^2}}} = -1$ ∴ $\frac{\sqrt[3]{أ}}{2} = -1$

∴ $\sqrt[3]{أ} = -2$ ∴ $أ = -8$

٨

$\lim_{س\to\infty} \frac{\left(\sqrt{أس^2+3بس+5}-2س\right)}{1} \times \frac{\left(\sqrt{أس^2+3بس+5}+2س\right)}{\left(\sqrt{أس^2+3بس+5}+2س\right)}$

$= \lim_{س\to\infty} \frac{أس^2+3بس+5-4س^2}{\sqrt{أس^2+3بس+5}+2س} = 3$

∵ اكبر درجة فى المقام هى ١ ∴ درجة البسط = ١

∴ $أس^2-4س^2 = 0$ ∴ $أ = 4$

∴ $\lim_{س\to\infty} \frac{3بس+5}{\sqrt{أس^2+3بس+5}+2س} = 3$

(بقسمة كل من البسط والمقام على س)

∴ $\lim_{س\to\infty} \frac{3ب+\frac{5}{س}}{\left(\sqrt{أ+\frac{3ب}{س}+\frac{5}{س^2}}+2\right)} = 3$

∴ $\frac{3ب}{\sqrt{أ}+2} = 3$

∴ $3ب = 3\times(2+2)$ ∴ $ب = 4$

٩

∵ $\lim_{س\to\infty} \frac{2-أس^2}{3-بس+س^2} = 5$

∴ $\lim_{س\to\infty} \frac{\frac{2}{س^2}-أ}{\frac{3}{س^2}-\frac{ب}{س}+1} = 5$

∴ $أ = -5$

، ∵ $\lim_{س\to-2} \frac{2+5س^2}{3-بس+س^2} = 2$

∴ $\frac{2+5(-2)^2}{3+2ب+(-2)^2} = 2$

∴ $7+2ب = 11$ ∴ $ب = 2$

١٠

$\lim_{س\to\infty} \frac{س^2+1-(أس+ب)(س+1)}{س+1} = 2$

∴ $\lim_{س\to\infty} \frac{س^2-أس^2-(أ+ب)س+1-ب}{س+1} = 2$

، ∵ النهاية موجودة وتساوى ٢

∴ درجة البسط = درجة المقام

∴ $س^2-أس^2 = 0$ ∴ $أ = 1$

، $أ+ب = -2$ ∴ $ب = -3$

١١

∵ النهاية تساوى ∞

∴ درجة البسط أكبر من درجة المقام

∴ أ + ١ = صفر ومنها أ = -١

، ٧ - ب = صفر ومنها ب = ٧

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

① بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{-2}$

$\lim_{س\to\infty} \frac{1+\frac{1}{س^2}}{\left(2+\frac{3}{س}\right)^{-2}} = \frac{1}{2^{-2}} = 4$

② $\underset{\frac{١}{ن}\to \text{صفر}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{أ}+\frac{١}{ن})^{٤}-\text{أ}^{٤}}{\frac{١}{ن}}$

$= \underset{\text{أ}+\frac{١}{ن}\to \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{أ}+\frac{١}{ن})^{٤}-\text{أ}^{٤}}{(\text{أ}+\frac{١}{ن})-\text{أ}} = ٤\,\text{أ}^{٣}$

③ $\underset{\frac{١}{س}\to \text{صفر}}{\text{نهـا}} \frac{(٣+\frac{١}{س})^{٥}-٢٤٣}{\frac{١}{س}}$

$= \underset{(٣+\frac{١}{س})\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(٣+\frac{١}{س})^{٥}-٣^{٥}}{(٣+\frac{١}{س})-٣} = ٥\,(٣)^{٤} = ٤٠٥$

④ بالضرب في المرافق

$\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt{س^{٢}+٢}-س)(\sqrt{٢س^{٢}+١})(\sqrt{س^{٢}+٢}+س)}{\sqrt{س^{٢}+٢}+س}$

$= \underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{(س^{٢}+٢-س^{٢})(\sqrt{٢س^{٢}+١})}{\sqrt{س^{٢}+٢}+س}$

$= \underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٢(\sqrt{٢س^{٢}+١})}{\sqrt{س^{٢}+٢}+س}$

$= \underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٢(\sqrt{٢+\frac{١}{س^{٢}}})}{\sqrt{١+\frac{٢}{س^{٢}}}+١} = \sqrt{٢}$

⑤ $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢}{س}-\frac{١}{س^{٢}}\right)\sqrt{٤س^{٢}+١}$

$= \underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\sqrt{٤س^{٢}+١}}{س} - \underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٤س^{٢}+١}}{س^{٢}}$

$= \underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\sqrt{٤+\frac{١}{س^{٢}}}}{١} - \underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\frac{٤}{س^{٢}}+\frac{١}{س^{٤}}}}{١}$

$= ٢ \times ٢ - \text{صفر} = ٤$

⑥ بقسمة كل من البسط والمقام على $س\sqrt{س} = \sqrt{س^{٣}}$

$\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٥ + \frac{١٦}{\sqrt{س}} - ٣\sqrt{\frac{١}{س}-\frac{١}{س^{٣}}}}{\frac{١}{\sqrt{س}} + \sqrt{٤+\frac{١}{س^{٣}}}} = \frac{٥}{٢}$

إجابات تمارين 16

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (أ)	② (أ)	③ (أ)	④ (ب)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (د)	⑧ (أ)
⑨ (أ)	⑩ (ب)	⑪ (جـ)	⑫ (جـ)
⑬ (جـ)	⑭ (ب)	⑮ (ب)	⑯ (جـ)
⑰ (جـ)	⑱ (أ)	⑲ (د)	⑳ (د)
㉑ (ب)	㉒ (د)	㉓ (أ)	㉔ (ب)
㉕ (جـ)	㉖ (ب)	㉗ (أ)	㉘ (أ)
㉙ (ب)	㉚ (ب)	㉛ (ب)	㉜ (أ)
㉝ (جـ)	㉞ (جـ)	㉟ (أ)	㊱ (د)
㊲ (جـ)	㊳ (ب)	㊴ (أ)	㊵ (أ)
㊶ (أ)	㊷ (ب)	㊸ (أ)	㊹ (د)
㊺ (جـ)	㊻ (ب)		

ثانيا الأسئلة المقالية

١

① $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}\,٢س}{س}}{\frac{\text{طا}\,٥س}{س}} = \frac{٢}{٥}$

② $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}\,\frac{س}{٥}}{س}}{\frac{\text{طا}\,\frac{٢س}{٣}}{س}} = \frac{\frac{١}{٥}}{\frac{٢}{٣}} = \frac{٣}{١٠}$

③ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,٣س}{٥س} - \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,٢س}{٥س}$

$= \frac{٣}{٥} - \frac{٢}{٥} = \frac{١}{٥}$

④ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}\,س}{س}+\frac{\text{طا}\,س}{س}}{\frac{\text{جا}\,س}{س}} = \frac{١+١}{١} = ٢$

⑤ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}\,٣س}{\frac{\text{طا}\,٢س}{س}} = \frac{١}{٢}$

⑥ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٥س}{\text{جا}\,س} - \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا}\,٢س}{س}$

$= ٥ - ٢ = ٣$

⑦ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣+\frac{\text{جا}\,س}{س}}{٢+\frac{\text{طا}\,٣س}{س}} = \frac{٣+١}{٢+٣} = \frac{٤}{٥}$

⑧ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\left(\frac{\text{جا}\,س}{س}\right)+٤\left(\frac{\text{طا}\,٢س}{س}\right)}{٢+\frac{\text{جا}\,٣س}{س}} = \frac{٢+٨}{٢+٣} = ٢$

⑨ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}\,س}{س}-\frac{٣\,\text{طا}\,س}{س}}{٥\,\text{جتا}\,س} = \frac{١-٣}{٥} = \frac{-٢}{٥}$

⑩ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣}{٥\left(\frac{\text{طا}\,س}{س}\right)-٢\left(\frac{\text{جا}\,٢س}{س}\right)} = \frac{٣}{٥-٤} = ٣$

⑪ بقسمة البسط والمقام على س

$\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١+\text{جتا}\,س}{\frac{\text{جا}\,س}{س}\times\text{جتا}\,س} = \frac{١+١}{١\times١} = ٢$

⑫ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{طا}\,٣س}{س}-\frac{\text{جا}\,٤س}{س}}{س+٢} = \frac{٣-٤}{٢} = \frac{-١}{٢}$

⑬ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س+\frac{\text{جا}\,٣س}{س}}{٥\,\text{جتا}\,٢س} = \frac{٠+٣}{٥\times١} = \frac{٣}{٥}$

⑭ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{طا}\,٢س}{س}+٢\,\text{جتا}\,س}{\frac{\text{جا}\,٣س}{س}} = \frac{٢+٢}{٣} = \frac{٤}{٣}$

⑮ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\,\text{جا}\,\frac{١}{٧}س}{س} = \frac{٢}{٧}$

⑯ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{جا}\,\frac{١}{٥}س}{س}+\frac{\text{طا}\,\frac{١}{٥}س}{س}\right] = \frac{٢}{٥}$

⑰ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{٣\,\text{جا}\,٤س}{٥س}+٤\,\text{جا}\,٤س\right) = \frac{١٢}{٥}$

⑱ $\underset{(س-٣)\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,٣(س-٣)}{٢(س-٣)} = \frac{٣}{٢}$

⑲ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}\,٢٤س}{س}\times\text{جتا}\,٦س}{\frac{\text{طا}\,٦س}{س}\times\text{جتا}\,٢٤س} = \frac{٢٤\times١}{٦\times١} = ٤$

⑳ النهاية $= \frac{\frac{١}{٢}\,\text{جتا}\,(-٢\times\frac{١}{٢}+١)}{(\frac{١}{٢})^{٢}+(\frac{١}{٢})} = \frac{٢}{٣}$

㉑ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{جا}^{٢}\,س}{س^{٢}}\times س\right]$

$= \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}\,س}{س^{٢}} \times \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}}\, س$

$= ١ \times ٠ = \text{صفر}$

٢

① $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{٥}\times\frac{\text{جا}^{٢}\,٣س}{س^{٢}} = \frac{١}{٥}\times ٣^{٢} = \frac{٩}{٥}$

② $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}^{٢}\,٣س}{س^{٢}}}{\frac{\text{طا}^{٢}\,٢س}{س^{٢}}} = \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\left(\frac{\text{جا}\,٣س}{س}\right)^{٢}}{\left(\frac{\text{طا}\,٢س}{س}\right)^{٢}} = \frac{٩}{٤}$

③ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}^{٢}\,\frac{س}{٢}}{س^{٢}}}{\frac{\text{طا}\,٢س}{س}} = \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\left(\frac{\text{جا}\,\frac{س}{٢}}{س}\right)^{٢}}{\frac{\text{طا}\,٢س}{س}} = \frac{١}{٨}$

④ $\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا}\,٢س}{س}}{\left(\frac{\text{جا}\,س}{س}\right)\left(\frac{\text{طا}\,٣س}{س}\right)} = \frac{٢}{٣}$

⑤ $\frac{١}{٤}\ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{ظا ٢س}}{\text{س}}\right)^{٣} = \frac{٨}{٤} = ٢$

⑥ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{ظا ٢س}}{\text{س}}}{\left(\frac{\text{حا ٢س}}{\text{س}}\right)^{٤}} = \frac{١}{٨}$

⑦ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{حا ٤س}}{\text{س}} \times \left(\frac{\text{ظا ٥س}}{\text{س}}\right)^{٢}}{\frac{\text{حا س}}{\text{س}}} = \frac{٤ \times ٢٥}{١} = ١٠٠$

⑧ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{ظا ٢س}}{\text{س}}}{١ + \left(\frac{\text{حا ٣س}}{\text{س}}\right)^{٢}} = \frac{٢}{١ + ٩} = \frac{١}{٥}$

⑨ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ + \left(\frac{\text{ظا ٢س}}{\text{س}}\right)^{٢}}{٢ + \left(\frac{\text{حا ٣س}}{\text{س}}\right)^{٢}} = \frac{١ + ٤}{٢ + ٩} = \frac{٥}{١١}$

⑩ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{ظا س}}{\text{س}}}{٤ - \left(\frac{\text{حا ٣س}}{\text{س}}\right)^{٢}} = \frac{١}{٤ - ٩} = \frac{-١}{٥}$

⑪ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{٢س} + \frac{\text{حا ٥س}}{\text{س}}}{١ - \frac{\text{ظا}^{٢}\text{ ٣س}}{\text{س}^{٢}}} = \frac{٠ + ٥}{١ - ٩} = \frac{-٥}{٨}$

⑫ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢ + \frac{\text{٥ ظا س}}{\text{س}} + ٣\frac{\text{حا س}}{\text{س}}}{\frac{\text{حا ٢س}}{\text{س}} \times \text{حتا ٢س}} = \frac{٢ + ٥ + ٣}{٢ \times ١} = ٥$

⑬ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{حا ٢س}}{\text{س}} + \frac{\text{حا}^{٢}\text{ ٢س}}{\text{س}^{٢}}}{\frac{\text{ظا}^{٢}\text{ ٣س}}{\text{س}^{٢}} + ١} = \frac{٢ + ٤}{٩ + ١}$

$= \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

⑭ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{ظا ٣س}^{٢}}{\text{س}^{٢}} + \frac{\text{حا}^{٢}\text{ ٥س}}{\text{س}^{٢}}\right) = ٣ + ٢٥ = ٢٨$

⑮ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{حا ٥س}^{٣}}{\text{٢س}^{٣}} + \frac{\text{حا}^{٣}\text{ ٥س}}{\text{٢س}^{٣}}\right) = \frac{٥}{٢} + \frac{١٢٥}{٢} = ٦٥$

⑯ $\left(\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{٢س} + \frac{\text{حا ٣س}}{\text{س}}}{\text{٢س} + \frac{\text{ظا ٦س}}{\text{س}}}\right)^{٤} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} = \frac{١}{١٦}$

⑰ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{ظا س}}{\text{س}}\right)^{٢} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{ظا ٣س}}{\text{س}}\right)^{٢}$

$+ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{ظا ٥س}}{\text{س}}\right)^{٢} = ١ + ٩ + ٢٥ = ٣٥$

⑱ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا س}}{\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{حا ٢س}}{\text{س}}\right)^{٢}$

$\times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{حا ٤س}}{\text{س}}\right)^{٣} = ١ \times ٤ \times ٦٤ = ٢٥٦$

⑲ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{ظا ٦س}}{\text{س}} - \frac{\text{حا (-٣س)}}{\text{س}}}{\text{حتا ٥س} + \text{حتا ٢س}} = \frac{٦ - (-٣)}{١ + ١} = \frac{٩}{٢}$

⑳ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا س}\left(\sqrt{\text{س} + ٢} + \sqrt{٢}\right)}{\left(\sqrt{\text{س} + ٢} - \sqrt{٢}\right)\left(\sqrt{\text{س} + ٢} + \sqrt{٢}\right)}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا س}\left(\sqrt{\text{س} + ٢} + \sqrt{٢}\right)}{\text{س} + ٢ - ٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا س}}{\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\sqrt{\text{س} + ٢} + \sqrt{٢}\right)$

$= ١ \times ٢\sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢}$

㉑ $\underset{(\text{س} - ٣)\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا (س - ٣)}}{(\text{س} - ٣)}$

$\times \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س}^{٢} + \text{٣س} + ٩} = ١ \times \frac{١}{٢٧} = \frac{١}{٢٧}$

㉒ $\underset{(\text{س} - ١)\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا (س - ١)}}{(\text{س} - ١)} \times \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{١}{(\text{س} + ٢)}$

$= ١ \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$

٣

① $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٣\left(١ - \text{حتا س}\right)}{\text{س}} = ٣ \times ٠ = ٠$

② $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{-\left(١ - \text{حتا س}\right)}{\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{حا س}}\right) = ٠ \times ١ = ٠$

③ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{١ - \text{حتا س}}{\text{س}} + \frac{\text{حا س}}{\text{س}}}{\frac{١ - \text{حتا س}}{\text{س}} - \frac{\text{حا س}}{\text{س}}} = \frac{٠ + ١}{٠ - ١} = -١$

④ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{١ - \text{حتا ٣س}}{\text{س}} + \frac{١ - \text{حتا ٤س}}{\text{س}}\right)$

$= \underset{\text{٣س}\to ٠}{\text{نها}} ٣\left(\frac{١ - \text{حتا ٣س}}{\text{٣س}}\right)$

$+ \underset{\text{٤س}\to ٠}{\text{نها}} ٤\left(\frac{١ - \text{حتا ٤س}}{\text{٤س}}\right) = ٠ + ٠ = ٠$

⑤ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{حا س}}{\text{س}} \times \frac{١ - \text{حتا س}}{\text{س}}\right) = ١ \times ٠ = ٠$

⑥ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}\left(١ - \text{حتا س}\right)}{\text{حا}^{٢}\text{ ٣س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س}^{٢}}{\text{حا}^{٢}\text{ ٣س}} \times \frac{١ - \text{حتا س}}{\text{س}}\right)$

$= \frac{١}{٩} \times ٠ =$ صفر

⑦ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا}^{٢}\text{ ٣س}}{\text{٤س}^{٢}} = \frac{٩}{٤}$

⑧ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{٤س}^{٢}}{\text{حا}^{٢}\frac{١}{٢}\text{س}} = \frac{٤}{\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}} = ١٦$

⑨ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٣\left(١ - \text{حتا}^{٢}\text{ ٤س}\right)}{\text{٨س}^{٢}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٣\text{ حا}^{٢}\text{ ٤س}}{\text{٨س}^{٢}}$

$= \frac{٣}{٨} \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{حا ٤س}}{\text{س}}\right)^{٢} = \frac{٣}{٨} \times ١٦ = ٦$

⑩ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}^{٢}\text{ س}}{\text{س}^{٢}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{ظا س}}{\text{س}}\right)^{٢} = ١$

⑪ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{١ - \text{حتا س}}{\text{س}^{٢}} \times \frac{١ + \text{حتا س}}{١ + \text{حتا س}}\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{١ - \text{حتا}^{٢}\text{ س}}{\text{س}^{٢}} \times \frac{١}{١ + \text{حتا س}}\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا}^{٢}\text{ س}}{\text{س}^{٢}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{١ + \text{حتا س}}$

$= ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

⑫ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{٤\left(١ - \text{حتا س}\right)}{\text{س}^{٢}} \times \frac{\text{س}^{٢}}{\text{حا}^{٢}\text{ ٣س}}\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{٤ \times \left(١ - \text{حتا س}\right)}{\text{س}^{٢}} \times \frac{١ + \text{حتا س}}{١ + \text{حتا س}} \times \frac{\text{س}^{٢}}{\text{حا}^{٢}\text{ ٣س}}\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{٤\text{ حا}^{٢}\text{ س}}{\text{س}^{٢}} \times \frac{١}{١ + \text{حتا س}} \times \frac{\text{س}^{٢}}{\text{حا}^{٢}\text{ ٣س}}\right)$

$= ٤ \times ١ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٩} = \frac{٢}{٩}$

⑬ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{١ - \text{حتا ٢س}}{\text{س}^{٢}} \times \frac{١ + \text{حتا ٢س}}{١ + \text{حتا ٢س}} \times \frac{\text{س}}{\text{ظا ٢س}}\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{١ - \text{حتا}^{٢}\text{ ٢س}}{\text{س}^{٢}} \times \frac{١}{١ + \text{حتا ٢س}} \times \frac{\text{س}}{\text{ظا ٢س}}\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{حا}^{٢}\text{ ٢س}}{\text{س}^{٢}} \times \frac{١}{١ + \text{حتا ٢س}} \times \frac{\text{س}}{\text{ظا ٢س}}\right)$

$= ٤ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = ١$

⑭ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{حتا ٣س}}{-\text{حا}^{٢}\text{ ٢س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{١ - \text{حتا ٣س}}{-\text{حا}^{٢}\text{ ٢س}} \times \frac{١ + \text{حتا ٣س}}{١ + \text{حتا ٣س}}\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{حا}^{٢}\text{ ٣س}}{-\text{حا}^{٢}\text{ ٢س}} \times \frac{١}{١ + \text{حتا ٣س}}\right)$

$= \frac{-٩}{٤} \times \frac{١}{٢} = \frac{-٩}{٨}$

٤

① $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حا ٥س}}{\text{ظا ٣س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{حا ٥س}}{\text{س}}}{\frac{\text{ظا ٣س}}{\text{س}}} = \frac{٥}{٣}$

② $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \text{س}\left(\frac{١}{\text{حا ٢س}} - \frac{١}{\text{ظا ٣س}}\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س}}{\text{حا ٢س}} - \frac{\text{س}}{\text{ظا ٣س}}\right)$

$= \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$

③ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{٣س ظا ٢س}}{\text{حا}^{٢}\text{ ٣س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٣\left(\frac{\text{ظا ٢س}}{\text{س}}\right)}{\left(\frac{\text{حا ٣س}}{\text{س}}\right)^{٢}}$

$= \frac{٣ \times ٢}{٩} = \frac{٢}{٣}$

④ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٦\,\text{س}^{٢}}{\text{جا ٢س} \times \text{ظا س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left[٦ \times \left(\dfrac{\text{س}}{\text{جا ٢س}}\right) \times \left(\dfrac{\text{س}}{\text{ظا س}}\right)\right]$

$= ٦ \times \dfrac{١}{٢} \times ١ = ٣$

⑤ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س}}{\text{جا ٤س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{\text{جا س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا ٤س}}{\text{س}}} = \dfrac{١}{٤}$

⑥ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}}{\text{جا س}} = ١$

⑦ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س جا ٣س}}{\text{ظا}^{٢}\,\text{٢س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{\text{جا ٣س}}{\text{س}}}{\left(\frac{\text{ظا ٢س}}{\text{س}}\right)^{٢}} = \dfrac{٣}{٤}$

⑧ $\underset{(\text{س} - \frac{\pi}{٤})\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا ٢}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)}{٨\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)} = \dfrac{٢}{٨} = \dfrac{١}{٤}$

⑨ $\underset{(\text{س} - \frac{\pi}{٤})\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{جا ٢}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)}{\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)}}{\dfrac{\text{ظا ٤}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)}{\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)}} = \dfrac{٢}{٤} = \dfrac{١}{٢}$

⑩ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س}}{\text{ظا ٢س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{\text{جا س}}{\text{س}}}{\frac{\text{ظا ٢س}}{\text{س}}} = \dfrac{١}{٢}$

⑪ $\underset{(\pi - \text{س})\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\pi - \text{س})}{-(\pi - \text{س})} = -١$

⑫ $\underset{(\text{س} + \pi)\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}(\text{س} + \pi)}{\text{س} + \pi} = ١$

⑬ $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س} - \pi}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}$

$= \underset{\frac{\pi}{٢} - \text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{-٢\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)} = -٢$

⑭ $\underset{(\frac{\pi}{٢} - \text{س})\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}{٢\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)} = \dfrac{١}{٢}$

⑮ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\pi - \pi\text{س})}{\text{س} - ١}$

$= \underset{(\text{س} - ١)\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\,\pi(١ - \text{س})}{١ - \text{س}} = \pi$

⑯ $\underset{(\text{س} + ١)\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} + ١}{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} + \frac{\pi}{٢}\text{س}\right)}$

$= \underset{(\text{س} + ١)\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ١)}{\text{جا}\left[\frac{\pi}{٢}(\text{س} + ١)\right]} = \dfrac{٢}{\pi}$

⑰ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} (١ - \text{س})\ \text{ظتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢}\text{س}\right)$

$= \underset{(\text{س} - ١)\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(١ - \text{س})}{\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٢}(١ - \text{س})\right)} = \dfrac{٢}{\pi}$

5

① $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$

② $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س}}{\text{س}} = \dfrac{١}{\frac{\pi}{٢}} = \dfrac{٢}{\pi}$

③ $\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا س}}{\text{س}} = \dfrac{\text{صفر}}{\pi} = \text{صفر}$

6

① $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٥)} = \underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{س} + ٥}$

$\times \underset{(\text{س} - ٥)\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س} - ٥)}{\text{س} - ٥} = \dfrac{١}{١٠} \times ١ = \dfrac{١}{١٠}$

② $\underset{(\text{س} - ٥)\to ٠}{\text{نهـا}} \left[\dfrac{\text{جا}(\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ٥)}\right]^{٢} = (١)^{٢} = ١$

③ $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \left[(\text{س} - ٥) \times \dfrac{\text{جا}(\text{س} - ٥)^{٢}}{(\text{س} - ٥)^{٢}}\right]$

$= \underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} (\text{س} - ٥) \times \underset{(\text{س} - ٥)^{٢}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س} - ٥)^{٢}}{(\text{س} - ٥)^{٢}}$

$= \text{صفر} \times ١ = \text{صفر}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1

① (د) ② (جـ) ③ (د) ④ (جـ) ⑤ (ب)

إرشادات لحل رقم 1

① يمكننا باستخدام تجربة قيم أ المعطاة استنتاج أن النهاية = ١ عندما أ = ٣

② $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{س قا}\left(\frac{\pi}{٢} + \text{س}\right) = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} (-\text{س قتا س})$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{س}}{\text{جا س}} = -١$

③ $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{ظا س}}{\text{جتا س} - \text{جا س}}$ «بالضرب × جتا س بسطًا ومقامًا»

$= \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{جتا س} - \text{جا س})}{\text{جتا س}\,(\text{جتا س} - \text{جا س})}$

$= \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{جتا س}} = \sqrt{٢}$

④ $\underset{\text{س}\to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س}^{٢} - ٥)}{\text{ظا}(\pi\text{س}^{٢})}$

$= \underset{\text{س}\to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س}^{٢} - ٥)}{-\text{ظا}(-\pi\text{س}^{٢})}$

$= \underset{\text{س}\to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س}^{٢} - ٥)}{-\text{ظا}(٥\pi - \pi\text{س}^{٢})}$

$= \underset{\text{س}\to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س}^{٢} - ٥)}{\text{ظا}\left(\pi(\text{س}^{٢} - ٥)\right)} = \dfrac{١}{\pi}$

⑤ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\therefore \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{\text{جا س}}{\text{س}} + \frac{\text{جا ٢س}}{\text{س}} + \frac{\text{جا ٣س}}{\text{س}} + \dots + \frac{\text{جا ١٠س}}{\text{س}}}{\frac{\text{ظا س}}{\text{س}} + \frac{\text{ظا ٢س}}{\text{س}} + \frac{\text{ظا ٣س}}{\text{س}} + \dots + \frac{\text{ظا ١٠س}}{\text{س}}}$

$= ١$

2

① بالقسمة بسطًا ومقامًا على $\text{ظا}^{٢}\,\text{س}$

$\underset{\text{ظتا س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٣ - ٤\,\text{ظتا س} + ٧\,\text{ظتا}^{٢}\,\text{س}}{٥\,\text{ظتا}^{٢}\,\text{س} + ٢} = \dfrac{٣}{٢}$

② $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\left[(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)\right]}{\text{س} + ١}$

$= \underset{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\left[(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)\right]}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)}$

$\times \underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} (\text{س} - ٢) = ١ \times (-٣) = -٣$

③ $\because \text{س} \to \infty \quad \therefore \dfrac{١}{\text{س}} \to ٠$

$\therefore \underset{\frac{١}{\text{س}}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}\frac{٤}{\text{س}} + \text{جا}\frac{٣}{\text{س}}}{\frac{١}{\text{س}}}$

$= \underset{\frac{١}{\text{س}}\to ٠}{\text{نهـا}} \left[\dfrac{\text{ظا}\frac{٤}{\text{س}}}{\frac{١}{\text{س}}} + \dfrac{\text{جا}\frac{٣}{\text{س}}}{\frac{١}{\text{س}}}\right] = ٤ + ٣ = ٧$

④ $\underset{\text{جا س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{٥} \times \left[\dfrac{\text{جا}(\text{جا س})}{(\text{جا س})}\right] = \dfrac{١}{٥}$

⑤ $\underset{١ - \text{جتا س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(١ - \text{جتا س})}{(١ - \text{جتا س})} = ١$

⑥ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{ظا}(\text{ظا ٥س})}{\text{ظا ٥س}} \times \dfrac{\text{ظا ٥س}}{٤\text{س}}\right)$

$= \underset{\text{ظا ٥س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}(\text{ظا ٥س})}{\text{ظا ٥س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا ٥س}}{٤\text{س}}$

$= ١ \times \dfrac{٥}{٤} = \dfrac{٥}{٤}$

⑦ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٢\,\text{ظا س}}{\text{س}} \times \dfrac{١}{١ + \text{ظا}^{٢}\,\text{س}}\right) = ٢ \times \dfrac{١}{١ + ٠} = ٢$

⑧ $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{ظا}(\text{جتا س})}{\text{جتا س}} \times \dfrac{\text{جتا س}}{٢\text{س} - \pi}\right)$

$= \underset{\text{جتا س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}(\text{جتا س})}{\text{جتا س}} \times \underset{\frac{\pi}{٢} - \text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}{-٢\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}$

$= ١ \times \dfrac{-١}{٢} = \dfrac{-١}{٢}$

⑨ $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{(١ - \text{جا}س)(١ + \text{جا}س)}{(٢س - \pi)(١ + \text{جا}س)}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}^2 س}{-٢\left(\frac{\pi}{2} - س\right)} \times \frac{١}{١ + \text{جا}س}$

$= \lim_{(\frac{\pi}{2} - س) \to ٠} \frac{\text{جا}^2\left(\frac{\pi}{2} - س\right)}{-٢\left(\frac{\pi}{2} - س\right)^2} \times \frac{\frac{\pi}{2} - س}{١ + \text{جا}س}$

$= \frac{١}{-٢} \times \text{صفر} = \text{صفر}$

⑩ $\lim_{(\frac{\pi}{2} - س) \to ٠} \frac{\frac{\pi}{2} - س}{٢\,\text{ظا}\left(\frac{\pi}{2} - س\right)} = \frac{١}{٢}$

⑪ $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2} - س\right)}{-\text{جا}\left(\frac{٣\pi}{2} - ٣س\right)}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2} - س\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - س\right)} \times \frac{\left(\frac{\pi}{2} - س\right)}{-\text{جا}\,٣\left(\frac{\pi}{2} - س\right)}$

$= ١ \times \frac{١}{-٣} = \frac{-١}{٣}$

إجابات تمارين 17

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① أولًا: (ب) ثانيًا: (أ) ثالثًا: (د)

② (جـ) ③ (جـ) ④ (ب) ⑤ (ب)

⑥ (جـ) ⑦ (جـ) ⑧ (ب) ⑨ (أ)

⑩ (جـ) ⑪ (ب) ⑫ (جـ) ⑬ (ب)

⑭ (ب) ⑮ (د) ⑯ (أ) ⑰ (د)

⑱ (ب) ⑲ (أ) ⑳ (أ) ㉑ (جـ)

㉒ (جـ) ㉓ (د) ㉔ (د) ㉕ (جـ)

㉖ (جـ) ㉗ (ب)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

$\lim_{س \to ٣^-} د(س) = (٣)^2 + ١ = ١٠$

$\lim_{س \to ٣^+} د(س) = ٣(٣) + ١ = ١٠$

$\because د(٣^-) = د(٣^+) = ١٠$

$\therefore \lim_{س \to ٣} د(س) = ١٠$

٢

$د(٣^-) = \lim_{س \to ٣^-} د(س) = ٢ \times ٣ - ٧ = -١$

$د(٣^+) = \lim_{س \to ٣^+} \frac{(س - ٣)(س - ٤)}{(س - ٣)} = -١$

$\because د(٣^-) = د(٣^+) = -١ \quad \therefore \lim_{س \to ٣} د(س) = -١$

٣

$د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} د(س) = ٢$

$د(٠^+) = \lim_{س \to ٠^+} د(س) = ١$

$\because د(٠^-) \neq د(٠^+)$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س)$ غير موجودة.

٤

$د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} د(س) = ١$

$د(٠^+) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{٥س + \text{ظا}\,٢س}{٦س + \text{جا}س}$

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{٥ + \frac{\text{ظا}\,٢س}{س}}{٦ + \frac{\text{جا}س}{س}} = \frac{٥ + ٢}{٦ + ١} = ١$

$\because د(٠^+) = د(٠^-) = ١ \quad \therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ١$

٥

① $\lim_{س \to ٠^-} د(س) = ٠ - ٢ = -٢$

$\lim_{س \to ٠^+} د(س) = ٠^2 = ٠$

$\because د(٠^-) \neq د(٠^+)$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س)$ غير موجودة.

② $د(١^-) = د(١^+) = ١^2 = ١$ (لها نفس التعريف)

$\therefore \lim_{س \to ١} د(س) = ١$

③ $د(٢^-) = \lim_{س \to ٢^-} س^2 = ٤$

$د(٢^+) = \lim_{س \to ٢^+} ٢س = ٤$

$\because د(٢^-) = د(٢^+) = ٤ \quad \therefore \lim_{س \to ٢} د(س) = ٤$

٦

$د(٣^-) = د(٣^+) = \text{صفر} \quad \therefore \lim_{س \to ٣} د(س) = \text{صفر}$

٧

$د(٠^+) = \lim_{س \to ٠^+} \left(\frac{س}{\sqrt{س + ١} - ١} \times \frac{\sqrt{س + ١} + ١}{\sqrt{س + ١} + ١}\right)$

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{س\left(\sqrt{س + ١} + ١\right)}{س + ١ - ١}$

$= \lim_{س \to ٠^+} \left(\sqrt{س + ١} + ١\right) = ٢$

$د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{٢س}{\text{جا}س} = ٢$

$\because د(٠^+) = د(٠^-) \quad \therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ٢$

٨

$د(٤^+) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{(س - ٣)^6 - ١}{س - ٤}$

$= \lim_{(س - ٣) \to ١^+} \frac{(س - ٣)^6 - ١^6}{(س - ٣) - ١} = ٦$

$د(٤^-) = \lim_{س \to ٤^-} (س + ٢) = ٦$

$\because د(٤^+) = د(٤^-) \quad \therefore \lim_{س \to ٤} د(س) = ٦$

٩

$\because \lim_{س \to ٢} د(س) = ٧$

$\therefore د(٢^-) = د(٢^+) = ٧$

$\because د(٢^-) = ٤ + ٣م = ٧ \quad \therefore م = ١$

$\because د(٢^+) = ١٠ + ك = ٧ \quad \therefore ك = -٣$

١٠

$\because د(٠^-) = د(٠^+) = ٢ \quad \therefore د(٠^-) = أ = ٢$

١١

$\because \lim_{س \to أ} |٣س + ٢| = ١٤$

$\therefore |٣أ + ٢| = ١٤$

$\therefore ٣أ + ٢ = ١٤ \quad \therefore أ = ٤$

$\text{أ}،\ ٣أ + ٢ = -١٤ \quad \therefore أ = \frac{-١٦}{٣}$

١٢

① $د\left(\frac{-\pi}{٣}^+\right) = \lim_{س \to (\frac{-\pi}{٣})^+} \frac{٣س}{\text{ظا}س} = \frac{-\pi}{-\sqrt{٣}} = \frac{\pi}{\sqrt{٣}}$

، $د\left(\frac{-\pi}{٣}^-\right)$ غير موجودة

$\therefore \lim_{س \to \frac{-\pi}{٣}} د(س)$ غير موجودة.

② $د\left(\frac{\pi}{٣}^-\right) = ٣\,\text{جتا}\,\frac{\pi}{٣} = \frac{٣}{٢}$

، $د\left(\frac{\pi}{٣}^+\right)$ غير موجودة.

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} د(س)$ غير موجودة.

③ $د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{٣س}{\text{ظا}س} = ٣$

، $د(٠^+) = ٣$

$\because د(٠^-) = د(٠^+) = ٣ \quad \therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ٣$

١٣

∵ د(س) = س^{٢} + $\frac{\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩}}{س - ٣}$ = س^{٢} + $\frac{|س - ٣|}{س - ٣}$

∴ د(س) = { س^{٢} + ١ ، س > ٣ ؛ س^{٢} − ١ ، س < ٣ }

د(٣$^{+}$) = نهـا$_{س \to ٣^{+}}$ (س^{٢} + ١) = ١٠

د(٣$^{-}$) = نهـا$_{س \to ٣^{-}}$ (س^{٢} − ١) = ٨

، ∵ د(٣$^{+}$) ≠ د(٣$^{-}$) ∴ نهـا$_{س \to ٣}$ د(س) غير موجودة.

١٤

د(س) = $\frac{س^{٢} + ٢|س|}{س}$

د(س) = { $\frac{س^{٢} + ٢س}{س}$ ، س > ٠ ؛ $\frac{س^{٢} - ٢س}{س}$ ، س < ٠ }

= { $\frac{س(س + ٢)}{س}$ ، س > ٠ ؛ $\frac{س(س - ٢)}{س}$ ، س < ٠ }

= { س + ٢ ، س > ٠ ؛ س − ٢ ، س < ٠ }

د(٠$^{-}$) = ٠ − ٢ = −٢

د(٠$^{+}$) = ٠ + ٢ = ٢

∵ د(٠$^{-}$) ≠ د(٠$^{+}$) ∴ نهـا$_{س \to ٠}$ د(س) غير موجودة.

١٥

د(س) = { −س^{٢} + ٢ ، س < ٠ ؛ ٢ ، س > ٠ }

د(٠$^{-}$) = نهـا$_{س \to ٠^{-}}$ (−س^{٢} + ٢) = ٢

د(٠$^{+}$) = ٢

∵ د(٠$^{-}$) = د(٠$^{+}$) ∴ نهـا$_{س \to ٠}$ د(س) = ٢

١٦

د(س) = { $\frac{(س - ١)^{٢}}{-(س - ١)}$ ، س < ١ ؛ ٦س − ٣م ، س > ١ }

= { −(س − ١) ، س < ١ ؛ ٦س − ٣م ، س > ١ }

∵ نهـا$_{س \to ١}$ د(س) لها وجود عند س = ١

∴ د(١$^{-}$) = د(١$^{+}$)

∴ −(١ − ١) = ٦(١) − ٣م

∴ م = ٢

١٧

(د + ر)(س) = { س^{٢} − ٣س + ٣ ، س ≥ ١ ؛ ٢س^{٢} − ٥س + ٤ ، س < ١ }

(د + ر)(١$^{+}$) = نهـا$_{س \to ١^{+}}$ (س^{٢} − ٣س + ٣) = ١

(د + ر)(١$^{-}$) = نهـا$_{س \to ١^{-}}$ (٢س^{٢} − ٥س + ٤) = ١

∵ (د + ر)(١$^{+}$) = (د + ر)(١$^{-}$)

∴ نهـا$_{س \to ١}$ [د(س) + ر(س)] = ١

١٨

∵ الدالة لها نهاية عند س = ٠

∴ د(٠$^{+}$) = د(٠$^{-}$)

∴ نهـا$_{س \to ٠^{+}}$ $\frac{أس}{\sqrt{س + ٤} - ٢}$ = نهـا$_{س \to ٠^{-}}$ $\frac{جا٣س}{أس}$

∴ نهـا$_{س \to ٠^{+}}$ ($\frac{أس}{\sqrt{س + ٤} - ٢}$ × $\frac{\sqrt{س + ٤} + ٢}{\sqrt{س + ٤} + ٢}$) = $\frac{٣}{أ}$

∴ نهـا$_{س \to ٠^{+}}$ $\frac{أس(\sqrt{س + ٤} + ٢)}{س}$ = $\frac{٣}{أ}$

∴ ٤أ = $\frac{٣}{أ}$ ∴ ٤أ^{٢} = ٣ ∴ أ = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

١٩

① د(٥$^{+}$) = نهـا$_{س \to ٥^{+}}$ $\sqrt{س - ٥}$ = صفر

د(٥$^{-}$) غير موجودة

∴ نهـا$_{س \to ٥}$ د(س) غير موجودة

② د(٣$^{+}$) غير موجودة

د(٣$^{-}$) = نهـا$_{س \to ٣^{-}}$ $\sqrt{٣ - س}$ = صفر

∴ نهـا$_{س \to ٣}$ د(س) غير موجودة

③ د(−١$^{+}$) غير موجودة

د(−١$^{-}$) = نهـا$_{س \to (-١)^{-}}$ $\sqrt{س^{٢} - ١}$ = صفر

∴ نهـا$_{س \to -١}$ د(س) غير موجودة

د(١$^{+}$) = نهـا$_{س \to ١^{+}}$ $\sqrt{س^{٢} - ١}$ = صفر

د(١$^{-}$) غير موجودة

∴ نهـا$_{س \to ١}$ د(س) غير موجودة

④ د(−٢$^{-}$) غير موجودة

د(−٢$^{+}$) = نهـا$_{س \to (-٢)^{+}}$ $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ = صفر

∴ نهـا$_{س \to -٢}$ د(س) غير موجودة

، د(٢$^{+}$) غير موجودة

، د(٢$^{-}$) = نهـا$_{س \to ٢^{-}}$ $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ = صفر

∴ نهـا$_{س \to ٢}$ د(س) غير موجودة

٢٠

① د(٠$^{-}$) = نهـا$_{س \to ٠^{-}}$ $\frac{(س + ٢)^{٦} - ٢^{٦}}{س(س + ٣٢)}$

= نهـا$_{س \to ٠^{-}}$ [$\frac{١}{س + ٣٢}$ × $\frac{(س + ٢)^{٦} - ٢^{٦}}{س}$]

= $\frac{١}{٣٢}$ × ٦ × ٢^{٥} = ٦

، د(٠$^{+}$) = نهـا$_{س \to ٠^{+}}$ $\frac{-١٢س}{١ - (جاس + جتاس)^{٢}}$

= نهـا$_{س \to ٠^{+}}$ $\frac{-١٢س}{١ - (١ + ٢ جاس جتاس)}$

= نهـا$_{س \to ٠^{+}}$ $\frac{١٢س}{٢ جاس جتاس}$ = ٦

، ∵ د(٠$^{+}$) = د(٠$^{-}$) = ٦

∴ نهـا$_{س \to ٠}$ د(س) = ٦

② د(٠$^{-}$) = نهـا$_{س \to ٠^{-}}$ ($\frac{١ - جتاس}{جا^{٢}٣س}$ × $\frac{١ + جتاس}{١ + جتاس}$)

= نهـا$_{س \to ٠^{-}}$ ($\frac{١ - جتا^{٢}س}{جا^{٢}٣س}$ × $\frac{١}{١ + جتاس}$)

= نهـا$_{س \to ٠^{-}}$ $\frac{جا^{٢}س}{جا^{٢}٣س}$

× نهـا$_{س \to ٠^{-}}$ $\frac{١}{١ + جتاس}$

= $\frac{١}{٩}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{١٨}$

، د(٠$^{+}$) = نهـا$_{س \to ٠^{+}}$ $\frac{١}{٢}$ س^{٢} جتا٦س ظتا^{٢}٣س

= نهـا$_{س \to ٠^{+}}$ $\frac{\frac{١}{٢} س^{٢} جتا٦س}{ظا^{٢}٣س}$

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٩}$ × ١ = $\frac{١}{١٨}$

، ∵ د(٠$^{-}$) = د(٠$^{+}$) = $\frac{١}{١٨}$

∴ نهـا$_{س \to ٠}$ د(س) = $\frac{١}{١٨}$

٢١

∵ |س| = { س ، س ≥ ٠ ؛ −س ، س < ٠ }

① نهـا$_{س \to ٠^{+}}$ $\frac{جا|س|}{س}$ = نهـا$_{س \to ٠^{+}}$ $\frac{جاس}{س}$ = ١

، نهـا$_{س \to ٠^{-}}$ $\frac{جا|س|}{س}$ = نهـا$_{س \to ٠^{-}}$ $\frac{جا(-س)}{س}$

= −١

∴ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

∴ نهـا$_{س \to ٠}$ $\frac{جا|س|}{س}$ غير موجودة

② $\lim_{س \to 0^+} \frac{جتا|س|}{س+1} = \lim_{س \to 0^+} \frac{جتاس}{س+1} = 1$

، $\lim_{س \to 0^-} \frac{جتا|س|}{س+1} = \lim_{س \to 0^-} \frac{جتا(-س)}{س+1}$

$= \lim_{س \to 0^-} \frac{جتاس}{س+1} = 1$

∵ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى = ١

∴ $\lim_{س \to 0} \frac{جتا|س|}{س+1} = 1$

٢٢

$\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{قا^2س - 1}}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{ظا^2س}}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{|ظاس|}{س}$

، ∵ $|ظاس| = \begin{cases} ظاس & ، ظاس \geq 0 \\ -ظاس & ، ظاس < 0 \end{cases}$

∴ $\lim_{س \to 0^+} \frac{|ظاس|}{س} = \lim_{س \to 0^+} \frac{ظاس}{س} = 1$

«لاحظ عندما $س \to 0^+$ فإن $ظاس \to 0^+$»

، $\lim_{س \to 0^-} \frac{|ظاس|}{س} = \lim_{س \to 0^-} \frac{-ظاس}{س} = -1$

«لاحظ عندما $س \to 0^-$ فإن $ظاس \to 0^-$»

، ∵ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

∴ $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{قا^2س - 1}}{س}$ غير موجودة

٢٣

$\lim_{س \to 2^+} (ى(س) + هـ(س))$

$= \lim_{س \to 2^+} (ى(س)) + \lim_{س \to 2^+} (هـ(س))$

$= 14 + 4 = 18$

، $\lim_{س \to 2^-} (ى(س) + هـ(س))$

$= \lim_{س \to 2^-} (ى(س)) + \lim_{س \to 2^-} (هـ(س))$

$= 10 + 8 = 18$

∴ $\lim_{س \to 2^+} (ى(س) + هـ(س))$

$= \lim_{س \to 2^-} (ى(س) + هـ(س))$

∴ $\lim_{س \to 2} [ى(س) + هـ(س)] = 18$

٢٤

① ∵ $\lim_{س \to 2^-} \frac{1}{س - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

، $\lim_{س \to 2^+} \frac{1}{س - 2} = \frac{1}{0^+} = \infty$

∴ $\lim_{س \to 2} \frac{1}{س - 2}$ غير موجودة

② ∵ $\lim_{س \to 2^-} د(س) = \frac{1}{0^+} = \infty$

$\lim_{س \to 2^+} د(س) = \frac{1}{0^+} = \infty$

∴ $\lim_{س \to 2} د(س) = \infty$

③ ∵ $\lim_{س \to 1^-} \frac{1}{س - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{س \to 1^+} (س - 2) = -1$

∴ $\lim_{س \to 1} د(س)$ غير موجودة.

٢٥

$د(س) = \begin{cases} 1 + \frac{س(س+2)}{-(س+2)} & ، -3 < س < -2 \\ 1 + \frac{س(س+2)}{س+2} & ، -2 < س < 0 \\ 2س + 1 & ، 0 < س < 3 \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 - س & ، -3 < س < -2 \\ 1 + س & ، -2 < س < 0 \\ 2س + 1 & ، 0 < س < 3 \end{cases}$

① $\lim_{س \to -2^-} د(س)$ غير موجودة

$\lim_{س \to -2^+} د(س) = 4$

∴ $\lim_{س \to -2} د(س)$ غير موجودة.

② $\lim_{س \to -2^-} د(س) = 1 - (-2) = 3$

$\lim_{س \to -2^+} د(س) = 1 + (-2) = -1$

∴ $\lim_{س \to -2} د(س)$ غير موجودة.

③ $\lim_{س \to 0^-} د(س) = 1$

$\lim_{س \to 0^+} د(س) = 1$

∴ $\lim_{س \to 0} د(س) = 1$

④ $\lim_{س \to 3^-} د(س) = 2(3) + 1 = 7$

، $\lim_{س \to 3^+} د(س)$ غير موجودة

∴ $\lim_{س \to 3} د(س)$ غير موجودة.

٢٦

$د(2^+) = \lim_{س \to 2^+} \frac{(2س - 3)^{\frac{1}{3}} - 1}{(3س - 5)^{\frac{1}{5}} - 1}$

$= \frac{2}{3} \lim_{س \to 2^+} \left(\frac{(2س - 3)^{\frac{1}{3}} - 1^{\frac{1}{3}}}{2(س - 2)} \times \frac{3(س - 2)}{(3س - 5)^{\frac{1}{5}} - 1^{\frac{1}{5}}} \right)$

$= \frac{2}{3} \lim_{(2س - 3) \to 1} \frac{(2س - 3)^{\frac{1}{3}} - 1^{\frac{1}{3}}}{(2س - 3) - 1} \times \lim_{(3س - 5) \to 1} \frac{(3س - 5) - 1}{(3س - 5)^{\frac{1}{5}} - 1^{\frac{1}{5}}}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 5 = \frac{10}{9}$

، ∵ الدالة لها نهاية عند س = ٢

∴ $د(2^+) = د(2^-)$

∴ $\frac{10}{9} = 2ك$ ∴ $ك = \frac{5}{9}$

٢٧

∵ الدالة لها نهاية عند س = ٣

∴ $د(3^-) = د(3^+)$

∴ $\lim_{س \to 3} \frac{س^2 + أس + ب}{(س - 3)(س - 1)} = 12$

، ∵ المقام = صفر عندما س = ٣

∴ البسط = صفر عندما س = ٣

∴ $(3)^2 + أ(3) + ب = 0$

∴ $ب = -3أ - 9$

∴ $\lim_{س \to 3} \frac{س^2 + أس - 3أ - 9}{(س - 3)(س - 1)} = 12$

∴ $\lim_{س \to 3} \frac{(س^2 - 9) + (أس - 3أ)}{(س - 3)(س - 1)} = 12$

∴ $\lim_{س \to 3} \frac{(س - 3)(س + 3) + أ(س - 3)}{(س - 3)(س - 1)} = 12$

∴ $\lim_{س \to 3} \frac{\cancel{(س - 3)}(س + 3 + أ)}{\cancel{(س - 3)}(س - 1)} = 12$

∴ $\frac{6 + أ}{2} = 12$ ∴ $أ = 18$

ومنها $ب = -63$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

① (جـ) ② (ب) ③ (أ) ④ (جـ) ⑤ (جـ)

⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (د) ⑨ (جـ) ⑩ (د)

إرشادات الحل :

① ∵ $د(س) = س^2$

∴ $د(د(س)) = (س^2)^2 = س^4$

∴ $\lim_{س \to 2} د(د(س)) = \lim_{س \to 2} س^4$

$= 2^4 = 16$

② ∵ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) = ٧

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة (٢ ، ٧) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة.

، ∵ د دالة فردية.

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة (−٣ ، −٧) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة.

∴ $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}}$ د (س) = −٧

③ ∵ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) = ٥

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة (٢ ، ٥) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة.

، ∵ د دالة زوجية.

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة (−٢ ، ٥) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة.

∴ $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}}$ د (س) = ٥

④ ∵ د دالة كثيرة حدود ، $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) = ٣

∴ منحنى الدالة يمر بالنقطة (٢ ، ٣)

∴ منحنى $\text{د}^{-١}$ يمر بالنقطة (٣ ، ٢)

∴ $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}$ $\text{د}^{-١}$ (س) = ٢

⑤ ∵ منحنى د (س + ١) هو نفس منحنى د (س) بإزاحة أفقية مقدارها وحدة واحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

، ∵ نهـا د (س) = ٥ عند س ← ٢

∴ نهـا د (س + ١) = ٥ عندما س ← ١

أى أن : $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}$ د (س + ١) = ٥

⑥ ∵ $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{[\text{د (س)}]^{٣} - ٦٤}{\text{د (س)} - ٤}$

«لاحظ أن عند س ← −٢

فإن د (س) ← د (−٢) أى أن : د (س) ← ٤»

$= \underset{\text{د (س)}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{[\text{د (س)}]^{٣} - (٤)^{٣}}{[\text{د (س)}] - (٤)} = ٣ (٤)^{٢} = ٤٨$

⑦ من الرسم نجد أن د (س) = س − ١

، ر (س) = − س + ١

∴ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{د (س)}}{\text{ر (س)}} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} - ١}{- \text{س} + ١}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} - ١}{-(\text{س} - ١)} = -١$

⑧ $\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ د (س)

$= \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ [هـ (س) + ر (س)]

$= \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ هـ (س) + $\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ ر (س)

= −١ + ١ = صفر

، $\underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ د (س)

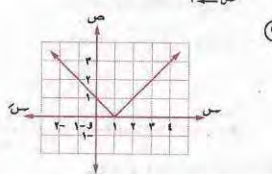
$= \underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ [هـ (س) + ر (س)]

$= \underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ هـ (س) + $\underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ ر (س)

= ٢ + (−٢) = صفر

∴ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}$ د (س) = صفر

⑨



لاحظ أن : منحنى | د (س) | هو نفس منحنى د (س) بعد انعكاس الجزء الموجود اسفل محور السينات لأعلى كما بالشكل السابق

ومن الرسم ∴ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}$ | د (س) | = ١

⑩ ∵ د (س) = $\frac{٤}{٣}$ س + ٤

وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{٤}{٣}$ ص + ٤

∴ ص = $\frac{٣}{٤}$ (س − ٤) = $\frac{٣}{٤}$ س − ٣

∴ $\text{د}^{-١}$ (س) = $\frac{٣}{٤}$ س − ٣

∴ $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{د (س)}}{\text{د}^{-١} \text{(س)}} = \underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\frac{٤}{٣}\text{س} + ٤}{\frac{٣}{٤}\text{س} - ٣}$

$= \frac{١٦}{٩}$

إجابات تمارين 18

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (أ)	③ (أ)	④ (د)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (ب)	⑩ (أ)	⑪ (جـ)	⑫ (جـ)
⑬ (جـ)	⑭ (د)	⑮ (جـ)	⑯ (أ)
⑰ (أ)	⑱ (أ)	⑲ (أ)	⑳ (د)
㉑ (ب)	㉒ (ب)	㉓ (جـ)	㉔ (د)
㉕ (أ)	㉖ (أ)	㉗ (جـ)	㉘ (جـ)
㉙ (جـ)	㉚ (ب)	㉛ (ب)	㉜ (د)
㉝ (د)	㉞ (ب)		

ثانيا الأسئلة المقالية

تمارين على الاتصال عند نقطة

١

① ∵ د (−١) = $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}}$ ($\text{س}^{٢}$ + س − ٣) = −٣

∴ الدالة د متصلة عند س = −١

② ∵ د (٩) = $\underset{\text{س}\to ٩}{\text{نهـا}} \sqrt[٣]{\text{س} - ١}$ = ٢

∴ الدالة د متصلة عند س = ٩

③ ∵ د (١) = $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢}$ = ٣

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

، ∵ د (٢) غير معرفة

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٢

④ د (٣) = $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}$ (٥ − | س − ٣ |) = ٥

∴ الدالة د متصلة عند س = ٣

⑤ ∵ د (٤) = $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}}$ (| س − ٤ | + | س + ٢ |) = ٦

∴ الدالة د متصلة عند س = ٤

، ∵ د (−٢) = $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}}$ (| س − ٤ | + | س + ٢ |) = ٦

∴ الدالة د متصلة عند س = −٢

⑥ ∵ د $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = ٤ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ + ٣ = ٤

، د $\left(\frac{١}{٢}^{-}\right)$ = $\underset{\text{س}\to \frac{١}{٢}^{-}}{\text{نهـا}}$ (٤ $\text{س}^{٢}$ + ٣) = ٤

، د $\left(\frac{١}{٢}^{+}\right)$ = $\underset{\text{س}\to \frac{١}{٢}^{+}}{\text{نهـا}}$ (٥ − ٢ س) = ٤

∴ د $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = د $\left(\frac{١}{٢}^{-}\right)$ = د $\left(\frac{١}{٢}^{+}\right)$

∴ الدالة د متصلة عند س = $\frac{١}{٢}$

⑦ ∵ د (−١) = $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}}$ ٢ س = −٢

∴ الدالة د متصلة عند س = −١

، ∵ الدالة د غير معرفة عند س = ١

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ١

⑧ * عند س = −٢

د (−٢) = ١ ، د (-٢^{+}) = ١

، د (-٢^{-}) = $\underset{\text{س}\to (-٢^{-})}{\text{نهـا}}$ (س + ٤) = ٢

، ∵ د (-٢^{-}) ≠ د (-٢^{+})

∴ الدالة د غير متصلة عند س = −٢

* عند س = −١

د (−١) = −٢ + ٣ = ١ ، د (-١^{-}) = ١

، د (-١^{+}) = نهـا (س ← -١^{+}) (٢ س + ٣) = ١

∴ د (−١) = د (-١^{-}) = د (-١^{+})

∴ الدالة د متصلة عند س = −١

⑨ ∵ د (١) = ٤

، د (١^{+}) = نهـا (س ← ١^{+}) ($س^{٢}$ + ٣) = ٤

، د (١^{-}) = نهـا (س ← ١^{-}) ($س^{٢}$ + ٢ س − ٣) / (س − ١)

= نهـا (س ← ١^{-}) (س − ١) (س + ٣) / (س − ١) = ٤

، ∵ د (١) = د (١^{-}) = د (١^{+})

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

⑩ د (س) = { $س^{٢}$ ، س > ٠ ؛ ٢ ، س = ٠ ؛ $-س^{٢}$ ، س < ٠ }

د (٠) = ٢ ، د (٠^{+}) = نهـا (س ← ٠^{+}) $س^{٢}$ = ٠

، د (٠^{-}) = نهـا (س ← ٠^{-}) ($-س^{٢}$) = ٠

∵ د (٠) ≠ نهـا (س ← ٠) د (س)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٠

⑪ د (س) = { ١ ، س > ٣ ؛ ٢ ، س = ٣ ؛ −١ ، س < ٣ }

د (٣) = ٢ ، د (٣^{+}) = ١ ، د (٣^{-}) = −١

∵ د (٣) ≠ د (٣^{+}) ≠ د (٣^{-})

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٣

⑫ د (س) = { ($س^{٢}$ − س − ٢) / (س − ٢) ، س < ٢ ؛ ٣ ، س ≥ ٢ }

= { (س − ٢) (س + ١) / (س − ٢) ، س < ٢ ؛ ٣ ، س ≥ ٢ }

= { س + ١ ، س < ٢ ؛ ٣ ، س ≥ ٢ }

∴ د (٢) = ٣ ، د (٢^{+}) = نهـا (س ← ٢^{+}) ٣ = ٣

، د (٢^{-}) = نهـا (س ← ٢^{-}) (س + ١) = ٣

، ∵ د (٢) = د (٢^{+}) = د (٢^{-})

∴ الدالة د متصلة عند س = ٢

⑬ د (٢) = ٣ × ٤ + ٢ = ١٤

، نهـا (س ← ٢) د (س) = نهـا (س ← ٢) ($س^{٧}$ − $٢^{٧}$) / ($س^{٤}$ − $٢^{٤}$)

= $\frac{٧}{٤}$ $(٢)^{٣}$ = ١٤

∴ د (٢) = نهـا (س ← ٢) د (س)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٢

⑭ د (٠) = ٠

، د (٠^{-}) = ٢ نهـا (س ← ٠^{-}) جا س = ٠

، د (٠^{+}) = نهـا (س ← ٠^{+}) (١ − جتا س) / س = ٠

∴ د (٠) = د (٠^{-}) = د (٠^{+})

∴ الدالة د متصلة عند س = ٠

⑮ د (٢) = $\frac{١}{٤}$

، د (٢^{+}) = نهـا (س ← ٢^{+}) (١ − ٣ / $س^{٢}$) = $\frac{١}{٤}$

، د (٢^{-}) = نهـا (س ← ٢^{-}) جا (س − ٢) / ($س^{٢}$ − ٤)

= نهـا (س ← ٢^{-}) جا (س − ٢) / (س − ٢)

× نهـا (س ← ٢^{-}) ١ / (س + ٢) = ١ × $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

∵ د (٢) = د (٢^{-}) = د (٢^{+})

∴ الدالة د متصلة عند س = ٢

⑯ د (س) = { $-س^{٢}$ + ٤ ، س ≤ ٠ ؛ ٤ ، س > ٠ }

د (٠) = ٤

، د (٠^{-}) = نهـا (س ← ٠^{-}) ($-س^{٢}$ + ٤) = ٤

، د (٠^{+}) = ٤

∴ د (٠) = د (٠^{+}) = د (٠^{-})

∴ الدالة د متصلة عند س = ٠

⑰ د (س) = { (س − ١) (س + ٣) / |س + ٣| ، س ≠ −٣ ؛ ٢ ، س = −٣ }

= { س − ١ ، س > −٣ ؛ ٢ ، س = −٣ ؛ −س + ١ ، س < −٣ }

* عند س = −٣

د (−٣) = ٢

، د (-٣^{+}) = نهـا (س ← -٣^{+}) (س − ١) = −٤

، د (-٣^{-}) = نهـا (س ← -٣^{-}) (−س + ١) = ٤

∵ د (-٣^{+}) ≠ د (-٣^{-})

∴ الدالة د غير متصلة عند س = −٣

* عند س = ١

د (١) = صفر

، نهـا (س ← ١) د (س) = نهـا (س ← ١) (س − ١)

= صفر

∵ د (١) = نهـا (س ← ١) د (س)

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

⑱ د (س) = { −س − ٣ ، س < −٣ ؛ س + ٣ ، −٣ ≤ س ≤ ٢ ؛ ١١ − ٣ س ، س > ٢ }

* عند س = −٣

د (−٣) = صفر

، د (-٣^{-}) = نهـا (س ← -٣^{-}) (−س − ٣) = صفر

، د (-٣^{+}) = نهـا (س ← -٣^{+}) (س + ٣) = صفر

∴ د (−٣) = د (-٣^{-}) = د (-٣^{+})

∴ الدالة د متصلة عند س = −٣

* عند س = ٢

د (٢) = ٥

، د (٢^{-}) = نهـا (س ← ٢^{-}) (س + ٣) = ٥

، د (٢^{+}) = نهـا (س ← ٢^{+}) (١١ − ٣ س) = ٥

∴ د (٢) = د (٢^{-}) = د (٢^{+})

∴ الدالة د متصلة عند س = ٢

⑲ د (٠) = ٣

، د (٠^{+}) = نهـا (س ← ٠^{+}) (س + ٣) / (س + ١) = ٣

، د (٠^{-}) = نهـا (س ← ٠^{-}) (٥ $س^{٢}$ + $جا^{٢}$ ٢ س) / (س طا ٣ س)

= نهـا (س ← ٠^{-}) [٥ + $(\text{جا ٢ س} / س)^{٢}$] / [طا ٣ س / س]

= (٥ + ٤) / ٣ = ٣

∴ د (٠) = د (٠^{+}) = د (٠^{-})

∴ الدالة د متصلة عند س = ٠

⑳ د (π) = ١

، نهـا (س ← π) د (س) = نهـا (س ← π) جا س / (π − س)

= نهـا ((π − س) ← ٠) جا (π − س) / (π − س) = ١

∴ د (π) = نهـا (س ← π) د (س)

∴ الدالة د متصلة عند س = π

٢

① $\text{د}(-٣) = -٣ + \text{أ}$

، $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$

$= \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}+٣)(\text{س}-١)}{\text{س}+٣} = -٤$

، ∵ الدالة د متصلة عند س = −٣

∴ $-٣ + \text{أ} = -٤$ ∴ $\text{أ} = -١$

② $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}-٣)}{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}-٣}{\text{س}^٢+٢\text{س}+٤} = \frac{-١}{١٢}$

، $\text{د}(٢) = \frac{-٢}{|\text{أ}|}$

، ∵ الدالة د متصلة عند س = ٢

∴ $-\frac{١}{١٢} = \frac{-٢}{|\text{أ}|}$ ∴ $|\text{أ}| = ٢٤$ ∴ $\text{أ} = \pm ٢٤$

③ $\text{د}(١) = \text{ك}$

، $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}+٣}-٢}{\text{س}^٢-١} \times \frac{\sqrt{\text{س}+٣}+٢}{\sqrt{\text{س}+٣}+٢}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}+٣-٤}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)(\sqrt{\text{س}+٣}+٢)}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{١}{(\text{س}+١)(\sqrt{\text{س}+٣}+٢)} = \frac{١}{٨}$

∵ الدالة د متصلة عند س = ١ ∴ $\text{ك} = \frac{١}{٨}$

④ $\text{د}(٠) = \text{أ} + ١$

، $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^٢ ٢\text{س}}{\text{س} \text{ طا } ٣\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\left(\frac{\text{جا } ٢\text{س}}{\text{س}}\right)^٢}{\frac{\text{طا } ٣\text{س}}{\text{س}}} = \frac{٤}{٣}$

∵ الدالة د متصلة عند س = ٠

∴ $\text{أ} + ١ = \frac{٤}{٣}$ ∴ $\text{أ} = \frac{١}{٣}$

⑤ $\text{د}(-٢) = -٨$

، $\text{د}(-٢^+) = \underset{\text{س}\to -٢^+}{\text{نهـا}} (\text{أ}\text{س} + \text{ب}) = -٢\text{أ} + \text{ب}$

∵ الدالة د متصلة عند س = −٢

∴ $-٢\text{أ} + \text{ب} = -٨$ (١)

$\text{د}(٥) = ١٣$

، $\text{د}(٥^-) = \underset{\text{س}\to ٥^-}{\text{نهـا}} (\text{أ}\text{س} + \text{ب}) = ٥\text{أ} + \text{ب}$

∵ الدالة د متصلة عند س = ٥

∴ $٥\text{أ} + \text{ب} = ١٣$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\text{أ} = ٣$ ، $\text{ب} = -٢$

⑥ $\text{د}(٢) = ٣$

، $\text{د}(٢^+) = \underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} (\text{أ} + \text{ب}\text{س}) = \text{أ} + ٢\text{ب}$

، $\text{د}(٢^-) = \underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهـا}} (\text{ب} - \text{أ}\text{س}^٢) = \text{ب} - ٤\text{أ}$

∵ الدالة د متصلة عند س = ٢

∴ $\text{أ} + ٢\text{ب} = ٣$ (١)

، $\text{ب} - ٤\text{أ} = ٣$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\text{أ} = -\frac{١}{٣}$ ، $\text{ب} = \frac{٥}{٣}$

⑦ $\text{د}(٠) = \text{ك}$

، $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{جتا } ٢\text{س} - ١}{\text{س}^٢} \times \frac{\text{جتا } ٢\text{س} + ١}{\text{جتا } ٢\text{س} + ١}\right]$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{جتا}^٢ ٢\text{س} - ١}{\text{س}^٢} \times \frac{١}{\text{جتا } ٢\text{س} + ١}\right]$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-\text{جا}^٢ ٢\text{س}}{\text{س}^٢} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{جتا } ٢\text{س} + ١}$

$= -\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{جا } ٢\text{س}}{\text{س}}\right)^٢ \times \frac{١}{٢} = -٢$

، ∵ الدالة د متصلة عند س = ٠ ∴ $\text{ك} = -٢$

⑧ $\text{د}(\text{جـ}^-) = ٢ - \text{جـ}^٢$ ، $\text{د}(\text{جـ}^+) = \text{جـ}$

∵ الدالة د متصلة عند س = جـ

∴ $٢ - \text{جـ}^٢ = \text{جـ}$ ∴ $\text{جـ}^٢ + \text{جـ} - ٢ = ٠$

∴ $(\text{جـ} - ١)(\text{جـ} + ٢) = ٠$

∴ جـ = ١ أ، جـ = −٢

⑨ $\text{د}(٠) = ٠$ ، $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س})$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا } \text{س}}{\text{ك} \text{س}} = ٠ \times \frac{١}{\text{ك}}$

، ∵ الدالة د متصلة عند س = ٠

∴ $\frac{١}{\text{ك}} \times ٠ = ٠$ عندما $\text{ك} \in \text{ح} - \{٠\}$

٣

① $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}{\text{س} - ٣}$

$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}+٢)(\text{س}-٣)}{\text{س}-٣} = ٥$

إعادة التعريف :

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٦}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} \ne ٣ \\ ٥ & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$

② $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣ - ١}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-١)(\text{س}^٢+\text{س}+١)}{(\text{س}-١)(\text{س}-٢)} = -٣$

إعادة التعريف :

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^٣ - ١}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢} & ، \text{س} \ne ١ \\ -٣ & ، \text{س} = ١ \end{cases}$

③ $\text{د}(١^+) = \underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهـا}} (\text{س}^٣ + ٢\text{س}) = ٣$

$\text{د}(١^-) = \underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نهـا}} (٥\text{س} - ١) = ٤$

∵ $\text{د}(١^+) \ne \text{د}(١^-)$

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكى تصبح متصلة عند س = ١

④ $\text{د}(٢^+) = \underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} (\text{س}^٢ + ١) = ٥$

، $\text{د}(٢^-) = \underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}{\text{س}-٢} = ٤$

، ∵ $\text{د}(٢^+) \ne \text{د}(٢^-)$

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكى تصبح متصلة عند س = ٢

⑤ $\text{د}(٠^+) = \underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س} + ١ - \text{جتا } \text{س}}{٥\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـا}} \left(\frac{٣}{٥} + \frac{١ - \text{جتا } \text{س}}{٥\text{س}}\right) = \frac{٣}{٥}$

، $\text{د}(٠^-) = \underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{٣ \text{ جتا } \text{س}}{٥} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = \frac{٣}{٥}$

إعادة التعريف :

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٣\text{س} + ١ - \text{جتا } \text{س}}{٥\text{س}} & ، \text{س} > ٠ \\ \frac{٣}{٥} & ، \text{س} = ٠ \\ \frac{٣}{٥} \text{ جتا } \text{س} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$

⑥ $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س} - ٣}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} > ٣ \\ \frac{-(\text{س} - ٣)}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$

$= \begin{cases} ١ & ، \text{س} > ٣ \\ -١ & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$

$\text{د}(٣^+) = ١$ ، $\text{د}(٣^-) = -١$

∵ $\text{د}(٣^+) \ne \text{د}(٣^-)$

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكى تصبح متصلة عند س = ٣

⑦ $\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - ٦٤}{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - ٨^٢}{\text{س}^{\frac{١}{٣}} - ٨^{\frac{١}{٣}}}$

$= ٣ \times ٢ \times ٨^{٢ - \frac{١}{٣}} = ١٩٢$

إعادة التعريف :

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^٢ - ٦٤}{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢} & ، \text{س} \ne ٨ \\ ١٩٢ & ، \text{س} = ٨ \end{cases}$

(٨) د(س) = { $\frac{\text{س + س}}{\text{س}}$ ، س > ٠ ؛ $\frac{\text{−س + س}}{\text{س}}$ ، س < ٠ }

= { ٢ ، س > ٠ ؛ ٠ ، س < ٠ }

د(٠$^{+}$) = ٢ ، د(٠$^{-}$) = صفر

∵ د(٠$^{+}$) ≠ د(٠$^{-}$)

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكى تصبح متصلة عند س = ٠

(٩) نهـا س←٥ [$\frac{\text{٢}}{\text{س − ٥}}$ − $\frac{\text{١٢}}{\text{(س − ٥) (س + ١)}}$]

= نهـا س←٥ $\frac{\text{٢ (س + ١) − ١٢}}{\text{(س − ٥) (س + ١)}}$

= نهـا س←٥ $\frac{\text{٢س − ١٠}}{\text{(س − ٥) (س + ١)}}$

= نهـا س←٥ $\frac{\text{٢ (س − ٥)}}{\text{(س − ٥) (س + ١)}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$

إعادة التعريف :

د(س) = { $\frac{\text{٢}}{\text{س − ٥}}$ − $\frac{\text{١٢}}{\text{س}^{٢}\text{ − ٤س − ٥}}$ ، س ≠ ٥ ؛ $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ ، س = ٥ }

(١٠) د(س) = { $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ ، س > ٠ ؛ $\frac{\text{− جاس}}{\text{س}}$ ، س < ٠ }

∵ د(٠$^{+}$) = نهـا س←٠$^{+}$ $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ = ١

، د(٠$^{-}$) = نهـا س←٠$^{-}$ $\frac{\text{− جاس}}{\text{س}}$ = −١

، ∵ د(٠$^{+}$) ≠ د(٠$^{-}$)

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكى تصبح متصلة عند س = ٠.

تمارين على الاتصال على فترة

٤

(١) ∵ الدالة كثيرة حدود ∴ د متصلة على ح

(٢) ∵ الدالة كثيرة حدود ∴ د متصلة على ح

(٣) ∵ الدالة كسرية

، س − ٣ = ٠ ∴ س = ٣

∴ الدالة د متصلة على ح − {٣}

(٤) ∵ الدالة كسرية

، س^{٢} − ٥س + ٦ = ٠

∴ (س − ٣) (س − ٢) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = ٢

∴ د متصلة على ح − {٢ ، ٣}

(٥) ∵ الدالة كسرية

، س^{٤} − ١٣س^{٢} + ٣٦ = ٠

∴ (س^{٢} − ٩) (س^{٢} − ٤) = ٠

س = ± ٣ أ، س = ± ٢

∴ د متصلة على ح − {٣ ، −٣ ، ٢ ، −٢}

(٦) ∵ الدالة كسرية

، س^{٢} + س + ١ = ٠

لا توجد أصفار للمقام ∴ د متصلة على ح

(٧) ∵ الدالة كسرية

، س^{٣} − س = ٠ ∴ س (س^{٢} − ١) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = ± ١

∴ د متصلة على ح − {٠ ، ١ ، −١}

(٨) ∵ الدالة على شكل مقياس لكثيرة حدود

∴ د متصلة على ح

(٩) ∵ كل من الدالتين س^{٣} ، جا ٢س متصلة على ح

∴ د متصلة على ح

(١٠) ∵ كل من الدالتين جاس ، ٣ جتا (س + ١) متصلة على ح ∴ د متصلة على ح

(١١) ∵ كل من الدالتين (٣س + ٤)^{٢} ، جا ٢س متصلة على ح ∴ د متصلة على ح

(١٢) ∵ الدالة كسرية

، |س| − ٢ = ٠

∴ |س| = ٢ ∴ س = ± ٢

∴ د متصلة على ح − {٢ ، −٢}

(١٣) ∵ الدالة كسرية

، |س| + ١ = ٠ |س| = −١ مرفوض

∴ د متصلة على ح

(١٤) ∵ س − ٢ > ٠ ∴ س > ٢

∴ د متصلة على]٢ ، ∞[

(١٥) ∵ الدوال س^{٢} ، (س + ١) ، جا ٣س متصلة على ح

∴ د متصلة على ح − {−١}

(١٦) ∵ س − ٤ ≥ ٠ ∴ س ≥ ٤

∴ س ∈ [٤ ، ∞[

∴ د متصلة على الفترة [٤ ، ∞[− {٦}

(١٧) ∵ س − ٣ ≥ ٠

∴ س ≥ ٣ ∴ س ∈ [٣ ، ∞[

∴ د متصلة على الفترة [٣ ، ∞[− {٢ ، −٢}

أى أن د متصلة على الفترة [٣ ، ∞[

(١٨) ∵ س + ٢ > ٠

∴ س > −٢ ∴ س ∈]−٢ ، ∞[

∴ د متصلة على الفترة]−٢ ، ∞[− {٠}

(١٩) ∵ س + ٢ ≥ ٠

∴ س ≥ −٢ ∴ س ∈ [−٢ ، ∞[

، س + ٢ ≠ ١ ∴ س ≠ −١

∴ د متصلة على [−٢ ، ∞[− {−١}

(٢٠) ∵ س + ٢ ≥ ٠

س ≥ −٢ ∴ س ∈ [−٢ ، ∞[

، ٣ − س ≥ ٠ ٣ ≥ س

∴ س ∈]−∞ ، ٣]

∴ د متصلة على [−٢ ، ٣]

(٢١) ٢٥ − س^{٢} > ٠ س^{٢} < ٢٥

|س| < ٥ −٥ < س < ٥

∴ د متصلة على الفترة]−٥ ، ٥[

(٢٢) ٥ − |س| ≥ ٠

|س| ≤ ٥ ∴ −٥ ≤ س ≤ ٥

∴ د متصلة على الفترة [−٥ ، ٥]

(٢٣) ∵ جاس = ٠ عندما س = π ن

∴ د متصلة على

ح − {س : س = π ن ، ن ∈ ص}

(٢٤) ∵ جتاس = ٠ عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ + π ن

∴ د متصلة على

ح − {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + π ن ، ن ∈ ص}

(٢٥) كل من الدالتين جا ٣س ، جتا ٥س متصلة على ح

، ∵ ١ − جتاس = ٠ ∴ جتاس = ١

∴ س = ٢ π ن ∴ د متصلة على

ح − {س : س = ٢ π ن ، ن ∈ ص}

(٢٦) ∵ ١ + جا س = ٠ ∴ جا س = −١

∴ س = ٣ط/٢ + ٢ ن ط

∴ د متصلة على

ح − {س : س = ٣ط/٢ + ٢ ن ط ، ن ∈ ص}

(٢٧) كل من الدالتين (جا^{٢} س ، جتا س) متصلة على ح

، س^{٢} − ٩ = ٠ ∴ س = ±٣

∴ د متصلة على ح − {٣ ، −٣}

(٢٨) د متصلة على

ح − {س : س = ط/٢ + ن ط ، ن ∈ ص}

(٢٩) ∵ ظا س متصلة على

ح − {ط/٢ + ن ط ، ن ∈ ص}

، س^{٢} − ٩ = ٠ ∴ س = ±٣

∴ الدالة د متصلة على

ح − {٣ ، −٣ ، ط/٢ + ن ط} حيث ن ∈ ص

٥

(١) أولاً : ∵ د(س) = س^{٢} + ١ كثيرة الحدود

∴ د متصلة على]−∞ ، ١[

، د(س) = ٢ س كثيرة حدود

∴ د متصلة على]١ ، ∞[

ثانياً : ∵ د(١) = ٢

، د(١$^{-}$) = نهـا (س ← ١$^{-}$) (س^{٢} + ١) = ٢

، د(١$^{+}$) = نهـا (س ← ١$^{+}$) (٢ س) = ٢

∵ د(١) = د(١$^{-}$) = د(١$^{+}$)

∴ د متصلة عند س = ١ ∴ د متصلة على ح

(٢) أولاً : ∵ د(س) = س^{٢} كثيرة الحدود

∴ د متصلة على]−∞ ، ٣[

، ∵ د(س) = ٥ س − ٤ كثيرة حدود

∴ د متصلة على]٣ ، ∞[

ثانياً : ∵ د(٣) = ١١

، د(٣$^{-}$) = نهـا (س ← ٣$^{-}$) س^{٢} = ٩

، د(٣$^{+}$) = نهـا (س ← ٣$^{+}$) (٥ س − ٤) = ١١

∵ د(٣$^{-}$) ≠ د(٣$^{+}$)

∴ د غير متصلة عند س = ٣

∴ د متصلة على ح − {٣}

(٣) أولاً :

∵ د(س) = س^{٢} − ٣ س + ٢ كثيرة الحدود

∴ د متصلة على]−∞ ، ٣[

، د(س) = ٢ كثيرة حدود

∴ د متصلة على]٣ ، ٤[

∵ د(س) = ٦ − س^{٢} كثيرة حدود

∴ د متصلة على]٤ ، ∞[

ثانياً : د(٣) = ٢

، د(٣$^{-}$) = نهـا (س ← ٣$^{-}$) (س^{٢} − ٣ س + ٢) = ٢

، د(٣$^{+}$) = ٢

∵ د(٣) = د(٣$^{-}$) = د(٣$^{+}$)

∴ د متصلة عند س = ٣

ثالثاً : د(٤) = ٢ ، د(٤$^{-}$) = ٢

، د(٤$^{+}$) = نهـا (س ← ٤$^{+}$) (٦ − س^{٢}) = −١٠

∵ د(٤$^{+}$) ≠ د(٤$^{-}$)

∴ د غير متصلة عند س = ٤

∴ د متصلة على ح − {٤}

(٤) أولاً : د(س) = ١ + جا س

متصلة على]٠ ، ط/٢[

، د(س) = ١ − جتا ٢ س

متصلة على]ط/٢ ، ∞[

ثانياً : د(٠) = ١

، د(٠$^{+}$) = نهـا (س ← ٠$^{+}$) (١ + جا س) = ١

∴ د(٠) = د(٠$^{+}$)

∴ د متصلة من اليمين عند س = ٠

ثالثاً : د(ط/٢) = ٢

، د((ط/٢)$^{-}$) = نهـا (س ← (ط/٢)$^{-}$) (١ + جا س) = ٢

، د((ط/٢)$^{+}$) = نهـا (س ← (ط/٢)$^{+}$) (١ − جتا ٢ س) = ٢

∴ د((ط/٢)$^{-}$) = د((ط/٢)$^{+}$) = د(ط/٢)

∴ د متصلة عند س = ط/٢

∴ د متصلة على [٠ ، ∞[

(٥) أولاً : د(س) = جا س

متصلة على]−ط/٤ ، ٣ط/٤[

، د(س) = جتا س

متصلة على]٣ط/٤ ، ٢ط[

ثانياً : ∴ د(−ط/٤) = −√٢/٢

، د((−ط/٤)$^{+}$) = نهـا (س ← (−ط/٤)$^{+}$) جا س = −√٢/٢

∵ د(−ط/٤) = د((−ط/٤)$^{+}$)

∴ د متصلة من اليمين عند س = −ط/٤

ثالثاً : د(٣ط/٤) = −√٢/٢

د((٣ط/٤)$^{+}$) = نهـا (س ← (٣ط/٤)$^{+}$) جتا س = −√٢/٢

د((٣ط/٤)$^{-}$) = نهـا (س ← (٣ط/٤)$^{-}$) جا س = √٢/٢

∵ د((٣ط/٤)$^{-}$) ≠ د((٣ط/٤)$^{+}$)

∴ د غير متصلة عند س = (٣ط/٤)

رابعاً : د(٢ط) = ١

د(٢ط$^{-}$) = نهـا (س ← ٢ط$^{-}$) جتا س = ١

∴ د(٢ط) = د(٢ط$^{-}$)

∴ د متصلة من اليسار عند س = ٢ط

∴ د متصلة على الفترة [−ط/٤ ، ٢ط] − {٣ط/٤}

(٦) أولاً : د(س) = (س ظا س + جا^{٢} ٣ س) / (٥ س^{٢})

متصلة على]−ط/٤ ، ٠[

، د(س) = ٢ جتا ٢ س متصلة على]٠ ، ط/٤[

ثانياً : د(٠) = ٢ ، د(٠$^{-}$)

= نهـا (س ← ٠$^{-}$) (س ظا س + جا^{٢} ٣ س) / (٥ س^{٢})

= نهـا (س ← ٠$^{-}$) ((ظا س)/س + ((جا ٣ س)/س)^{٢}) / ٥

= ٢

، د(٠$^{+}$) = نهـا (س ← ٠$^{+}$) (٢ جتا ٢ س) = ٢

، ∵ د(٠$^{+}$) = د(٠$^{-}$) = د(٠)

∴ د متصلة عند س = ٠

∴ د متصلة على]−ط/٤ ، ط/٤[

⑦ د(س) = ((س + ٣)^٤ − ٨١) ÷ س

متصلة على]− ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

، د(٠) = ١٠٨

، نهـا (س ← ٠) د(س) = نهـا (س ← ٠) ((س + ٣)^٤ − ٣^٤) ÷ س

= ٤ (٣)^٣ = ١٠٨

∵ د(٠) = نهـا (س ← ٠) د(س)

∴ د متصلة عند س = ٠ ∴ د متصلة على ح

⑧

∵ د(س) = { ٥ + س^٢ ، س ≤ ٠ ؛ ٥ ، س > ٠ }

د(س) = ٥ + س^٢ كثيرة حدود متصلة على]−∞ ، ٠[

، د(س) = ٥ كثيرة حدود متصلة]٠ ، ∞[

، د(٠) = ٥   د(٠^+) = ٥   د(٠^−) = ٥

∵ د(٠) = د(٠^−) = د(٠^+)

∴ د متصلة عند س = ٠

∴ د متصلة على ح

٦

∵ د متصلة على [− π ، π]

∴ د متصلة عند س = ٠   ∴ د(٠^−) = د(٠^+)

∴ نهـا (س ← ٠^−) (س + جا ٢س) ÷ (جا ½ س) = نهـا (س ← ٠^+) (س + ك)

∴ نهـا (س ← ٠^−) (١ + جا ٢س ÷ س) ÷ (جا ½ س ÷ س) = ك

∴ (١ + ٢) ÷ ½ = ك   ∴ ك = ٦

٧

∵ د(س) متصلة على ح

∴ د متصلة عند س = −١

∴ د(−١^−) = د(−١^+)

∴ نهـا (س ← −١^−) (٤ س) = نهـا (س ← −١^+) (أ س + ب)

∴ −٤ = −أ + ب   (١)

، د متصلة عند س = ٣

∴ د(٣^−) = د(٣^+)

∴ نهـا (س ← ٣^−) (أ س + ب) = نهـا (س ← ٣^+) (−٢ س)

∴ ٣ أ + ب = −٦   (٢)

من (١)، (٢): ∴ أ = −½   ب = −٩/٢

٨

∵ د(س) متصلة على ح

∴ د(س) لها نهاية عند س = ٩

، ∵ المقام = صفر عندما س = ٩

∴ √(٩ − أ) − ١ = ٠   ∴ √(٩ − أ) = ١

∴ أ = ٨

، نهـا (س ← ٩) د(س) = د(٩)

∴ نهـا (س ← ٩) (√(س − ٨) − ١) ÷ (√س − ٣) = ٩ − ب

∴ نهـا (س ← ٩) (√(س − ٨) − ١) ÷ (√س − ٣) × (√(س − ٨) + ١) ÷ (√(س − ٨) + ١) × (√س + ٣) ÷ (√س + ٣)

= ٩ − ب

∴ نهـا (س ← ٩) ((س − ٨ − ١)(√س + ٣)) ÷ ((س − ٩)(√(س − ٨) + ١)) = ٩ − ب

∴ ٦/٢ = ٩ − ب   ∴ ب = ٦

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① أولاً: د(س) = { س + ١ ، س < ١ ؛ ٣ س − ١ ، ١ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٤ س − س^٢ ، س > ٢ }

∵ د(س) = س + ١ كثيرة حدود متصلة]− ∞ ، ١[

د(س) = ٣ س − ١ كثيرة حدود متصلة]١ ، ٢[

د(س) = ٤ س − س^٢ كثيرة حدود متصلة]٢ ، ∞[

ثانيًا: د(١) = ٢

، د(١^−) = نهـا (س ← ١^−) (س + ١) = ٢

، د(١^+) = نهـا (س ← ١^+) (٣ س − ١) = ٢

∵ د(١^−) = د(١^+) = د(١)

∴ د متصلة عند س = ١

ثالثًا: د(٢) = ٥

د(٢^−) = نهـا (س ← ٢^−) (٣ س − ١) = ٥

د(٢^+) = نهـا (س ← ٢^+) (٤ س − س^٢) = ٤

∵ د(٢)^− ≠ د(٢)^+   ∴ د غير متصلة عند س = ٢

∴ د متصلة على ح − {٢}

②

د(س) = { س^٢ + ٢ س ، س < −٢ ؛ √(٤ − س^٢) ، −٢ ≤ س ≤ ٢ ؛ س^٢ + ٢ س ، س > ٢ }

أولاً:

د(س) = س^٢ + ٢ س كثيرة حدود

متصلة على]− ∞ ، −٢[

، د(س) = √(٤ − س^٢) متصلة على]−٢ ، ٢[

، د(س) = س^٢ + ٢ س كثيرة حدود متصلة على

]−٢ ، ∞[

ثانيًا: د(−٢) = ٠

، د(−٢)^+ = نهـا (س ← −٢^+) √(٤ − س^٢) = ٠

، د(−٢)^− = نهـا (س ← −٢^−) (س^٢ + ٢ س) = ٠

∵ د(−٢) = د(−٢^+) = د(−٢^−)

∴ د متصلة عند س = −٢

ثالثًا: د(٢) = ٠

، د(٢^−) = نهـا (س ← ٢^−) √(٤ − س^٢) = ٠

، د(٢^+) = نهـا (س ← ٢^+) (س^٢ + ٢ س) = ٨

∵ د(٢^−) ≠ د(٢^+)   ∴ د غير متصلة عند س = ٢

∴ د متصلة على ح − {٢}

٢

∵ الدالة متصلة على ح

∴ المعادلة (س^٢ + أ س + ٩ = ٠) ليس لها حل فى ح

∴ ب^٢ − ٤ أ جـ < ٠   ∴ أ^٢ − ٤ × ١ × ٩ < ٠

∴ أ^٢ < ٣٦   ∴ |أ| < ٦

∴ −٦ < أ < ٦

∴ أ ∈]−٦ ، ٦[

٣

∵ الدالة متصلة على ح

∴ المعادلة (س^٢ + ٦ س + أ = ٠) ليس لها حل فى ح

∴ ب^٢ − ٤ أ جـ < ٠

∴ ٣٦ − ٤ × ١ × أ < ٠

∴ −٤ أ < −٣٦

∴ أ > ٩   ∴ أ ∈]٩ ، ∞[

٤

∵ د (س) = { -س ، س < ٠ ؛ ١ ، س ≥ ٠

∴ د (٠) = ١ ، د (٠⁺) = نها (س ← ٠⁺) (١) = ١

، د (٠⁻) = نها (س ← ٠⁻) (-س) = صفر

، ∵ د (٠⁺) ≠ د (٠⁻)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٠

، ∵ ر (س) = { ١ ، س < ٠ ؛ س ، س ≥ ٠

∴ ر (٠) = صفر

، ر (٠⁺) = نها (س ← ٠⁺) (س) = صفر

، ر (٠⁻) = نها (س ← ٠⁻) (١) = ١ ∴ ر (٠⁺) ≠ ر (٠⁻)

∴ الدالة ر غير متصلة عند س = ٠

، ∵ (د . ر) (س) = { -س ، س < ٠ ؛ س ، س ≥ ٠

∴ (د . ر) (٠) = صفر

، (د . ر) (٠⁺) = نها (س ← ٠⁺) (س) = صفر

(د . ر) (٠⁻) = نها (س ← ٠⁻) (-س) = صفر

∴ (د . ر) (٠⁺) = (د . ر) (٠⁻) = (د . ر) (٠)

∴ الدالة (د . ر) متصلة عند س = ٠

٥

① د (٤) = ١ ، نها (س ← ٤) د (س) = -١

، ∵ د (٤) ≠ نها (س ← ٤) د (س)

∴ د غير متصلة عند س = ٤

② ر (٤) = -٦ ، نها (س ← ٤) ر (س)

= نها (س ← ٤) (٤ س - ١٠) = ٦

، ∵ ر (٤) ≠ نها (س ← ٤) ر (س)

∴ ر غير متصلة عند س = ٤

③ بوضع ع (س) = د (س) . ر (س)

= { -٤ س + ١٠ ، س ≠ ٤ ؛ -٦ ، س = ٤

، ∵ ع (٤) = -٦

، نها (س ← ٤) ع (س) = نها (س ← ٤) (-٤ س + ١٠)

= -٦

، ∵ ع (٤) = نها (س ← ٤) ع (س)

∴ ع متصلة عند س = ٤

④ بوضع ل (س) = | د (س) | = { ١ ، س ≠ ٤ ؛ ١ ، س = ٤

، ∵ ل (٤) = نها (س ← ٤) ل (س) = ١

∴ ل متصلة عند س = ٤

⑤ بوضع هـ (س) = ر (س) - ٦ د (س)

= { ٤ س - ٤ ، س ≠ ٤ ؛ -١٢ ، س = ٤

، ∵ هـ (٤) = -١٢ ، نها (س ← ٤) هـ (س) = ١٢

، ∵ هـ (٤) ≠ نها (س ← ٤) هـ (س)

∴ هـ غير متصلة عند س = ٤

⑥ بوضع ك (س) = ر (د (س))

= { -١٤ ، س ≠ ٤ ؛ -٦ ، س = ٤

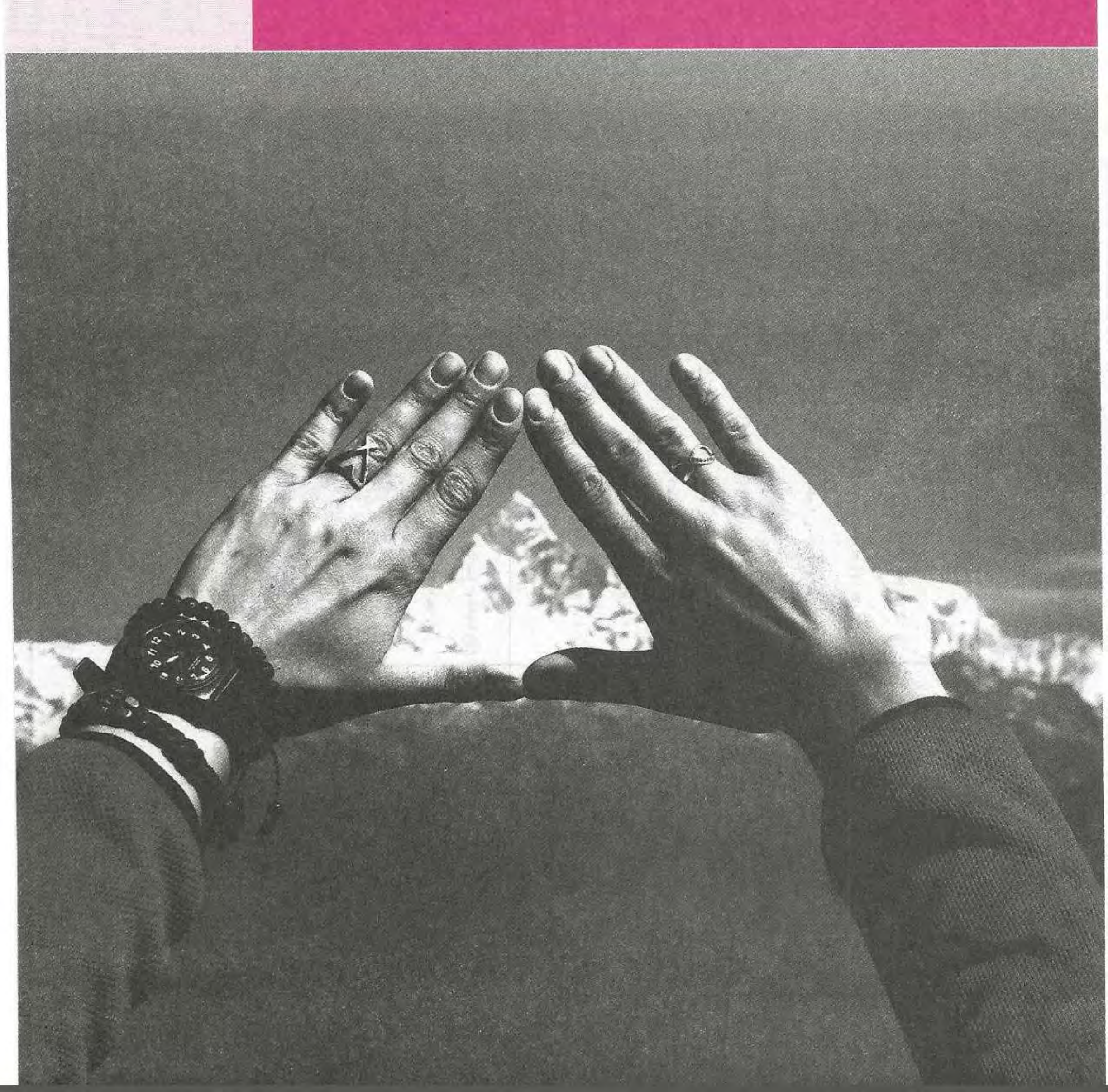
، ∵ ك (٤) = -٦ ، نها (س ← ٤) ك (س) = -١٤

∴ ك (٤) ≠ نها (س ← ٤) ك (س)

∴ ك غير متصلة عند س = ٤

إجابات تمارين الوحدة الرابعة

حساب المثلثات



إجابات الوحدة الرابعة

إجابات تمارين 19

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)	(٢) (جـ)	(٣) (أ)	(٤) (أ)
(٥) (د)	(٦) (أ)	(٧) (جـ)	(٨) (أ)
(٩) (ب)	(١٠) (أ)	(١١) (ب)	(١٢) (جـ)
(١٣) (أ)	(١٤) (ب)	(١٥) (ب)	(١٦) (ب)
(١٧) (جـ)	(١٨) (أ)	(١٩) (أ)	(٢٠) (ب)
(٢١) (جـ)	(٢٢) (جـ)	(٢٣) (ب)	(٢٤) (جـ)
(٢٥) (د)	(٢٦) (أ)	(٢٧) (ب)	(٢٨) (د)
(٢٩) (د)	(٣٠) (جـ)	(٣١) (ب)	(٣٢) (ب)
(٣٣) (د)	(٣٤) (ب)	(٣٥) (د)	(٣٦) (أ)
(٣٧) (د)	(٣٨) (أ)	(٣٩) (جـ)	(٤٠) (ب)
(٤١) (جـ)	(٤٢) (د)	(٤٣) (ب)	(٤٤) (ب)
(٤٥) (د)	(٤٦) (ب)	(٤٧) (د)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

∵ ق(∠ ع) = ١٨٠° − (٨٠° + ٦٠°) = ٤٠°

∴ $\frac{\text{سَ}}{\text{حا ٨٠°}} = \frac{\text{صَ}}{\text{حا ٦٠°}} = \frac{\text{١٠}}{\text{حا ٤٠°}}$

∴ سَ = $\frac{\text{١٠ حا ٨٠°}}{\text{حا ٤٠°}}$ ≃ ١٥ سم

، صَ = $\frac{\text{١٠ حا ٦٠°}}{\text{حا ٤٠°}}$ ≃ ١٣ سم

٢

∵ ق(∠ حـ) = ١٨٠° − (١١٢° + ٣٣°) = ٣٥°

∴ $\frac{\text{بَ}}{\text{حا ٣٣°}} = \frac{\text{١٩}}{\text{حا ٣٥°}}$

∴ بَ = $\frac{\text{١٩ حا ٣٣°}}{\text{حا ٣٥°}}$ ≃ ١٨,٠٤ سم ، ٢ نق = $\frac{\text{١٩}}{\text{حا ٣٥°}}$

∴ نق = $\frac{\text{١٩}}{\text{٢ حا ٣٥°}}$ ≃ ١٦,٥٦ سم

٣

(١) ∵ ق(∠ ل) = ١٨٠° − (١٠٠° + ٤٠°) = ٤٠°

∴ $\frac{\text{لَ}}{\text{حا ٤٠°}} = \frac{\text{٦٨,٤}}{\text{حا ١٠٠°}}$

∴ لَ = $\frac{\text{٦٨,٤ حا ٤٠°}}{\text{حا ١٠٠°}}$ ≃ ٤٤,٦٤ سم

(٢) ٢ نق = $\frac{\text{٦٨,٤}}{\text{حا ١٠٠°}}$ ∴ نق ≃ ٣٤,٧٣ سم

(٣) مساحة Δ ل م ن = $\frac{١}{٢}$ لَ مَ حا ن

= $\frac{١}{٢}$ × ٤٤,٦٤ × ٦٨,٤ حا ٤٠°

≃ ٩٨١ سم^{٢}

٤

∵ ق(∠ م) = ١٨٠° − (١٨° ٥٢َ + ١٧° ٤٤َ) = ١١٦° ٥١َ

∴ $\frac{\text{م ن}}{\text{حا ١٨° ٥٢َ}} = \frac{\text{ل م}}{\text{حا ١٧° ٤٤َ}} = \frac{\text{٣٥}}{\text{حا ١١٦° ٥١َ}}$

∴ م ن = $\frac{\text{٣٥ حا ١٨° ٥٢َ}}{\text{حا ١١٦° ٥١َ}}$ ≃ ١٢,٧ سم

، ل م = $\frac{\text{٣٥ حا ١٧° ٤٤َ}}{\text{حا ١١٦° ٥١َ}}$ ≃ ٢٧,٤ سم

، نق = $\frac{\text{٣٥}}{\text{٢ حا ١١٦° ٥١َ}}$

∴ مساحة الدائرة = $\pi \left(\frac{\text{٣٥}}{\text{٢ حا ١١٦° ٥١َ}}\right)^{٢}$

≃ ١٢٠٨,٧ سم^{٢}

٥

∵ ق(∠ ب) = ١٨٠° − (٤٠° + ٨٠°) = ٦٠°

∴ ∠ حـ أكبر الزوايا قياسًا.

∴ حَ طول أكبر الأضلاع. ∴ $\frac{\text{حَ}}{\text{حا ٨٠°}} = \frac{\text{١٠}}{\text{حا ٦٠°}}$

∴ حَ = $\frac{\text{١٠ حا ٨٠°}}{\text{حا ٦٠°}}$ ≃ ١١ سم

٦

∵ ق(∠ حـ) = ١٨٠° − (١٠٠° + ١٥°) = ٦٥°

∴ ∠ ب أصغر الزوايا قياسًا.

∴ بَ طول أصغر الأضلاع.

∴ $\frac{\text{بَ}}{\text{حا ١٥°}} = \frac{\text{٤,٥}}{\text{حا ٦٥°}}$

∴ بَ = $\frac{\text{٤,٥ حا ١٥°}}{\text{حا ٦٥°}}$ ≃ ١,٣ سم

٧

∵ نق = $\frac{\text{٧} \sqrt{\text{٣}}}{\text{٢ حا ٦٠°}}$ = ٧ سم

∴ مساحة الدائرة = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧^{٢} = ١٥٤ سم^{٢}

، محيط الدائرة = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٤٤ سم

٨

∵ ق(∠ حـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٤٥°) = ٧٥°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{حا ٦٠°}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ٤٥°}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا ٧٥°}}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{\text{بَ}}{\frac{\sqrt{٢}}{٢}} = \frac{\text{حَ}}{\frac{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}}{٤}}$

∴ أ : بَ : حَ

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$: $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$: $\frac{\sqrt{٦}+\sqrt{٢}}{٤}$ (بالضرب × ٢ $\sqrt{٢}$)

= $\sqrt{٦}$: ٢ : $\sqrt{٣}$ + ١

٩

∵ نق = $\frac{\text{١٣}}{\text{٢ حا ٨ً ٥٣°}}$ ≃ ٨,١ سم ، $\frac{\text{١٣}}{\text{حا ٨ً ٥٣°}} = \frac{\text{١٥}}{\text{حا حـ}}$

∴ حا حـ = $\frac{\text{١٥ حا ٨ً ٥٣°}}{\text{١٣}}$ (موجبة)

∴ ∠ حـ حادة أو منفرجة

∴ ق(∠ حـ) ≃ ٦٧° ٢٣ً ٩ً ، أو ١١٢° ٣٦ً ٥١ً

١٠

∵ $\frac{\text{٨}}{\text{حا ٣٥°}} = \frac{\text{٦}}{\text{حا ب}}$ ∴ حا ب = $\frac{\text{٦ حا ٣٥°}}{\text{٨}}$

∴ ق(∠ ب) ≃ ٢٥° ٢٨ً ٤٥ً والحل الآخر مرفوض.

١١

∵ ق(∠ حـ) = ١٨٠° − (٥٧° ١٣ً + ٦٤° ١٨ً) = ٥٨° ٢٩ً

، ∵ $\frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}} = \frac{\text{أ + بَ + حَ}}{\text{حا أ + حا ب + حا حـ}}$

∴ $\frac{\text{٨,٧}}{\text{حا ٥٨° ٢٩ً}} = \frac{\text{محيط Δ أ ب حـ}}{\text{حا ٥٧° ١٣ً + حا ٥٨° ٢٩ً + حا ٦٤° ١٨ً}}$

∴ محيط Δ أ ب حـ ≃ ٢٦,٥ سم

١٢

∵ ق(∠ أ) = ١٨٠° − (٤٥° + ٦٠°) = ٧٥°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{حا ٧٥°}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ٤٥°}} = \frac{\text{حَ}}{\text{حا ٦٠°}}$ = ٤٠

∴ أ = ٤٠ حا ٧٥° ≃ ٣٨,٦ سم

، بَ = ٤٠ حا ٤٥° ≃ ٢٨,٣ سم

، حَ = ٤٠ حا ٦٠° ≃ ٣٤,٦ سم

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٣٨,٦ × ٢٨,٣ × حا ٦٠°

≃ ٤٧٣ سم^{٢}

، محيط المثلث = ٣٨,٦ + ٢٨,٣ + ٣٤,٦ ≃ ١٠٢ سم

١٣

∵ Δ أ ب حـ متساوى الساقين.

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ حـ) = ٣٠°

، ∵ $\frac{\text{حَ}}{\text{حا حـ}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{\text{حَ}}{\text{حا ٣٠°}}$ = ٢٤

∴ حَ = ٢٤ حا ٣٠° = ١٢ سم

∴ بَ = حَ = ١٢ سم

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٢ حا ١٢٠° = ٦٢,٤ سم^{٢}

١٤

∵ ق(∠ح) = ١٨٠° − (١٥° + ١٥°) = ١٥٠°

∴ أ / جا ١٥° = ب / جا ١٥° = ح / جا ١٥٠°

∴ إحدى النسب = (أ + ب + ح) / (جا ١٥° + جا ١٥° + جا ١٥٠°)

= ٢٥ / (جا ١٥° + جا ١٥° + جا ١٥٠°) ≃ ٢٤,٥٧

∴ ٢ نق ≃ ٢٤,٥٧ ∴ نق ≃ ١٢,٢٨٥ سم

∴ مساحة الدائرة = π × (١٢,٢٨٥)٢ ≃ ٤٧٤ سم٢

١٥

∵ ق(∠ح) = ١٨٠° − (٤٤° + ٦٦°) = ٧٠°

∴ أ / جا ٤٤° = ب / جا ٦٦° = ح / جا ٧٠°

= ٤٠ / (جا ٤٤° + جا ٦٦° + جا ٧٠°)

∴ أ ≃ ١٠,٩ سم ، ب ≃ ١٤,٣ سم ، ح ≃ ١٤,٨ سم

١٦

∵ ق(∠ح) = ١٨٠° − (٢٠° + ٦٠°) = ١٠٠°

∴ أ / جا ٢٠° = ١٢ / جا ١٠٠° ∴ أ = ١٢ جا ٢٠° / جا ١٠٠° ≃ ٤,٢ سم

، مساحة المثلث = ½ × ٤,٢ × ١٢ × جا ٦٠° ≃ ٢٢ سم٢

١٧

∵ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٨٢° + ٥٦°) = ٤٢°

، ∵ مساحة Δ أ ب ح = ½ أ ب جا ح

∴ ٤٥٠ = ½ أ ب جا ٥٦° ∴ ب = ٩٠٠ / (أ جا ٥٦°)

، ∵ أ / جا ٤٢° = ب / جا ٨٢° ∴ أ / جا ٤٢° = ٩٠٠ / (أ جا ٥٦° جا ٨٢°)

∴ أ٢ = ٩٠٠ جا ٤٢° / (جا ٥٦° جا ٨٢°) ∴ أ ≃ ٢٧ سم

١٨

∵ ٤٣,٢ = ½ × أ ب × ١٢ × ٠,٦

∴ أ ب = ١٢ سم

، ∵ ق(∠أ) ≃ ٣٦° ٥٢َ

∴ ق(∠ب) = ق(∠ح) = (١٨٠° − ٣٦° ٥٢َ) / ٢ = ٧١° ٣٤َ

∴ ب ح / ٠,٦ = ١٢ / جا ٧١° ٣٤َ

∴ ب ح = ١٢ جا ٣٦° ٥٢َ / جا ٧١° ٣٤َ ≃ ٧,٦ سم

١٩

∵ ٧ / جا ٦٠° = ٨ / جا ب ∴ ق(∠ب) ≃ ٨١° ٤٧َ ١٢ً

(ويرفض الحل الآخر لأن المثلث حاد الزوايا)

∴ ق(∠ح) = ١٨٠° − (٦٠° + ٨١° ٤٧َ ١٢ً) = ٣٨° ١٢َ ٤٨ً

∴ ٧ / جا ٦٠° = محيط Δ أ ب ح / (جا ٦٠° + جا ٨١° ٤٧َ ١٢ً + جا ٣٨° ١٢َ ٤٨ً)

∴ محيط Δ أ ب ح ≃ ٢٠ سم

٢٠

في المثلث أ ح ء :

∵ ق(∠أ ح ء)

= ١٨٠° − (١٨° + ٤٥° ١٥َ)

= ١١٦° ٤٥َ

∴ أ ء / جا ١١٦° ٤٥َ = ٤ / جا ١٨°

∴ أ ء = ٤ جا ١١٦° ٤٥َ / جا ١٨° ≃ ١١,٦ سم

∴ في المثلث أ ب ء : أ ب / جا ٤٥° ١٥َ = ١١,٦ / جا ٩٠°

∴ أ ب = ١١,٦ جا ٤٥° ١٥َ / جا ٩٠° ≃ ٨ سم

٢١

في المثلث س ص ع : نرسم س ل ⊥ ص ع

∵ ق(∠س) = ١٨٠° − (٣٠° + ٧٠°) = ٨٠°

∴ س ص / جا ٧٠° = ١٥ / جا ٨٠°

∴ س ص = ١٥ جا ٧٠° / جا ٨٠°

≃ ١٤,٣١ سم

∴ في المثلث س ص ل : س ل / جا ٣٠° = ١٤,٣ / جا ٩٠°

∴ س ل = ١٤,٣١ جا ٣٠° / جا ٩٠° ≃ ٧,١٦ سم

٢٢

∵ ظا أ = ١ / (٢√٢)

∴ جا أ = ⅓ ∴ ٨ / ⅓ = ٢٠ / جا ح

∴ جا ح ≃ ٠,٨٣

∴ ق(∠ح) ≃ ٥٦° ٢٧َ أ، ١٢٣° ٣٣َ

، ∵ ∠ح منفرجة. ∴ ق(∠ح) ≃ ١٢٣° ٣٣َ

٢٣

∵ ظا ح = ٤ / ٣ ∴ ق(∠ح) ≃ ٥٣° ٧َ ٤٨ً

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٥٣° ٧َ ٤٨ً) = ٩٦° ٥٢َ ١٢ً

∴ أ / جا ٩٦° ٥٢َ ١٢ً = ٥ / جا ٣٠° = ح / جا ٥٣° ٧َ ٤٨ً

∴ أ = ٥ جا ٩٦° ٥٢َ ١٢ً / جا ٣٠° ≃ ١٠ سم

، ح = ٥ جا ٥٣° ٧َ ٤٨ً / جا ٣٠° ≃ ٨ سم

، مساحة Δ أ ب ح = ½ أ ح جا ب

= ½ × ١٠ × ٨ × جا ٣٠°

= ٢٠ سم٢

٢٤

∵ (س + ص + ع) / (جا س + جا ص + جا ع) = ٢ نق

∴ نق = ٥٦,٨٨ / (٢ × ٢,٣٧) = ١٢ سم

٢٥

∵ أ / جا ٦٠° = ب / جا ٤٥° = (أ + ب) / (جا ٦٠° + جا ٤٥°)

∴ أ / جا ٦٠° = ب / جا ٤٥° = (√٦ + ٢) / (جا ٦٠° + جا ٤٥°)

∴ أ = √٦ سم ، ب = ٢ سم

٢٦

∵ جا أ : جا ب : جا ح = ٢ : ٤ : ٥

∴ أ : ب : ح = ٢ : ٤ : ٥

∴ أ = ٢ ك ، ب = ٤ ك ، ح = ٥ ك

، ∵ ح − ب = ٥ ك − ٤ ك = ك = ٣

∴ أ = ٦ سم ، ب = ١٢ سم

٢٧

∵ ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠ح) = ٣ : ٤ : ٣

∴ ق(∠أ) = ٣ ك ، ق(∠ب) = ٤ ك ، ق(∠ح) = ٣ ك

∵ ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠ح) = ١٨٠°

∴ ٣ ك + ٤ ك + ٣ ك = ١٨٠° ∴ ك = ١٨°

∴ ٥ / جا ٥٤° = ب / جا ٧٢° = ح / جا ٥٤°

= محيط Δ أ ب ح / (جا ٥٤° + جا ٧٢° + جا ٥٤°)

∴ محيط Δ أ ب ح ≃ ١٥,٩ سم

٢٨

∵ ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠ح) = ١٨٠°

∴ ك + ٣ ك + ٥ ك = ١٨٠° ∴ ك = ٢٠°

∴ أ / حا ٢٠° = ب / حا ٦٠° = ح / حا ١٠٠°

= ١٦ / (حا ٢٠° + حا ٦٠° + حا ١٠٠°)

∵ ∠أ أصغر الزوايا قياسًا.

∴ أ أصغر الأضلاع طولاً. ∴ أ = ٢,٥ سم

٢٩

∵ ق(∠أ) + ٣/٢ ق(∠أ) + ٢ ق(∠أ) = ١٨٠°

∴ ق(∠أ) = ٤٠°، ق(∠ب) = ٦٠°، ق(∠ح) = ٨٠°

، ∵ أ / حا ٤٠° = ب / حا ٦٠° = ح / حا ٨٠° = ٢٠

∴ أ = ٢٠ حا ٤٠°، ب = ٢٠ حا ٦٠°

∴ مساحة Δ أ ب ح

= ١/٢ × ٢٠ حا ٤٠° × ٢٠ حا ٦٠° × حا ٨٠° ≃ ١١٠ سم²

٣٠

∴ حا أ / ٢ = حا ب / ٣ = حا ح / ٤ بالقسمة على ١٢

وبوضع أ = ٢ ك، ب = ٣ ك، ح = ٤ ك

∴ ٢ ك + ٣ ك + ٤ ك = ٤٥ ∴ ك = ٥

∴ أ = ١٠ سم، ح = ٢٠ سم

٣١

من خواص التناسب نجد أن:

(أ+ب−ح+أ+ح−ب) / (٣+٥) = (أ+ح−ب+ب+ح−أ) / (٥+٧)

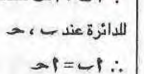
= (أ+ب−ح+ب+ح−أ) / (٣+٧)

∴ ٢أ / ٨ = ٢ح / ١٢ = ٢ب / ١٠ ∴ أ / ٤ = ح / ٦ = ب / ٥

∴ أ : ب : ح = ٤ : ٥ : ٦

∴ حا أ : حا ب : حا ح = ٤ : ٥ : ٦

٣٢



∵ أب، أح قطعتان مماستان للدائرة عند ب، ح

∴ أب = أح

، ∵ ق(∠أ) = ٦٠°

∴ Δ أ ب ح مثلث متساوي الأضلاع.

، ∵ مساحة المثلث = ١/٢ أب × أح × حا (∠أ)

∴ ٩√٣ = ١/٢ × (أب)² × حا ٦٠°

∴ ٩√٣ = √٣/٤ × (أب)²

∴ أب = ٦ سم ∴ ب ح = ٦ سم

، ∵ ق(∠ء) = ق(∠ب ح أ) = ٦٠°

(محيطية ومماسية مشتركتان في ب ح⌒)

∴ ق(∠ب ح ء) = ١٨٠° − (٨٥° + ٦٠°) = ٣٥°

∴ في Δ ب ح ء: ب ء / حا ٣٥° = ء ح / حا ٨٥° = ٦ / حا ٦٠°

∴ ب ء = ٦ حا ٣٥° / حا ٦٠° ≃ ٤ سم

، ء ح = ٦ حا ٨٥° / حا ٦٠° ≃ ٧ سم

∴ محيط المثلث ء ب ح = ٦ + ٤ + ٧ = ١٧ سم

٣٣

في Δ أ ب ح:

ق(∠ح) = ١/٢ ق(∠أ م ب) = ٤٠°

، ق(∠أ ب ح) = ١٨٠° − (٤٠° + ٨٥°) = ٥٥°

∴ ٥ / حا ٤٠° = ب / حا ٥٥° = أ / حا ٨٥° = ٢ نق

= محيط Δ أ ب ح / (حا ٤٠° + حا ٥٥° + حا ٨٥°)

∴ محيط Δ أ ب ح ≃ ١٩,١٢ سم، نق ≃ ٣,٨٩ سم

∴ مساحة الدائرة = π نق² = π (٣,٨٩)²

≃ ٤٧,٥ سم²

٣٤

∵ أ ب ح ء متوازي أضلاع.

∴ ق(∠ح) = ٥٠°

في Δ ب ء ح:

ق(∠ب ء ح) = ١٨٠° − (٥٠° + ٧٠°) = ٦٠°

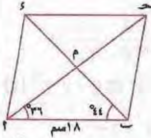
∴ ٨ / حا ٥٠° = ب ح / حا ٦٠° = ء ح / حا ٧٠°

∴ ب ح ≃ ٩ سم، ء ح ≃ ٩,٨ سم

∴ محيط متوازي الأضلاع = ٢ (ب ح + ح ء)

≃ ٣٨ سم

٣٥



في Δ أ ب م: ق(∠أ م ب)

= ١٨٠° − (٤٤° + ٣٦°)

= ١٠٠°

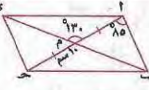
∴ ١٨ / حا ١٠٠° = أ م / حا ٤٤° ∴ أ م = ١٨ × حا ٤٤° / حا ١٠٠°

∴ أ ح = ٢ (أ م) ≃ ٢٥,٣٩ سم

، مساحة ▱ أ ب ح ء = ٢ × ١/٢ × ١٨ × ٢٥,٣٩ حا ٣٦°

≃ ٢٦٩ سم²

٣٦



في Δ أ ب م:

ق(∠م) = ٥٠°

، ق(∠ب) = ١٨٠° − (٨٥° + ٥٠°) = ٤٥°

∴ ١٠ / حا ٤٥° = ب م / حا ٨٥°

∴ ب م = ١٠ حا ٨٥° / حا ٤٥° ≃ ١٤,١ سم

∴ ب ء = ٢ ب م = ٢٨,٢ سم

، مساحة متوازي الأضلاع أ ب ح ء

= ٤ × ١/٢ × ١٠ × ١٤,١ حا ٥٠° ≃ ٢١٦ سم²

٣٧

∵ أء // ب ح

∴ ق(∠أ ء ح)

+ ق(∠ء ح ب) = ١٨٠°

∴ ق(∠ء ح ب) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

∴ ق(∠ء ح أ) = ٦٠° − ٢٣° ٢٥′ = ٣٦° ٣٥′

∴ في المثلث أ ء ح: ٢٠ / حا ٣٦° ٣٥′ = أ ح / حا ١٢٠°

∴ أ ح = ٢٠ حا ١٢٠° / حا ٣٦° ٣٥′ ≃ ٢٩ سم

، في المثلث أ ب ح:

∵ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٦٢° + ٢٣° ٢٥′) = ٩٤° ٣٥′

∴ ٢٩ / حا ٦٢° = ب ح / حا ٩٤° ٣٥′

∴ ب ح = ٢٩ حا ٩٤° ٣٥′ / حا ٦٢° ≃ ٣٣ سم

∴ مساحة شبه المنحرف = ١/٢ أ ح × ب ح × حا ٢٣° ٢٥′

+ ١/٢ أ ح × أ ء × حا ٢٣° ٢٥′

= ١/٢ × ٢٩ (٣٣ + ٢٠) حا ٢٣° ٢٥′

≃ ٣٠٥ سم²

٣٨

في Δ ب ء ح

ق(∠ء ب ح) = ١٨٠° − (٣٢° + ٨٥°)

= ٦٣°

∴ ب ء / حا ٨٥° = ١٠٠ / حا ٦٣°

∴ ب ء = ١٠٠ حا ٨٥° / حا ٦٣° ≃ ١١٢ سم

، في Δ أ ء ح:

ق(∠ء أ ح) = ١٨٠° − (٤٩° + ٨٧°) = ٤٤°

∴ أ ح / حا ٨٧° = ١٠٠ / حا ٤٤°

∴ أ ح = ١٠٠ حا ٨٧° / حا ٤٤° ≃ ١٤٤ سم

٣٩

في المثلث أ ب ء :

∵ أ ب = أ ء

∴ ق(∠ أ ب ء)

= ق(∠ ء ب أ) = $\frac{١٨٠° - ٨٠°}{٢}$ = ٥٠°

∴ $\frac{١٠}{\text{جا } ٥٠°} = \frac{\text{ب ء}}{\text{جا } ٨٠°}$

∴ ب ء = $\frac{\text{١٠ جا } ٨٠°}{\text{جا } ٥٠°}$ ≃ ١٢,٨٦ سم

، ∵ ق(∠ أ ب ح) = ٩٠°

∴ ق(∠ ء ب ح) = ٩٠° − ٥٠° = ٤٠°

∴ مساحة Δ أ ب ء = ½ × ١٠ × ١٠ × جا ٨٠° ≃ ٤٩ سم²

، مساحة Δ ء ب ح = ½ × ١٢,٨٦ × ١٢,٨٦ × جا ٤٠°

≃ ٥٣ سم²

∴ مساحة الشكل أ ب ح ء = ٤٩ + ٥٣ = ١٠٢ سم²

٤٠

① ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{جا ح}}$

بضرب النسبة الأولى × ٣ والثانية × ٤ وبالطرح :

∴ $\frac{\text{٣أ − ٤ب}}{\text{٣ جا أ − ٤ جا ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{جا ح}}$

② ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}}$ ∴ ب = $\frac{\text{أ جا ب}}{\text{جا أ}}$

∴ مساحة المثلث = ½ أ ب جا ح = $\frac{\text{أ}^٢ \text{ جا ب جا ح}}{\text{٢ جا أ}}$

③ ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{جا ح}}$ = ٢ نق

∴ جا ح = $\frac{\text{ح}}{\text{٢ نق}}$

∴ مساحة المثلث = ½ أ ب × $\frac{\text{ح}}{\text{٢ نق}} = \frac{\text{أ ب ح}}{\text{٤ نق}}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (د) ② (ج) ③ (ج) ④ (ب)

⑤ (د) ⑥ (ج) ⑦ (د) ⑧ (ب)

⑨ (ج) ⑩ (ب) ⑪ (ج)

إرشادات لحل رقم ١

① ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{جا ح}}$ = ٢ نق = ٦

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} \times \frac{\text{ح}}{\text{جا ح}}$ = ٦ × ٦ × ٦

∴ $\frac{\text{أ ب ح}}{\text{جا أ جا ب جا ح}}$ = ٢١٦

② ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{جا ح}}$ = ٢ نق

∴ أ قتا أ = ب قتا ب = ح قتا ح = ٢ نق

∴ أ قتا أ + ب قتا ب + ح قتا ح = ٦ نق

③ ∵ $\frac{\text{أ + ب + ح}}{\text{جا أ + جا ب + جا ح}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{جا ب + جا ح + جا أ}}{\text{جا أ + جا ب + جا ح}}$ = ٢ نق

∴ ٢ نق = ١ ∴ نق = ½

∴ محيط الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ح

= ٢ π نق = ٢ × π × ½ = π

④ ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{جا ح}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{جا أ}}{\text{أ}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{جا ح}}{\text{ح}} = \frac{١}{\text{٢ نق}}$

وبضرب مقدمات وتوالى النسبة الأولى × أ

، النسبة الثانية × ب ، النسبة الثالثة × ح

وجمع المقدمات والتوالى

∴ $\frac{\text{أ جا أ + ب جا ب + ح جا ح}}{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ + \text{ح}^٢} = \frac{١}{\text{٢ نق}}$

⑤ ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{جا ح}}$ = ١٠

∴ أ = ١٠ جا أ ، ب = ١٠ جا ب

، ∵ مساحة Δ أ ب ح = ٢٤

∴ ½ أ ب جا ح = ٢٤

∴ ½ × ١٠ جا أ × ١٠ جا ب × جا ح = ٢٤

∴ جا أ جا ب جا ح = $\frac{٢٤}{٥٠} = \frac{١٢}{٢٥}$

∴ جا أ جا ب جا (١٨٠ − (أ + ب)) = $\frac{١٢}{٢٥}$

∴ جا أ جا ب جا (أ + ب) = $\frac{١٢}{٢٥}$

⑥ ∵ ب ح = $\sqrt{(٦)^٢ + (٨)^٢}$ = ١٠ سم

∴ ب ء = ٤ سم

في Δ أ ب ء : $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا } \theta} = \frac{\text{أ ء}}{\text{جا ب}}$

∴ $\frac{٤}{\text{جا } \theta} = \frac{\text{أ ء}}{٠,٦}$ ∴ أ ء جا θ = ٢,٤ (١)

في Δ أ ء ح : $\frac{\text{ء ح}}{\text{جا } (٩٠ - \theta)} = \frac{\text{أ ء}}{\text{جا ح}}$

∴ $\frac{٦}{\text{جتا } \theta} = \frac{\text{أ ء}}{٠,٨}$ ∴ أ ء جتا θ = ٤,٨ (٢)

بقسمة (٢) على (١) : ∴ $\frac{\text{جتا } \theta}{\text{جا } \theta} = \frac{٤,٨}{٢,٤}$

∴ ظتا θ = ٢

⑦ ∵ ح ء = ٢ ء ب

∴ مساحة Δ أ ح ء = ٢ مساحة Δ أ ب ء

½ × ٢ ء ب × أ ح × جا ٦٠°

= ٢ × ½ × أ ب × ء ب جا ٤٥°

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)}{\left(٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)} = \frac{\sqrt{٦}}{٤}$

، ∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}} = \frac{\text{جا ح}}{\text{جا ب}}$ ∴ $\frac{\text{جا ب}}{\text{جا ح}} = \frac{٤}{\sqrt{٦}} = \frac{٢\sqrt{٦}}{٣}$

⑧ في Δ أ ب ء : ∵ $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{جا } ٤٥°}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا أ}} = \frac{٤\sqrt{٢}}{\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)}$ = ٨

في Δ ب ء ح : ∵ $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا ح}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{جا } ٣٠°}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا ح}}$ = ٢ ب ح ، ∵ جا أ = جا ح

∴ ٢ ب ح = ٨ ∴ ب ح = ٤ سم

⑨ في Δ ح ء هـ : ∵ ظا (∠ ء هـ ح) = $\frac{٣}{٤}$

∴ جا ح = $\frac{٤}{٥}$

، في Δ أ ب ح : ∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا ح}}$ = ٢ نق

∴ ٢ نق = $\frac{٦}{\left(\frac{٤}{٥}\right)}$ ∴ نق = ٣,٧٥ سم

⑩ في Δ أ ب ء :

$\frac{\text{ب ء}}{\text{جا } ٦٠°} = \frac{٨}{\text{جا } (\text{∠ أ ء ب})}$

∴ ب ء × جا (∠ أ ء ب)

= ٨ جا ٦٠° = ٤√٣ (١)

في Δ أ ء ح : $\frac{\text{ء ح}}{\text{جا } \theta} = \frac{١٢}{\text{جا } (\text{∠ أ ء ح})}$

∴ ء ح × جا (∠ أ ء ح) = ١٢ جا θ (٢)

من (١) ، (٢) :

، ∵ ب ء = ء ح

، جا (∠ أ ء ب)

= جا (∠ أ ء ح)

∴ ١٢ جا θ = ٤√٣ ∴ جا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ ظا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ ظا (∠ ء أ ح) = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(١١) في $\triangle$ أ ب حـ :

$$\because \frac{\text{أ ب}}{\text{حا } ٧٠^\circ} = \frac{٦}{\text{حا } ٤٠^\circ} = ٢ \text{ نق}$$

$\therefore$ أ ب $\simeq ٨,٧٧$ سم ، نق $\simeq ٤,٦٦٧$ سم

$\therefore$ مساحة الجزء المظلل

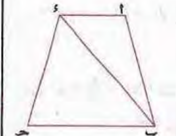
= مساحة الدائرة − مساحة المثلث أ ب حـ

$$= \pi \text{ نق}^٢ - \frac{١}{٢} \text{ أ حـ حا ب}$$

$$= \pi \times (٤,٦٧)^٢ - \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٨,٧٧ \times \text{حا } ٧٠^\circ$$

$\simeq ٤٣,٧$ سم^٢

٢



في المثلث أ ب ء :

$$\frac{\text{أ ء}}{\text{حا}(\angle \text{أ ب ء})} = \frac{\text{ب ء}}{\text{حا أ}}$$

، من $\triangle$ ء ب حـ :

$$\frac{\text{ب حـ}}{\text{حا}(\angle \text{ب ء حـ})} = \frac{\text{ب ء}}{\text{حا حـ}}$$

، $\because \angle$ أ ، $\angle$ حـ متكاملتان «لأن أ ب حـ ء رباعي دائري»

$\therefore$ حا أ = حا حـ $\quad \therefore \dfrac{\text{أ ء}}{\text{حا}(\angle \text{أ ب ء})} = \dfrac{\text{ب حـ}}{\text{حا}(\angle \text{ب ء حـ})}$

$\therefore$ أ ء × حا $(\angle$ ب ء حـ$)$ = ب حـ × حا $(\angle$ أ ب ء$)$

٣

$$(١) \because \frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{حا حـ}}$$

$$\therefore \frac{\text{أ + ب + حـ}}{\text{حا أ + حا ب + حا حـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{حا أ}}$$

$$\therefore \text{حا أ + حا ب + حا حـ} = \frac{٢ \text{ ع حا أ}}{\text{أ}}$$

$$= \frac{٢ \text{ ع حا أ} \times \text{ب حـ}}{\text{أ ب حـ}}$$

$$، \because \triangle = \frac{١}{٢} \text{ ب حـ حا أ}$$

$$\therefore \text{ب حـ حا أ} = ٢ \triangle$$

$$\therefore \text{حا أ + حا ب + حا حـ} = \frac{٢ \text{ ع} \times ٢ \triangle}{\text{أ ب حـ}} = \frac{٤ \text{ ع} \triangle}{\text{أ ب حـ}}$$

$$(٢) \because \frac{١}{\text{حـ حا أ}} = \frac{\frac{١}{٢} \text{ ب}}{\frac{١}{٢} \text{ ب حـ حا أ}}$$

$$، \frac{١}{\text{أ حا ب}} = \frac{\frac{١}{٢} \text{ حـ}}{\frac{١}{٢} \text{ أ حـ حا ب}}$$

$$، \frac{١}{\text{ب حا حـ}} = \frac{\frac{١}{٢} \text{ أ}}{\frac{١}{٢} \text{ ب أ حا حـ}}$$

$$\text{وبالجمع : } \therefore \frac{١}{\text{حـ حا أ}} + \frac{١}{\text{أ حا ب}} + \frac{١}{\text{ب حا حـ}}$$

$$= \frac{\frac{١}{٢} \text{ ب}}{\frac{١}{٢} \text{ ب حـ حا أ}} + \frac{\frac{١}{٢} \text{ حـ}}{\frac{١}{٢} \text{ أ حـ حا ب}} + \frac{\frac{١}{٢} \text{ أ}}{\frac{١}{٢} \text{ ب أ حا حـ}}$$

$$= \frac{\frac{١}{٢} (\text{ب + حـ + أ})}{\triangle} = \frac{\text{ع}}{\triangle}$$

٤

$\because$ مساحة الدائرة $= \pi$ نق^٢ ، نق $= \dfrac{\text{أ}}{٢ \text{ حا أ}} = \dfrac{\text{ب}}{٢ \text{ حا ب}}$

وبالتعويض

$$\therefore \text{مساحة الدائرة} = \frac{\pi \text{ أ ب}}{٤ \text{ حا أ حا ب}}$$

إجابات تمارين 20

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)	(٢) (أ)	(٣) (ب)	(٤) (ب)
(٥) (د)	(٦) (أ)	(٧) (أ)	(٨) (جـ)
(٩) (أ)	(١٠) (ب)	(١١) (ب)	(١٢) (د)
(١٣) (د)	(١٤) (د)	(١٥) (ب)	(١٦) (أ)
(١٧) (ب)	(١٨) (جـ)	(١٩) (د)	(٢٠) (ب)
(٢١) (جـ)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (د)
(٢٥) (ب)	(٢٦) (د)	(٢٧) (جـ)	(٢٨) (ب)
(٢٩) (ب)	(٣٠) (ب)	(٣١) (ب)	(٣٢) (ب)
(٣٣) (جـ)	(٣٤) (ب)	(٣٥) (أ)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

$$\because \text{ع}^٢ = (١٣)^٢ + (١٦)^٢ - ٢ \times ١٣ \times ١٦ \text{ حتا } ٩٥^\circ \simeq ٤٦١,٢٦$$

$\therefore$ ع $\simeq ٢١,٥$ سم

٢

$$\because \text{ب}^٢ = (٣)^٢ + (٥)^٢ - ٢ \times ٣ \times ٥ \text{ حتا } ٣٦^\circ\, ٤١' \simeq ٩,٨$$

$\therefore$ ب $\simeq ٣$ سم

٣

$$\because \text{حتا أ} = \frac{(٥,٨)^٢ + (٣,٤)^٢ - (٧,٦)^٢}{٢ (٥,٨) (٣,٤)}$$

$\therefore$ ق $(\angle$ أ$) \simeq ١٠٨^\circ\, ٣٤'$

$$، \text{حتا ب} = \frac{(٧,٦)^٢ + (٣,٤)^٢ - (٥,٨)^٢}{٢ (٧,٦) (٣,٤)}$$

$\therefore$ ق $(\angle$ ب$) \simeq ٤٦^\circ\, ٢٠'$

$\therefore$ ق $(\angle$ حـ$) = ١٨٠^\circ - (١٠٨^\circ\, ٣٤' + ٤٦^\circ\, ٢٠') = ٢٥^\circ\, ٦'$

٤

$$\because \text{حتا ب} = \frac{(١٣)^٢ + (١٥)^٢ - (١٤)^٢}{٢ (١٣) (١٥)}$$

$\therefore$ ق $(\angle$ ب$) \simeq ٥٩^\circ\, ٢٩'$

$\therefore$ مساحة $\triangle$ أ ب حـ $= \frac{١}{٢} \times ١٣ \times ١٥ \times$ حا $٥٩^\circ\, ٢٩'$

$\simeq ٨٤$ سم^٢

٥

$\because$ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع

$$\therefore \text{حتا س} = \frac{(٢٧)^٢ + (٢٤)^٢ - (١٨)^٢}{٢ \times ٢٧ \times ٢٤}$$

$\therefore$ ق $(\angle$ س$) \simeq ٤٠^\circ\, ٤٨'$

$$، \because \text{نق} = \frac{١٨}{٢ \text{ حا } ٤٠^\circ\, ٤٨'}$$

$$\therefore \text{مساحة الدائرة} = \pi \left(\frac{١٨}{٢ \text{ حا } ٤٠^\circ\, ٤٨'} \right)^٢ \simeq ٥٩٦ \text{ سم}^٢$$

٦

$$(١) \text{ حـ}^٢ = (٧)^٢ + (٩)^٢ - ٢ (٧) (٩) \text{ حتا } ٩٦^\circ\, ٢٣' \simeq ١٤٤$$

$\therefore$ حـ $\simeq ١٢$ سم

(٢) مساحة $\triangle$ أ ب حـ

$= \frac{١}{٢} \times ٧ \times ٩ \times$ حا $٩٦^\circ\, ٢٣' \simeq ٣١$ سم^٢

$$(٣) \text{ نق} = \frac{\text{حـ}}{٢ \text{ حا حـ}} = \frac{١٢}{٢ \text{ حا } (٩٦^\circ\, ٢٣')} \simeq ٦ \text{ سم}$$

٧

حـ $= ٥٢ - (١٣ + ١٧) = ٢٢$ سم

$\because$ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع

$$\therefore \text{حتا حـ} = \frac{(١٣)^٢ + (١٧)^٢ - (٢٢)^٢}{٢ (١٣) (١٧)}$$

$\therefore$ ق $(\angle$ حـ$) \simeq ٩٣^\circ\, ٢٢'$

، مساحة $\triangle$ أ ب حـ $= \frac{١}{٢} \times ١٣ \times ١٧ \times$ حا $٩٣^\circ\, ٢٢'$

$\simeq ١١٠$ سم^٢

٨

$\because$ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع.

$$\therefore \text{حتا س} = \frac{(١٨)^٢ + (١٠)^٢ - (٢٤,٥)^٢}{٢ \times ١٨ \times ١٠}$$

$\therefore$ ق $(\angle$ س$) \simeq ١١٩^\circ\, ١٩'$

$$، \because \text{نق} = \frac{٢٤,٥}{٢ \text{ حا } ١١٩^\circ\, ١٩'} \simeq ١٤ \text{ سم}$$

$\therefore$ محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع

$= ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٤ = ٨٨$ سم

٩

بفرض أن س = ٤ ك ، ص = ٥ ك ، ع = ٦ ك

، $\because$ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع.

$$\therefore \text{حتا س} = \frac{٢٥ \text{ ك}^٢ + ٣٦ \text{ ك}^٢ - ١٦ \text{ ك}^٢}{٢ \times ٥ \text{ ك} \times ٦ \text{ ك}} = \frac{٣}{٤}$$

$\therefore$ ق $(\angle$ س$) \simeq ٤١^\circ\, ٢٥'$

١٠

∵ س : ص : ع = حاس : حاص : حاع = ٧ : ٨ : ١٢

وبفرض أن : س = ٧ ك ، ص = ٨ ك ، ع = ١٢ ك

، ∵ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع.

∴ حتا ع = ((٧ك)^٢ + (٨ك)^٢ − (١٢ك)^٢) / (٢ × ٧ك × ٨ك) = −٣١ / ١١٢

∴ ق(∠ع) ≃ ١٠٦° ٤َ

١١

∵ حـ^٢ = (٤)^٢ + (٥)^٢ − ٢ × ٤ × ٥ × ١/٢ = ٦١

∴ حـ ≃ ٧,٨ سم

، ∵ حتا حـ = −١/٢ ∴ ق(∠حـ) = ١٢٠°

∴ مساحة المثلث = ١/٢ × ٤ × ٥ × حا ١٢٠° = ٥√٣ سم^٢

١٢

∵ طاب = ٣/٤ ∴ حاب = ٣/٥ ، حتاب = ٤/٥

∴ مساحة Δ أب حـ = ١/٢ × ١٦ × ١٨ × ٣/٥

= ٨٦,٤ سم^٢

، ب^٢ = (١٦)^٢ + (١٨)^٢ − ٢ × ١٦ × ١٨ × ٤/٥ = ١١٩,٢

∴ ب ≃ ١١ سم

∴ محيط Δ أب حـ = ١٦ + ١٨ + ١١ = ٤٥ سم

١٣

بالقسمة على ١٢ ∴ حاأ / ٦ = حاب / ٤ = حاحـ / ٣

∴ أ : ب : حـ = ٦ : ٤ : ٣

، بفرض أن : أ = ٦ ك ، ب = ٤ ك ، حـ = ٣ ك

، ∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع

∴ حتا حـ = ((٦ك)^٢ + (٤ك)^٢ − (٣ك)^٢) / (٢ × ٦ك × ٤ك) = ٤٣ / ٤٨

∴ ق(∠حـ) ≃ ٢٦° ٢٣َ

١٤

∵ أ : ب : حـ = ٣ : ٤ : ٥

، وبفرض أن : أ = ٣ ك ، ب = ٤ ك ، حـ = ٥ ك

∴ حتا حـ = ((٣ك)^٢ + (٤ك)^٢ − (٥ك)^٢) / (٢ × ٣ك × ٤ك) = ٠

∴ ق(∠حـ) = ٩٠°

∵ ٣ك + ٤ك + ٥ك = ٢٤ ∴ ك = ٢

∴ أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم ، حـ = ١٠ سم

، مساحة Δ أب حـ = ١/٢ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم^٢

١٥

في المثلث أب حـ :

∵ ٨ / حا ٦٠° = أحـ / حا ٧٥°

∴ أحـ = ٨ حا ٧٥° / حا ٦٠° ≃ ٨,٩٢ سم

، ∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٧٥°) = ٤٥°

∴ (أء)^٢ = (٨,٩٢)^٢ + (٤)^٢ − ٢ × ٨,٩٢ × ٤ × حتا ٤٥°

≃ ٤٥

∴ أء ≃ ٦,٧ سم

١٦

في المثلث أب حـ :

∵ حتاب = ((٨)^٢ + (٩)^٢ − (٧)^٢) / (٢ × ٨ × ٩)

= ٢/٣

∴ ق(∠ب) ≃ ٤٨° ١١َ

∴ في المثلث أب ء :

(أء)^٢ = (٩)^٢ + (٤)^٢ − ٢ × ٩ × ٤ × حتا ٤٨° ١١َ ≃ ٤٩

∴ أء ≃ ٧ سم ، نق = ٧ / (٢ حا ٤٨° ١١َ) ≃ ٤,٧ سم

١٧

∵ (أب)^٢

= (٨)^٢ + (١٠)^٢ − ٢ × ٨ × ١٠ × حتا ٥٠°

∴ أب ≃ ٨ سم

في المثلث أ م ء :

∵ ق(∠أ م ء) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠°

∴ (أء)^٢ = (٨)^٢ + (١٠)^٢ − ٢ × ٨ × ١٠ × حتا ١٣٠°

∴ أء ≃ ١٦ سم

١٨

في Δ أب حـ :

∵ حتاب

= ((٩)^٢ + (١٣)^٢ − (٢٠)^٢) / (٢ (٩) (١٣))

∴ ق(∠ب) ≃ ١٢٩° ٥٢َ

∴ ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° − ١٢٩° ٥٢َ ≃ ٥٠° ٨َ

في Δ أب ء :

(ب ء)^٢ = (٩)^٢ + (١٣)^٢ − ٢ (٩) (١٣) × حتا ٥٠° ٨َ

∴ ب ء ≃ ١٠ سم

١٩

نفرض أن أب = ٢ س

، ب حـ = ٣ س

، نصف محيط متوازي الأضلاع = ١٠ سم

∵ ٢ س + ٣ س = ١٠ ∴ س = ٢ سم

∴ أب = ٤ سم ، ب حـ = ٦ سم

في Δ أب ء : ∵ حتا أ = ((٤)^٢ + (٦)^٢ − (٨)^٢) / (٢ (٤) (٦))

∴ ق(∠أ) ≃ ١٠٤° ٢٩َ

∴ ق(∠أ ب حـ) = ١٨٠° − ١٠٤° ٢٩َ = ٧٥° ٣١َ

∴ (أحـ)^٢ = (٤)^٢ + (٦)^٢ − ٢ (٤) (٦) حتا ٧٥° ٣١َ

∴ أحـ ≃ ٦,٣ سم

٢٠

نصف محيط متوازي الأضلاع = ٢٢ سم

بفرض أن : أب = س

∴ أء = ٢٢ − س

∴ في Δ أب ء :

∴ (ب ء)^٢ = (س)^٢ + (٢٢ − س)^٢

− ٢ س (٢٢ − س) حتا ٦٠°

∴ ١٩٦ = ٣ س^٢ − ٦٦ س + ٤٨٤

∴ ٣ س^٢ − ٦٦ س + ٢٨٨ = ٠

∴ س^٢ − ٢٢ س + ٩٦ = ٠

∴ (س − ٦) (س − ١٦) = ٠ ∴ س = ٦

∴ أب = ٦ سم ، أء = ١٦ سم

∴ ٦ / حا(∠أ ء ب) = ١٤ / حا ٦٠°

∴ حا(∠أ ء ب) = ٦ حا ٦٠° / ١٤

∴ ق(∠أ ء ب) ≃ ٢١° ٤٧َ

، مساحة متوازي الأضلاع أب حـ ء

= ٢ مساحة المثلث أب ء

= ٢ × ١/٢ × ٦ × ١٦ حا ٦٠° ≃ ٨٣ سم^٢

٢١

في Δ أب ء :

(ب ء)^٢ = (٣٠)^٢ + (٤٢)^٢

− ٢ × ٣٠ × ٤٢ حتا ١٠٠°

∴ ب ء ≃ ٥٥,٧ سم

، $\text{جتا}(\angle \text{أءب}) = \frac{(55.7)^2 + (42)^2 - (30)^2}{2 \times 55.7 \times 42}$

$\simeq 0.848$

، ∵ $\overline{\text{أء}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

∴ ق(∠ء ب حـ) = ق(∠أ ء ب) (بالتبادل)

∴ جتا(∠ء ب حـ) = 0.848

∴ $(\text{حـء})^2 = (55.7)^2 + (48)^2 - 2 \times 55.7 \times 48 \times 0.848$

∴ حـ ء ≃ 30 سم

22

في Δ أ ب حـ :

$\text{جتا ب} = \frac{(9)^2 + (5)^2 - (11)^2}{2 \times 9 \times 5} = -\frac{1}{6}$

، في Δ أ ء حـ :

$\text{جتا ء} = \frac{(9)^2 + (8)^2 - (11)^2}{2 \times 9 \times 8} = \frac{1}{6}$

∴ جتا ب + جتا ء = 0

∴ ق(∠ب) + ق(∠ء) = 180°

∴ الشكل رباعي دائري.

23

∵ أ ب حـ ء

شكل رباعي دائري

∴ جتا ب = − جتا ء

∴ $\frac{(9)^2 + (5)^2 - (\text{أحـ})^2}{5 \times 9 \times 2} = \frac{-(9)^2 - (8)^2 + (\text{أحـ})^2}{8 \times 9 \times 2}$

∴ $\frac{106 - (\text{أحـ})^2}{5} = \frac{-145 + (\text{أحـ})^2}{8}$

∴ $848 - 8(\text{أحـ})^2 = -725 + 5(\text{أحـ})^2$

∴ $13(\text{أحـ})^2 = 1573$ ∴ $(\text{أحـ})^2 = 121$

∴ أ حـ = 11 سم

24

في المثلث أ ب حـ :

$\text{جتا}(\angle \text{ب أ حـ}) = \frac{(6)^2 + (16)^2 - (14)^2}{2 \times 6 \times 16} = \frac{1}{2}$

، في المثلث ب حـ ء :

$\text{جتا}(\angle \text{ب ء حـ}) = \frac{(10)^2 + (16)^2 - (14)^2}{2 \times 10 \times 16} = \frac{1}{2}$

∴ ق(∠ب أ حـ) = ق(∠ب ء حـ)

∴ الشكل رباعي دائري.

25

في Δ أ ء حـ :

$\text{جتا}(\angle \text{ء أ حـ}) = \frac{(12)^2 + (18)^2 - (8)^2}{2 \times 12 \times 18} = \frac{101}{108}$

∴ ق(∠ء أ حـ) ≃ 20° 45′

، في Δ حـ أ ب :

$\text{جتا}(\angle \text{حـ أ ب}) = \frac{(27)^2 + (18)^2 - (12)^2}{2\,(27)\,(18)} = \frac{101}{108}$

∴ ق(∠ء أ حـ) = ق(∠حـ أ ب)

أي أن : $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ ينصف ∠ب أ ء

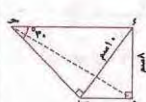
∴ مساحة الشكل أ ب حـ ء

= مساحة Δ أ ء حـ + مساحة Δ أ حـ ب

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 18 \times \text{جا } 20° 45' + \frac{1}{2} \times 18 \times 27 \times \text{جا } 20° 45'$

= 124 سم²

26



في Δ أ ء ب :

$\text{أب} = \sqrt{(10)^2 - (8)^2}$

= 6 سم

، $\text{جتا ب} = \frac{3}{5}$ ∴ ق(∠ب) ≃ 53° 8′

في Δ ء ب حـ : $\text{ءب} = \frac{1}{2}\,\text{ءحـ}$

∴ ء حـ = 20 سم ، ب حـ = $10\sqrt{3}$ سم

في Δ أ ب حـ :

ق(∠أ ب حـ) = 90° + 53° 8′ = 143° 8′

∴ $(\text{أحـ})^2 = (6)^2 + (10\sqrt{3})^2 - 2\,(6)\,(10\sqrt{3})\ \text{جتا } 143° 8'$

∴ أ حـ ≃ 22 سم

27

∵ $\text{حـَ}^2 = (3\,\text{بَ})^2 + \text{بَ}^2 - 2 \times 3\,\text{بَ} \times \text{بَ} \times \text{جتا } 60°$

$= 7\,\text{بَ}^2$

∴ $\text{حـَ} = \sqrt{7}\,\text{بَ}$

∴ $\text{جتا ب} = \frac{7\text{بَ}^2 + 9\text{بَ}^2 - \text{بَ}^2}{2 \times \sqrt{7}\,\text{بَ} \times 3\,\text{بَ}} = \frac{15}{6\sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$

∴ ق(∠ب) ≃ 19° 6′

، ∵ ق(∠أ) + ق(∠ب) = 120°

∴ ق(∠أ) ≃ 100° 54′

28

∵ $10\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 5 \times \text{حـ جا } 120°$

∴ حـَ = 8 سم

∴ $\text{بَ}^2 = (5)^2 + (8)^2 - 2 \times 5 \times 8\ \text{جتا } 120° = 129$

∴ $\text{بَ} = \sqrt{129} \simeq 11.36$ سم

∴ $\text{جتا أ} = \frac{129 + (8)^2 - (5)^2}{2 \times \sqrt{129} \times 8}$

∴ ق(∠أ) ≃ 22° 25′

29

∵ بَ : حـَ = 3 : 4

وبفرض أن : بَ = 3 ك ، حـَ = 4 ك

، ∵ مساحة Δ أ ب حـ = 64

∴ $\frac{1}{2} \times 3\,\text{ك} \times 4\,\text{ك} \times \text{جا } 30° = 64$

∴ $\text{ك} = \frac{8}{\sqrt{3}}$

∴ $\text{بَ} = \frac{24}{\sqrt{3}}$ سم ، $\text{حـَ} = \frac{32}{\sqrt{3}}$

∴ $\text{أَ}^2 = \left(\frac{32}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{24}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \times \frac{32}{\sqrt{3}} \times \frac{24}{\sqrt{3}} \times \text{جتا } 30°$

∴ أَ = 9.5 سم

∴ محيط Δ أ ب حـ ≃ 41.8 سم

30

مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أَ بَ جا حـ

∴ $20 = \frac{1}{2} \times 6 \times 10\ \text{جا حـ}$

∴ $\text{جا حـ} = \frac{2}{3}$

∴ ق(∠حـ) ≃ 138° 11′ (∠حـ منفرجة)

∴ $\text{حـَ}^2 = (6)^2 + (10)^2 - 2 \times 6 \times 10\ \text{جتا } 138° 11'$

∴ حـَ ≃ 15 سم

31

∵ $\frac{\text{جا أ}}{1} = \frac{\text{جا ب}}{1.5} = \frac{\text{جا حـ}}{2}$

∴ أَ : بَ : حـَ = 1 : 1.5 : 2

∴ أَ = ك ، بَ = 1.5 ك ، حـَ = 2 ك

، ∵ حـَ − أَ = 4 سم   ∴ 2 ك − ك = 4

∴ ك = 4

∴ أَ = 4 سم ، بَ = 6 سم ، حـَ = 8 سم

∴ $\text{جتا أ} = \frac{(6)^2 + (8)^2 - (4)^2}{2 \times 6 \times 8} = \frac{7}{8}$

∴ ق(∠أ) = 28° 57′ 18″

٣٢

∵ جا أ : جا ب : جا حـ = ٣ : ٥ : ٧

∴ أ : ب : حـ = ٣ : ٥ : ٧

وبفرض أن : أ = ٣ ك ، ب = ٥ ك ، حـ = ٧ ك

∴ جتا أ = $\frac{(\text{٥ك})^2 + (\text{٧ك})^2 - (\text{٣ك})^2}{\text{٢ × ٥ك × ٧ك}} = \frac{١٣}{١٤}$

، جتا ب = $\frac{(\text{٣ك})^2 + (\text{٧ك})^2 - (\text{٥ك})^2}{\text{٢ × ٣ك × ٧ك}} = \frac{١١}{١٤}$

، جتا حـ = $\frac{(\text{٣ك})^2 + (\text{٥ك})^2 - (\text{٧ك})^2}{\text{٢ × ٣ك × ٥ك}} = -\frac{١}{٢}$

∴ جتا أ : جتا ب : جتا حـ = $\frac{١٣}{١٤} : \frac{١١}{١٤} : \frac{-١}{٢}$ = ١٣ : ١١ : −٧

٣٣

∵ محيط Δ أ ب حـ = ٧٠ سم

، أ = ٢٦ سم

∴ ب + حـ = ٧٠ − ٢٦

= ٤٤ سم

، بفرض ب = س

∴ حـ = ٤٤ − س

∴ (٢٦)^2 = س^2 + (٤٤ − س)^2

− ٢ س (٤٤ − س) جتا ٦٠°

∴ س^2 − ٤٤ س + ٤٢٠ = ٠

∴ (س − ٣٠) (س − ١٤) = ٠

∴ س = ٣٠ أ، س = ١٤

ب حـ = ٣٠ × ١٤ = ٤٢٠

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ جا أ

= $\frac{١}{٢}$ × ٤٢٠ × جا ٦٠°

= ١٠٥ $\sqrt{٣}$ سم^2

٣٤

∵ ٢٤ = ١٢ + (٦ + حـ) + حـ

∴ حـ = ٨ سم ، ب = ١٤ سم

، ∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع وهو حـ

، ∵ جتا حـ = $\frac{(١٢)^2 + (١٤)^2 - (٨)^2}{\text{٢ × ١٢ × ١٤}} = \frac{٢٣}{٢٨}$

∴ ق(∠حـ) = ١٩ً ٤٦َ ٣٤°

، مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٤ × جا ١٩ً ٤٦َ ٣٤°

≃ ٤٧,٩ سم^2

٣٥

∵ س > ١٠

∴ أكبر الزوايا هي المقابلة للضلع الذي طوله ١٤ سم

∴ جتا ١٢٠° = $\frac{(١٠)^2 + \text{س}^2 - (١٤)^2}{\text{٢ × ١٠ × س}}$

∴ −$\frac{١}{٢}$ = $\frac{\text{س}^2 - ٩٦}{\text{٢٠ س}}$

∴ −س^2 + ٩٦ = ١٠ س

∴ س^2 + ١٠ س − ٩٦ = ٠

(س + ١٦) (س − ٦) = ٠

∴ س = ٦ أ، س = −١٦ (مرفوض)

٣٦

∵ جتا حـ = $\frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{حـ}^2}{\text{٢ أ ب}}$

∴ جتا ١٢٠° = $\frac{(\text{ب} - ٢)^2 + \text{ب}^2 - (\text{ب} + ٢)^2}{\text{٢ (ب − ٢) (ب)}}$

∴ −$\frac{١}{٢}$ = $\frac{\text{ب}^2 - \text{٤ ب} + ٤ + \text{ب}^2 - \text{ب}^2 - \text{٤ ب} - ٤}{\text{٢ (ب − ٢) (ب)}}$

∴ −١ = $\frac{\text{ب}^2 - \text{٨ ب}}{\text{ب (ب − ٢)}}$ ∴ −١ = $\frac{\text{ب (ب − ٨)}}{\text{ب (ب − ٢)}}$

∴ −ب + ٢ = ب − ٨   ∴ ٢ ب = ١٠

∴ ب = ٥   ∴ أ = ٣ ، حـ = ٧

٣٧

∵ (أ + ب + حـ) (أ + ب − حـ) = ٣ أ ب

∴ (أ + ب)^2 − حـ^2 = ٣ أ ب

∴ أ^2 + ب^2 + ٢ أ ب − حـ^2 = ٣ أ ب

∴ أ^2 + ب^2 − حـ^2 = أ ب وبقسمة الطرفين على ٢ أ ب

∴ $\frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{حـ}^2}{\text{٢ أ ب}} = \frac{١}{٢}$

∴ جتا حـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق(∠حـ) = ٦٠°

٣٨

∵ (أ + ب + حـ) (أ + ب − حـ) = ك أ ب

∴ (أ + ب)^2 − حـ^2 = ك أ ب

∴ أ^2 + ب^2 + ٢ أ ب − حـ^2 = ك أ ب

∴ $\frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{حـ}^2}{\text{٢ أ ب}} = \frac{\text{(ك − ٢) أ ب}}{\text{٢ أ ب}}$

∴ جتا حـ = $\frac{\text{ك} - ٢}{٢}$

، ∵ صفر < ق(∠حـ) < ١٨٠°

∴ −١ < جتا حـ < ١   ∴ −١ < $\frac{\text{ك} - ٢}{٢}$ < ١

∴ −٢ < ك − ٢ < ٢   ∴ صفر < ك < ٤

∴ ك ∈]٠ ، ٤[، عندما ك = ١

∴ جتا حـ = $\frac{-١}{٢}$ ∴ ق(∠حـ) = ١٢٠°

٣٩

من Δ أ ب حـ :

(أ حـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب حـ)^2

− ٢ (أ ب) × (ب حـ) جتا (∠أ ب حـ)   (١)

، من Δ ب حـ ء :

(ب ء)^2 = (ب حـ)^2 + (ء حـ)^2 − ٢ (ب حـ)

× (ء حـ) جتا (∠ء حـ ب)

، ∵ ء حـ = أ ب ، جتا (∠ء حـ ب) = − جتا (∠أ ب حـ)

∴ (ب ء)^2 = (ب حـ)^2 + (أ ب)^2 + ٢ (ب حـ)

× (أ ب) جتا (∠أ ب حـ)   (٢)

وبجمع (١) ، (٢) :

∴ (أ حـ)^2 + (ب ء)^2 = ٢ (أ ب)^2 + ٢ (ب حـ)^2

٤٠

من Δ أ ب ء :

(أ ب)^2 = (أ ء)^2 + (ب ء)^2

− ٢ (أ ء) (ب ء) جتا (∠أ ء ب)   (١)

من Δ أ ء حـ : (أ حـ)^2 = (أ ء)^2 + (حـ ء)^2

− ٢ (أ ء) (حـ ء) جتا (∠أ ء حـ)   (٢)

، ∵ جتا (∠أ ء ب) = − جتا (∠أ ء حـ) ، حـ ء = ب ء

وبجمع (١) ، (٢) :

∴ (أ ب)^2 + (أ حـ)^2 = ٢ (أ ء)^2 + ٢ (ب ء)^2

∴ (٥)^2 + (٨)^2 = ٢ (أ ء)^2 + ٢ (٦)^2

∴ أ ء = $\frac{\sqrt{٣٤}}{٢}$ سم

٤١

ظتا ب + ظتا حـ = $\frac{\text{جتا ب}}{\text{جا ب}} + \frac{\text{جتا حـ}}{\text{جا حـ}}$

= $\frac{\text{أ}^2 + \text{حـ}^2 - \text{ب}^2}{\text{٢ أ حـ جا ب}} + \frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{حـ}^2}{\text{٢ أ ب جا حـ}}$

= $\frac{\text{أ}^2 + \text{حـ}^2 - \text{ب}^2}{\text{٤ Δ}} + \frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{حـ}^2}{\text{٤ Δ}}$

= $\frac{\text{٢ أ}^2}{\text{٤ Δ}} = \frac{\text{أ}^2}{\text{٢ Δ}}$

٤٢

∵ ب^2 = حـ^2 − ٢ حـ أ + أ^2 + أ حـ

∴ ب^2 = حـ^2 + أ^2 − حـ أ

، ∵ ب^2 = حـ^2 + أ^2 − ٢ أ حـ جتا ب

∴ حـ أ = ٢ أ حـ جتا ب   ∴ جتا ب = $\frac{١}{٢}$

∴ ق(∠ب) = ٦٠°

٤٣

فى Δ س ص ع :

∵ س^{٢} = ص^{٢} + ع^{٢} − ٢ ص ع جتا س

، ∵ س^{٢} = ص^{٢} + ع^{٢} − ص ع ظتا س

∴ ٢ جتا س = ظتا س ∴ ٢ جتا س = جتا س / جا س

∴ ٢ جتا س جا س − جتا س = ٠

∴ جتا س (٢ جا س − ١) = ٠

∴ إما جتا س = ٠ ومنها س = ٩٠°

أ، جا س = ١/٢ ∴ س = ٣٠° أ، ١٥٠°

∴ ق (∠س) = ٩٠° أ، ٣٠° أ، ١٥٠°

٤٤

∵ جتا ب = (أ^{٢} + ح^{٢} − ب^{٢}) / (٢ أ ح)

∴ ح / (٢ أ) = (أ^{٢} + ح^{٢} − ب^{٢}) / (٢ أ ح)

∴ ح^{٢} = أ^{٢} + ح^{٢} − ب^{٢}

∴ أ^{٢} = ب^{٢} ∴ أ = ب

∴ Δ أ ب ح متساوى الساقين.

٤٥

∵ أ ب ح ء هـ

خماسى منتظم

∴ ق (∠ب) = ١٠٨°

∴ (أ ح)^{٢}

= (١٨,٢٦)^{٢} + (١٨,٢٦)^{٢}

− ٢ (١٨,٢٦) (١٨,٢٦) × جتا ١٠٨°

∴ أ ح ≃ ٢٩,٥ سم

٤٦

حل زياد خطأ لأن قانون الجيب يجعل جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائمًا موجبًا رغم أن الزاوية هنا منفرجة ويؤكد ذلك استخدام قاعدة جيب التمام فى حل كريم.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١

① (ب) ② (د) ③ (ب) ④ (ب)

⑤ (ب) ⑥ (أ) ⑦ (جـ) ⑧ (د)

⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (أ)

إرشادات لحل رقم ١

① ∵ أ ب = √((٣ − ٠)^{٢} + (٤ − ١)^{٢}) = ٣ √٢

، ب ح = √((١ − ٣)^{٢} + (٣ − ٤)^{٢}) = √٥

، أ ح = √((١ − ٠)^{٢} + (٣ − ١)^{٢}) = √٥

∴ جتا (∠أ ح ب)

= ((√٥)^{٢} + (√٥)^{٢} − (٣√٢)^{٢}) / (٢ × √٥ × √٥)

= −٤/٥

② * إذا علم طول أب تعين ق (∠أ ح ب) وبالتالى ق (∠ء ح هـ) ، طول ء هـ

* إذا علم مساحة Δ أ ب ح تعين ق (∠أ ح ب) وبالتالى ق (∠ء ح هـ) ، طول ء هـ

* إذا علم محيط Δ أ ب ح عُلم طول أب وبالتالى نعين ق (∠أ ح ب) ، ق (∠ء ح هـ) ، طول ء هـ

∴ معرفة أى مما سبق يصلح لإيجاد طول ء هـ

③ ∵ (أ ب)^{٢} = (٥)^{٢} + (٦)^{٢} − ٢ × ٥ × ٦ جتا θ (١)

، (أ ح)^{٢} = (٥)^{٢} + (٤)^{٢}

− ٢ × ٥ × ٤ جتا (١٨٠° − θ) (٢)

، ∵ أ ب = أ ح

ومن (١) ، (٢) :

∴ ٢٥ + ٣٦ − ٦٠ جتا θ

= ٢٥ + ١٦ + ٤٠ جتا θ

∴ ١٠٠ جتا θ = ٢٠ ∴ جتا θ = ١/٥

∴ (أ ب)^{٢} = ٢٥ + ٣٦ − ٦٠ × ١/٥ = ٤٩

∴ أ ب = ٧ سم

④ ∵ الشكل أ ب ح ء رباعى دائرى.

∴ جتا أ = − جتا ح

∴ فى Δ أ ب ء :

(ب ء)^{٢} = (٣)^{٢} + (٢)^{٢} − ٢ × ٣ × ٢ جتا أ (١)

، فى Δ ح ب ء :

(ب ء)^{٢} = (٣)^{٢} + (٤)^{٢} − ٢ × ٣ × ٤ جتا ح (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ٩ + ٤ − ١٢ جتا أ = ٩ + ١٦ + ٢٤ جتا أ

∴ ٣٦ جتا أ = −١٢ ∴ جتا أ = −١/٣

⑤ ∵ أح ، ءب وتران متقاطعان فى الدائرة فى النقطة هـ

∴ أ هـ × هـ ح = ء هـ × هـ ب

∴ ٣ × ٤ = ٢ × هـ ب ∴ هـ ب = ٦ سم

∴ جتا (∠ب أ هـ) = ((٣)^{٢} + (٨)^{٢} − (٦)^{٢}) / (٢ × ٣ × ٨) = ٣٧/٤٨

∴ ق (∠ب أ هـ) ≃ ٣٩° ٣٤َ

⑥ فى Δ أ ب ح :

∵ (أ ب)^{٢} = (٦)^{٢} + (١٢)^{٢} − ٢ × ٦ × ١٢ × جتا (٠,٤)^{ء}

∴ أ ب ≃ ٦,٩ سم

، ∵ هـ^{ء} = ل / نق

∴ طول ب⌒ء = ٠,٤^{ء} × ٦ = ٢,٤ سم

∴ محيط الجزء المظلل ≃ ٦,٩ + ٢,٤ + ٦ = ١٥,٣

⑦ ∵ جتا أ = (ب^{٢} + ح^{٢} − أ^{٢}) / (٢ ب ح)

∴ ب^{٢} + ح^{٢} − أ^{٢} = ٢ ب ح جتا أ

∴ (ب^{٢} + ح^{٢} − أ^{٢}) ظا أ

= ٢ ب ح جتا أ × جا أ / جتا أ = ٢ ب ح جا أ

= ٤ × (١/٢ ب ح جا أ) = ٤ × ١٢ = ٤٨

⑧ (١ + أ/ح + ب/ح) (١ + ح/ب − أ/ب)

= ((ح + أ + ب)/ح) ((ب + ح − أ)/ب)

= ((ب + ح)^{٢} − أ^{٢}) / (ب ح) = (ب^{٢} + ح^{٢} − أ^{٢} + ٢ ب ح) / (ب ح)

= (ب^{٢} + ح^{٢} − أ^{٢}) / (ب ح) + ٢

= ٢ جتا أ + ٢ = ٢ (١/٢) + ٢ = ٣

⑨ ∵ (أ^{٣} + ب^{٣} + ح^{٣}) / (أ + ب + ح) = أ^{٢}

∴ أ^{٣} + ب^{٣} + ح^{٣} = أ^{٣} + ب أ^{٢} + ح أ^{٢}

∴ ب^{٣} + ح^{٣} = ب أ^{٢} + ح أ^{٢}

∴ (ب + ح) (ب^{٢} − ب ح + ح^{٢}) = أ^{٢} (ب + ح)

∴ أ^{٢} = ب^{٢} − ب ح + ح^{٢}

∴ ب^{٢} + ح^{٢} − أ^{٢} = ب ح

∴ (ب^{٢} + ح^{٢} − أ^{٢}) / (٢ ب ح) = ١/٢ ∴ جتا أ = ١/٢

∴ ق (∠أ) = ٦٠°

⑩ بفرض طول ضلع المربع الصغير = ل سم

∴ طول ضلع المربع الأكبر = ٣ ل سم

∴ س هـ = √(ل^{٢} + ل^{٢}) = √٢ ل سم

، ب س = √(ل^{٢} + (٣ ل)^{٢}) = √١٠ ل سم

، ب هـ = ٤ ل سم

∴ جتا (د ب س هـ) = $\frac{(\sqrt{٢}\ ل)^2 + (\sqrt{١٠}\ ل)^2 - (٤\ ل)^2}{٢ \times \sqrt{٢}\ ل \times \sqrt{١٠}\ ل}$

= $\frac{-٤ ل^2}{٤\sqrt{٥} ل^2} = \frac{-١}{\sqrt{٥}}$ ∴ جا (د ب س هـ) = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

(١١) ∵ ب حـ = $\sqrt{(٦٠)^2 + (٨٠)^2}$ = ١٠٠ سم

، ∵ محيط Δ أ حـ ء = محيط Δ أ ب ء

∴ أ حـ + حـ ء = أ ب + ب ء (لأن أ ء مشترك)

∴ ٨٠ + حـ ء = ٦٠ + (١٠٠ − حـ ء)

∴ ٢ حـ ء = ٨٠

∴ حـ ء = ٤٠ سم ، ب ء = ٦٠ سم

فى Δ أ ب ء :

∴ (أ ء)^2 = (٦٠)^2 + (٦٠)^2 − ٢ (٦٠) (٦٠) جتا ب

∵ جتا ب = $\frac{٦٠}{١٠٠}$ = ٠,٦

∴ (أ ء)^2 = ٣٦٠٠ + ٣٦٠٠ − ٢ × ٣٦٠٠ × ٠,٦

∴ أ ء = ٢٤ $\sqrt{٥}$ سم

٢

∵ $\frac{أ^2 + حـ^2 - ب^2}{٢ أ حـ} = \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{٢ ب حـ}$

∴ أ^2 ب^2 + ب^2 حـ^2 − ب^4 = أ^2 ب^2 + أ^2 حـ^2 − أ^4

∴ (أ^2 − ب^2) حـ^2 − (أ^2 − ب^2) (أ^2 + ب^2) = ٠

∴ (أ^2 − ب^2) (حـ^2 − أ^2 − ب^2) = ٠

∴ أ^2 = ب^2 أ، حـ^2 = أ^2 + ب^2

∴ أ = ب أى المثلث أ ب حـ متساوى الساقين

أ، المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى حـ

٣

∵ ق (د أ هـ ب) = ق (د أ هـ حـ)

= ق (د ب هـ حـ) = $\frac{٣٦٠°}{٣}$ = ١٢٠°

فى Δ أ ب هـ :

(أ ب)^2 = ٣٦ + ١٠٠ − ٢ × ٦ × ١٠ × جتا ١٢٠°

∴ أ ب = ١٤ سم

وبفرض هـ حـ = س

∴ فى Δ أ هـ حـ :

(أ حـ)^2 = ١٠٠ + س^2 − ٢ × ١٠ × س جتا ١٢٠°

∴ (أ حـ)^2 = ١٠٠ + س^2 + ١٠ س

فى Δ ب هـ حـ :

(ب حـ)^2 = ٣٦ + س^2 − ٢ × ٦ × س جتا ١٢٠°

∴ (ب حـ)^2 = ٣٦ + س^2 + ٦ س

، من Δ أ ب حـ : (أ حـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب حـ)^2

∴ ١٠٠ + س^2 + ١٠ س = ١٩٦ + ٣٦ + س^2 + ٦ س

∴ ٤ س = ١٣٢ ∴ س = ٣٣ سم

∴ هـ حـ = ٣٣ سم

٤

بفرض أن :

، أ م = م ن = ن حـ = س

، أ ب = ص

من Δ أ ب م :

جتا أ = $\frac{ص^2 + س^2 - ٩}{٢ س ص}$

∴ $\frac{ص}{٣ س} = \frac{ص^2 + س^2 - ٩}{٢ س ص}$

∴ ٢ ص^2 = ٣ ص^2 + ٣ س^2 − ٢٧

∴ ص^2 + ٣ س^2 = ٢٧ (١)

من Δ أ ب ن :

جتا أ = $\frac{ص^2 + ٤ س^2 - ١٦}{٢ \times ص \times ٢ س}$

∴ $\frac{ص}{٣ س} = \frac{ص^2 + ٤ س^2 - ١٦}{٤ س ص}$

∴ ٤ ص^2 = ٣ ص^2 + ١٢ س^2 − ٤٨

∴ − ص^2 + ١٢ س^2 = ٤٨ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ١٥ س^2 = ٧٥ ∴ س^2 = ٥ ∴ س = $\sqrt{٥}$ سم

وبالتعويض فى (١) :

∴ ص^2 + ١٥ = ٢٧ ∴ ص^2 = ١٢

∴ ص = ٢ $\sqrt{٣}$ سم

∴ ب حـ = $\sqrt{(٣\sqrt{٥})^2 - ١٢} = \sqrt{٣٣}$

∴ محيط Δ أ ب حـ = أ ب + ب حـ + أ حـ

= ٢ $\sqrt{٣}$ + $\sqrt{٣٣}$ + ٣ $\sqrt{٥}$ ≃ ١٦ سم

٥

(١) ∵ $\frac{جتا أ}{أ} = \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{٢ ب حـ \times أ}$

، $\frac{جتا ب}{ب} = \frac{أ^2 + حـ^2 - ب^2}{٢ أ حـ \times ب}$ ، $\frac{جتا حـ}{حـ} = \frac{أ^2 + ب^2 - حـ^2}{٢ أ ب \times حـ}$

∴ $\frac{جتا أ}{أ} + \frac{جتا ب}{ب} + \frac{جتا حـ}{حـ}$

= $\frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2 + أ^2 + حـ^2 - ب^2 + أ^2 + ب^2 - حـ^2}{٢ أ ب حـ}$

= $\frac{أ^2 + ب^2 + حـ^2}{٢ أ ب حـ}$

(٢) ∵ أ^2 + ب^2 + حـ^2 = ب^2 + حـ^2 − ٢ ب حـ جتا أ

+ أ^2 + حـ^2 − ٢ حـ أ جتا ب + أ^2 + ب^2 − ٢ أ ب جتا حـ

∴ أ^2 + ب^2 + حـ^2

= ٢ أ^2 + ٢ ب^2 + ٢ حـ^2 − ٢ ب حـ جتا أ − ٢ حـ أ جتا ب

− ٢ أ ب جتا حـ

∴ أ^2 + ب^2 + حـ^2

= ٢ (ب حـ جتا أ + حـ أ جتا ب + أ ب جتا حـ)

(٣) $\frac{ظا أ}{ظا ب} = \frac{جا أ}{جتا أ} \div \frac{جا ب}{جتا ب} = \frac{جا أ}{جا ب} \times \frac{جتا ب}{جتا أ}$

= $\frac{أ}{ب} \times \frac{أ^2 + حـ^2 - ب^2}{٢ أ حـ} \times \frac{٢ ب حـ}{ب^2 + حـ^2 - أ^2}$

= $\frac{أ^2 + حـ^2 - ب^2}{ب^2 + حـ^2 - أ^2}$

إجابات تمارين 21

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د) (٢) (جـ)

(٣) (جـ) (٤) أولًا : (أ) ثانيًا : (د)

(٥) (أ) (٦) (ب) (٧) (أ) (٨) (أ)

(٩) (أ) (١٠) (ب) (١١) (د) (١٢) (جـ)

(١٣) (د) (١٤) (د) (١٥) (جـ) (١٦) (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

مسائل على الحالة الأولى لحل المثلث (طول ضلع وقياسا زاويتين)

١

ق (د م) = ١٨٠° − (٣٣° ١٦′ + ٤٤° ١٩′) = ١٠٢° ٢٥′

∴ $\frac{لَ}{جا ٣٣° ١٦′} = \frac{١٧}{جا ١٠٢° ٢٥′} = \frac{نَ}{جا ٤٤° ١٩′}$

∴ لَ ≃ ٩,٥ سم ، نَ ≃ ١٢,٢ سم

٢

ق (د أ) = ٨٠° ، ق (د ب) = ٤٠°

∴ ق (د حـ) = ١٨٠° − (٨٠° + ٤٠°) = ٦٠°

∴ $\frac{ب حـ}{جا ٨٠°} = \frac{أ حـ}{جا ٤٠°} = \frac{٩}{جا ٦٠°}$

∴ ب حـ ≃ ١٠,٢ سم ، أ حـ ≃ ٦,٧ سم

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ب حـ × أ حـ × جا حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠,٢ × ٦,٧ × جا ٦٠°

≃ ٣٠ سم^2

٣

ق(د ع) = ١٨٠° − (٧٥° ١٢′ + ٤٨° ١٥′) = ٥٦° ٣٣′

∴ ص ع / جا ٧٥° ١٢′ = س ع / جا ٤٨° ١٥′ = ٤٠ / جا ٥٦° ٣٣′

∴ ص ع ≃ ٤٦,٤ سم ، س ع ≃ ٣٥,٨ سم

، الارتفاع المطلوب = ص ع × جا ص

= ٤٦,٤ جا ٤٩° ١٥′ ≃ ٣٤,٦ سم

مسائل على الحالة الثانية لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة)

٤

أ² = (٦)² + (٦)² − ٢ × ٦ × ٦ × جتا ١٥٣° ١٢′

∴ أ ≃ ١١,٦٧ سم

، ق(د ب) = ق(د حـ) = (١٨٠° − ١٥٣° ١٢′) / ٢ = ١٣° ٢٤′

٥

ق(د م) = ١,٢ء ≃ ٦٨° ٤٥′

∴ م² = (١٢,٥)² + (٧,٢٥)² − ٢ × ١٢,٥ × ٧,٢٥ × جتا ٦٨° ٤٥′

∴ م ≃ ١١,٦٩ سم

∴ جتا ل = ((١١,٩٦)² + (٧,٢٥)² − (١٢,٥)²) / (٢ × ١١,٩٦ × ٧,٢٥)

∴ ق(د ل) ≃ ٧٦° ٥٣′

∴ ق(د ن) = ١٨٠° − (٦٨° ٤٥′ + ٧٦° ٥٣′)

= ٣٤° ٢٢′

٦

(ل ن)² = (٤٨,٥)² + (٤٦)² − ٢ × ٤٨,٥ × ٤٦ × (−٠,٦)

∴ ل ن ≃ ٨٤,٥٣ سم

، جتا ل = ((٤٨,٥)² + (٨٤,٥٣)² − (٤٦)²) / (٢ × ٤٨,٥ × ٨٤,٥٣)

∴ ق(د ل) ≃ ٢٥° ٤٨′ ، ق(د م) ≃ ١٢٦° ٥٢′

∴ ق(د ن) = ٢٧° ٢٠′

مسائل على الحالة الثالثة لحل المثلث (أطوال ثلاثة أضلاع)

٧

(١) جتا أ = ((٢٧)² + (٢٤)² − (١٥)²) / (٢ × ٢٧ × ٢٤)

∴ ق(د أ) ≃ ٣٣° ٣٣′

، جتا ب = ((١٥)² + (٢٧)² − (٢٤)²) / (٢ × ١٥ × ٢٧)

∴ ق(د ب) ≃ ٦٢° ١١′

، ق(د حـ) ≃ ١٨٠° − (٣٣° ٣٣′ + ٦٢° ١١′) ≃ ٨٤° ١٦′

(٢) جتا أ = ((٣٥)² + (١٧)² − (٢٨)²) / (٢ × ٣٥ × ١٧)

∴ ق(د أ) ≃ ٥٢° ١٠′

، جتا ب = ((٢٨)² + (١٧)² − (٣٥)²) / (٢ × ٢٨ × ١٧)

∴ ق(د ب) ≃ ٩٩° ١١′ ، ق(د حـ) ≃ ٢٨° ٣٩′

٨

جتا أ = ((١٤)² + (١٥)² − (١٣)²) / (٢ × ١٤ × ١٥)

∴ ق(د أ) ≃ ٥٣° ٨′

، جتا ب = ((١٥)² + (١٣)² − (١٤)²) / (٢ × ١٥ × ١٣)

∴ ق(د ب) ≃ ٥٩° ٢٩′

∴ ق(د حـ) = ١٨٠° − (٥٣° ٨′ + ٥٩° ٢٩′) = ٦٧° ٢٣′

٩

جتا أ = ((٨)² + (٤)² − (٥)²) / (٢ (٨) (٤))

∴ ق(د أ) ≃ ٣٠° ٤٥′

، جتا ب = ((٥)² + (٤)² − (٨)²) / (٢ (٥) (٤))

∴ ق(د ب) ≃ ١٢٥° ٦′

∴ ق(د حـ) = ١٨٠° − (٣٠° ٤٥′ + ١٢٥° ٦′) = ٢٤° ٩′

مسائل على الحالة الرابعة لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية مقابلة لأحدهما)

١٠

١٠ / جا أ = ٩ / جا ٥٧° = حـَ / جا حـ ∴ جا أ = ١٠ جا ٥٧° / ٩

∴ ق(د أ) = ٦٨° ٤٤′ أ، ق(د أ) = ١١١° ١٦′

ومنها ق(د حـ) = ٥٤° ١٦′ أ، ق(د حـ) = ١١° ٤٤′

، ∵ ٩ / جا ٥٧° = حـَ / جا حـ

∴ حـَ = ٨,٧ سم أ، حـَ = ٢,٢ سم

١١

٤ / جا ٥٠° = ٣ / جا ب = حـَ / جا حـ ∴ جا ب = ٣ جا ٥٠° / ٤

∴ ق(د ب) = ٣٥° ٤′

أ، ق(د ب) = ١٤٤° ٥٦′ (مرفوض)

∴ ق(د حـ) = ٩٤° ٥٦′

∴ حـَ / جا ٩٤° ٥٦′ = ٤ / جا ٥٠° ∴ حـَ ≃ ٥,٢ سم

١٢

١٢ / جا ١١٦° = ١٠ / جا أ = بَ / جا ب ∴ جا أ = ١٠ جا ١١٦° / ١٢

∴ ق(د أ) ≃ ٤٨° ٣٠′

أ، ق(د أ) ≃ ١٣١° ٣٠′ (مرفوض)

، ق(د ب) ≃ ١٨٠° − (٤٨° ٣٠′ + ١١٦°) = ١٥° ٣٠′

∴ بَ / جا ١٥° ٣٠′ = ١٢ / جا ١١٦° ∴ بَ ≃ ٣,٦ سم

١٣

(١) ∵ د أ منفرجة ، أَ > بَ ∴ يوجد حل وحيد.

∴ ١٥ / جا ١٢٠° = ١٠ / جا ب ∴ جا ب = ١٠ جا ١٢٠° / ١٥

∴ ق(د ب) ≃ ٣٥°

، ق(د حـ) = ١٨٠° − (٣٥° + ١٢٠°) = ٢٥°

∴ حـَ / جا ٢٥° = ١٥ / جا ١٢٠° ∴ حـَ ≃ ٧,٣ سم

(٢) ∵ د حـ منفرجة ، حـَ > أَ ∴ يوجد حل وحيد

∴ ١٦ / جا ١١٥° = ٤ / جا أ ∴ جا أ = ٤ جا ١١٥° / ١٦

∴ ق(د أ) ≃ ١٣°

، ق(د ب) = ١٨٠° − (١١٥° + ١٣°) = ٥٢°

، ١٦ / جا ١١٥° = بَ / جا ٥٢° ∴ بَ ≃ ١٣,٩ سم

(٣) ∵ د أ منفرجة ، أَ < بَ

∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق

(٤) ∵ د أ حادة ، ع = ٢٨ جا ٤٢° ≃ ١٨,٧ سم

، ١٨,٧ < ٢٠ < ٢٨ ∴ يوجد للمثلث حلان.

∴ ٢٠ / جا ٤٢° = ٢٨ / جا ب

∴ ق(د ب) = ٧٠° أ، ق(د ب) = ١١٠°

∴ ق(د حـ) = ١٨٠° − (٧٠° + ٤٢°) = ٦٨°

أ، ق(د حـ) = ١٨٠° − (١١٠° + ٤٢°) = ٢٨°

، ∵ حـَ / جا حـ = ٢٠ / جا ٤٢°

∴ حـَ ≃ ٢٧,٧ سم أ، حـَ ≃ ١٤ سم

(٥) ∵ د أ حادة ، ع = ٧ جا ٦٠° ≃ ٦,١ سم

∴ أَ < ع

∴ الشروط لاتحقق وجود أى مثلث على الإطلاق.

(٦) ∵ د أ حادة ، أَ > حـَ ∴ يوجد حل وحيد.

∴ ١٢ / جا ٢٧° = ٧ / جا حـ ∴ ق(د حـ) ≃ ١٥°

∴ ق(د ب) = ١٨٠° − (١٥° + ٢٧°) = ١٣٨°

∴ بَ / جا ١٣٨° = ١٢ / جا ٢٧° ∴ بَ ≃ ١٧,٧ سم

(٧) ∵ ∠ب حادة ، ع = ٤ √٣ جا ٦٠° = ٦ سم

∵ ع = بَ

∴ يوجد مثلث وحيد قائم الزاوية.

∴ ٦ / جا ٦٠° = ٤ √٣ / جا أ ∴ ق (∠أ) = ٩٠°

∴ ق (∠حـ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٦٠°) = ٣٠°

∴ حـَ / جا ٣٠° = ٦ / جا ٦٠° ∴ حـَ = ٣,٥ سم

(٨) ∵ ∠أ حادة ، ع = ٨ جا ٤٧° ≃ ٥,٩ سم

∴ ع < أَ < بَ ∴ يوجد للمثلث حلان.

∴ ٦ / جا ٤٧° = ٨ / جا ب

∴ ق (∠ب) ≃ ٧٧° أ، ق (∠ب) ≃ ١٠٣°

∴ ق (∠حـ) = ١٨٠° − (٤٧° + ٧٧°) = ٥٦°

أ، ق (∠حـ) = ١٨٠° − (٤٧° + ١٠٣°) = ٣٠°

، ∵ حـَ / جا حـ = ٦ / جا ٤٧° ∴ حـَ ≃ ٦,٨ سم

أ، حـَ = ٤,١ سم

١٤

∵ ∠ب حادة ، ع = ٤٢ جا ٥٨° ≃ ٣٥,٦٢ سم

∴ لا يكون للمثلث حل إذا كان : بَ < ٣٥,٦٢ سم

مسائل متنوعة

١٥

∵ Δ أ ب حـ متساوى الساقين ، ق (∠أ) = ١١٠°

∴ ق (∠ب) = ق (∠حـ) = (١٨٠° − ١١٠°) / ٢ = ٣٥°

∴ ٨ / جا ١١٠° = بَ / جا ٣٥° = حـَ / جا ٣٥°

∴ بَ = حـَ ≃ ٤,٩ سم

١٦

∵ جتا ب = ٣/٥ (موجبة)

∴ ∠ب حادة

∴ ق (∠ب) ≃ ٥٣° ٨َ ، ق (∠حـ) = ٢٢° ٣٧َ

∴ ق (∠أ) = ١٠٤° ١٥َ

∴ ٢١ / جا ١٠٤° ١٥َ = بَ / جا ٥٣° ٨َ = حـَ / جا ٢٢° ٣٧َ

∴ بَ ≃ ١٧,٣ سم ، حـَ ≃ ٨,٣ سم

١٧

∵ مساحة المثلث أ ب حـ = ١/٢ أَ حـَ جا ب

∴ ١٠ √٣ = ١/٢ × ٥ حـَ جا ١٢٠°

∴ حـَ = ٨ سم

∴ بَ² = (٥)² + (٨)² − ٢ × ٥ × ٨ جتا ١٢٠°

∴ بَ = ١١,٣٦ سم

∴ جتا أ = ((١١,٣٦)² + (٨)² − (٥)²) / (٢ × ١١,٣٦ × ٨)

∴ ق (∠أ) ≃ ٢٢° ٢٤َ ∴ ق (∠حـ) = ٣٧° ٣٦َ

١٨

ق (∠أ) = ٤/١٥ × ١٨٠° = ٤٨°

، ق (∠ب) = ٥/١٥ × ١٨٠° = ٦٠°

، ق (∠حـ) = ٦/١٥ × ١٨٠° = ٧٢°

، ∵ أَ / جا أ = بَ / جا ب = حـَ / جا حـ = (أَ + بَ + حـَ) / (جا أ + جا ب + جا حـ)

∴ أَ / جا ٤٨° = بَ / جا ٦٠° = حـَ / جا ٧٢° = ٥٠ / ٢,٥٦

∴ أَ ≃ ١٤,٥ سم ، بَ ≃ ١٦,٩ سم ، حـَ ≃ ١٨,٦ سم

١٩

بفرض أن :

جا أ = ٣ ك ، جا ب = ٤ ك ، جا حـ = ٦ ك

∴ أَ / ٣ ك = بَ / ٤ ك = حـَ / ٦ ك = (أَ + بَ + حـَ) / ١٣ ك

∴ أَ / ٣ = بَ / ٤ = حـَ / ٦ = ٥٢ / ١٣

∴ أَ = ١٢ سم ، بَ = ١٦ سم ، حـَ = ٢٤ سم

∴ جتا أ = ((١٦)² + (٢٤)² − (١٢)²) / (٢ × ١٦ × ٢٤)

∴ ق (∠أ) ≃ ٢٣° ٣٦َ

، جتا ب = ((١٢)² + (٢٤)² − (١٦)²) / (٢ × ١٢ × ٢٤)

∴ ق (∠ب) ≃ ٣٦° ٢٠َ ∴ ق (∠حـ) = ١١٧° ٧َ

٢٠

٢١ / جا أ = ٢٥ / جا ب = حـَ / جا حـ = ٢٨

∴ ق (∠أ) = ٤٨° ٣٥َ ، ق (∠ب) ≃ ٦٣° ١٤َ

∴ ق (∠حـ) = ٦٨° ١١َ

∴ حـَ = ٢٨ جا ٦٨° ١١َ ≃ ٢٦ سم

٢١

أَ / جا ٨٢° = بَ / جا ب = ٥ / جا حـ = ١٦ ∴ أَ ≃ ١٥,٨ سم

، ∵ أَ > حـَ ∴ ∠حـ حادة.

، ∵ جا حـ = ٥/١٦ ∴ ق (∠حـ) ≃ ١٨° ١٣َ

∴ ق (∠ب) = ١٨٠° − (٨٢° + ١٨° ١٣َ) = ٧٩° ٤٧َ

∴ بَ = ١٦ جا ٧٩° ٤٧َ ≃ ١٥,٧ سم

٢٢

∵ ٢ × ٢٢/٧ × نق = ٤٤ ∴ ٢ نق = ١٤

∴ ٧ / جا أ = بَ / جا ٤٠° = حـَ / جا حـ = ١٤

∴ بَ = ١٤ جا ٤٠° ≃ ٩ سم

، ∵ بَ > أَ ∴ ∠أ حادة.

، ∵ جا أ = ٧/١٤ ∴ ق (∠أ) = ٣٠°

∴ ق (∠حـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٣٠°) = ١١٠°

∴ حـَ = ١٤ جا ١١٠° ≃ ١٣ سم

٢٣

ق (∠ص) = ١٨٠° − (٨٢° + ٥٦°) = ٤٢°

∴ سَ / جا ٨٢° = صَ / جا ٤٢° = عَ / جا ٥٦° = ك

∴ سَ = ك جا ٨٢° ، صَ = ك جا ٤٢°

∴ ٩٠٠ = ١/٢ (ك جا ٨٢°) (ك جا ٤٢°) جا ٥٦°

∴ ك ≃ ٥٧ ويرفض الحل السالب.

∴ سَ ≃ ٥٦ سم ، صَ ≃ ٣٨ سم ، عَ ≃ ٤٧ سم

٢٤

ق (∠حـ) = ١٨٠° − (٣٥° + ٧٥°) = ٧٠°

∴ أَ / جا ٣٥° = بَ / جا ٧٥° = حـَ / جا ٧٠° = (أَ + ٣ حـَ) / (جا ٣٥° + ٣ جا ٧٠°)

= ٢٥ / (جا ٣٥° + ٣ جا ٧٠°)

∴ أَ ≃ ٤,٢ سم ، بَ = ٧,١ سم ، حـَ = ٦,٩ سم

٢٥

∵ أَ / جا أ = ٢ نق ∴ ١٣ / جا أ = ١٦

∴ ق (∠أ) ≃ ٥٤° ٢٠َ أ، ١٢٥° ٤٠َ

عندما ق (∠أ) = ٥٤° ٢٠َ

∴ ق (∠حـ) = ٨٣° ٤٠َ

∴ ١٣ / جا ٥٤° ٢٠َ = بَ / جا ٤٢° = حـَ / جا ٨٣° ٤٠َ

∴ بَ ≃ ١٠,٧ سم ، حـَ ≃ ١٥,٩ سم

عندما ق (∠أ) = ١٢٥° ٤٠َ

∴ ق (∠حـ) = ١٢° ٢٠َ

∴ ١٣ / جا ١٢٥° ٤٠َ = بَ / جا ٤٢° = حـَ / جا ١٢° ٢٠َ

∴ بَ ≃ ١٠,٧ سم ، حـَ ≃ ٣,٤ سم

٢٦

① جتا أ = ((٧,٦٣)² + (٦,٤)² − (٣,٢)²) / (٢ × ٧,٦٣ × ٦,٤)

∴ ق(∠أ) ≃ ٢٤° ٢٤´

، جتا ب = ((٣,٢)² + (٦,٤)² − (٧,٦٣)²) / (٢ × ٣,٢ × ٦,٤)

∴ ق(∠ب) ≃ ٩٩° ٥٢´

∴ ق(∠ح) = ٥٥° ٤٤´

② ح² = (١٢)² + (٢١)² − ٢ × ١٢ × ٢١ × جتا ٩٥°

∴ ح ≃ ٢٥,٠٧٨ سم

، ∵ ٢٥,٠٧٨ / جا ٩٥° = ١٢ / جا أ = ٢١ / جا ب

∴ ق(∠أ) ≃ ٢٨° ٢٨´ ، ق(∠ب) ≃ ٥٦° ٣٢´

③ لا يمكن تكوين المثلث لأن أ + ح = ب

④ ع = ١٠ جا ٤٢° ≃ ٦,٦٩ سم

∴ ع < أ < ب

∴ يوجد حلان للمثلث.

∴ ٧ / جا ٤٢° = ١٠ / جا ب = ح / جا ح

∴ ق(∠ب) ≃ ٧٢° ٥٥´

ومنها ق(∠ح) ≃ ٦٥° ٥´

، ح ≃ ٩,٥ سم

أ، ق(∠ب) ≃ ١٠٧° ٥´

منها ق(∠ح) ≃ ٣٠° ٥٥´

، ح ≃ ٥,٤ سم

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

① (أ) ② (ج) ③ (أ)

إرشادات الحل :

① ∵ أ / جا أ = ب / جا ب ∴ ٣ / (٥/١٣) = ٨ / جا ب

∴ جا ب = ٤٠/٣٩ (مرفوض)

∴ الشروط لا تحقق وجود أى مثلث على الإطلاق

∴ عدد المثلثات = صفر

② ∵ ٨ جا ٤٠° = ب جا أ ∴ ب جا أ < أ < ب

∴ يمكننا رسم مثلثين

③ ∵ ٨ جا ٤٠° = ب جا أ ∴ أ < ب جا أ

∴ لا يمكن رسم المثلث.

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الرابعة

١

∵ ق(∠ب) = ١٨٠° − (١٠٨° + ٥٢°) = ٢٠°

∴ أ ح / جا ٢٠° = ١٦٠ / جا ٥٢° = ب ح / جا ١٠٨°

∴ أ ح ≃ ٦٩ كم ، ب ح ≃ ١٩٣ كم

أى أن : المسافة بين أ ، ح ≃ ٦٩ كم

، المسافة بين ب ، ح ≃ ١٩٣ كم

٢

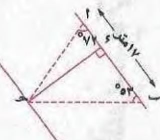
فى Δ أ ب ح :

① ق(∠ح) = ١٨٠° − (٥٣° + ٧٢°) = ٥٥°

∴ ١٧ / جا ٥٥° = أ ح / جا ٥٣° ∴ أ ح ≃ ١٦,٥٧ م

∴ المسافة بين العلامتين ≃ ١٧ م

② نسقط عمود من ح على أب وليكن ح ء



∴ فى Δ أ ح ء :

ح ء / جا ٧٢° = ١٦,٥٧ / جا ٩٠°

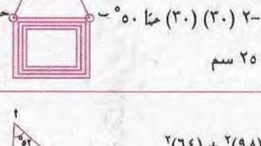
∴ ح ء ≃ ١٥,٧٦ م

∴ المسافة بين حافتي الجدول ≃ ١٥,٧٦ م

٣

(ب ح)² = (٣٠)² + (٣٠)² − ٢ (٣٠) (٣٠) جتا ٥٠°

∴ ب ح ≃ ٢٥ سم



٤

(ب ح)² = (٩٨)² + (٦٤)² − ٢ (٩٨) (٦٤) جتا ٥٢°

∴ ب ح ≃ ٧٧,٣ م

∴ طول السياج = ٩٨ + ٦٤ + ٧٧,٣ ≃ ٢٣٩ م

٥

(أ ب)² = (٢٤)² + (١٠)² − ٢ (٢٤) (١٠) جتا ٧٥°

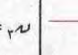
∴ أ ب ≃ ٢٣,٥ كم

٦

(أ ح)² = (٩)² + (١٥)² − ٢ (٩) (١٥) جتا ١٢٠°

أ ح = ٢١ كم

، ∵ الزمن = المسافة / السرعة



، ن١ = ١٥/٣٦ × ٦٠ = ٢٥ دقيقة.

ن٢ = ٩/٣٦ × ٦٠ = ١٥ دقيقة.

ن٣ = ٢١/٤٢ × ٦٠ = ٣٠ دقيقة.

∴ الزمن الكلى = ٢٥ + ١٥ + ٣٠ = ٧٠ دقيقة.

٧

∵ المثمن منتظم

∴ قياس كل زاوية من زواياه = ١٣٥°

، ق(∠ب ع ح) = ق(∠ح ع ء) = ١٣٥°/٦ = ٢٢,٥°

∴ (ع ب)² = (٦)² + (٦)² − ٢ (٦) (٦) جتا ١٣٥°

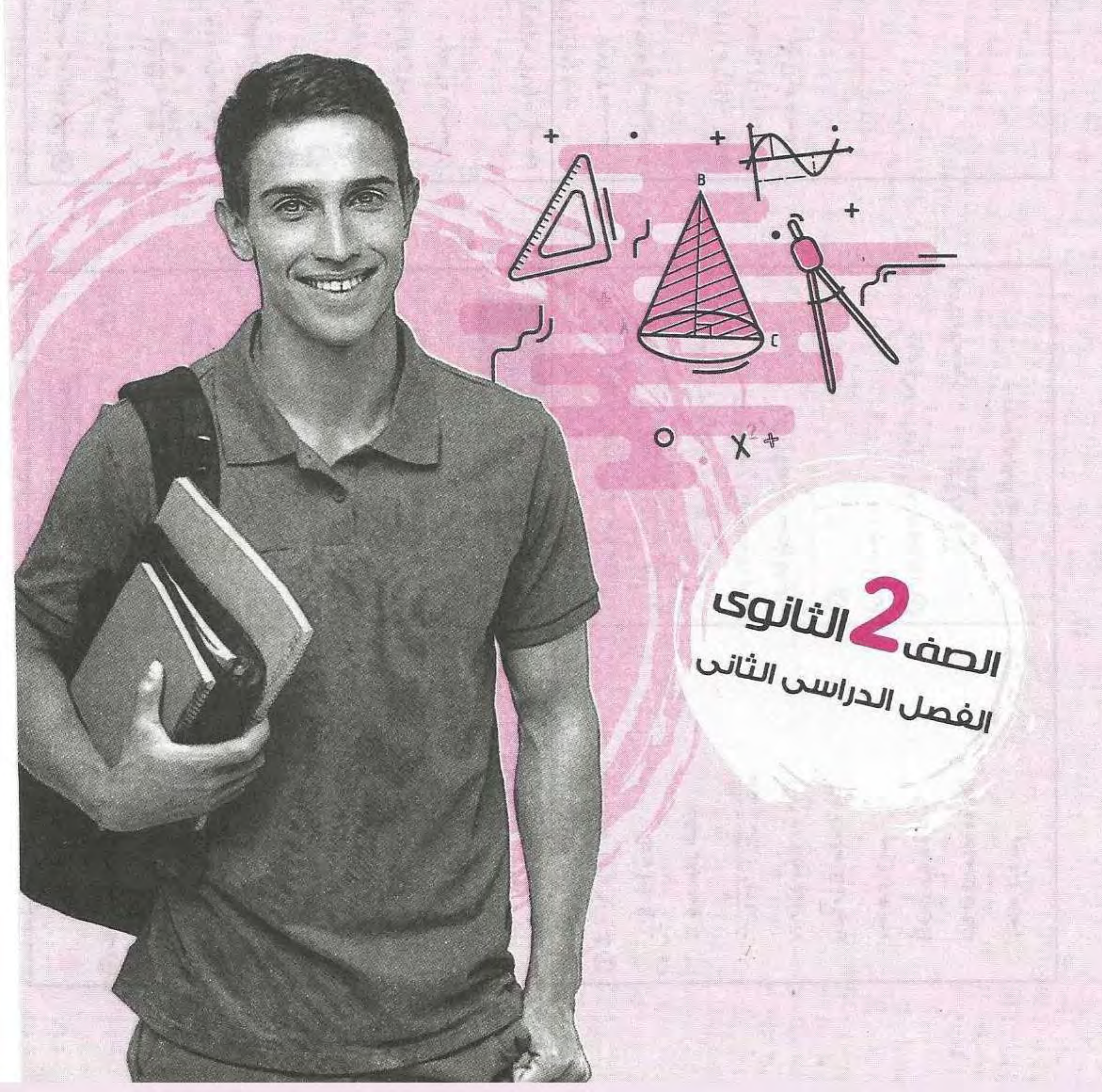
∴ ع ب ≃ ١١,١ متر

، (ع ح)² = (١١,١)² + (٦)² − ٢ (١١,١) (٦) جتا ١١٢,٥°

∴ ع ح ≃ ١٤,٥ متر

، (ع ء)² = (١٤,٥)² + (٦)² − ٢ (١٤,٥) (٦) جتا ٩٠°

∴ ع ء ≃ ١٥,٧ متر


الصف 2 الثانوى
الفصل الدراسى الثانى